有限な立上りをもつ過渡的音のスペクトル

古賀, 宏

https://doi.org/10.15017/99

出版情報：九州大学医療技術短期大学部紀要. 5, pp.49-51, 1978-03-25. 九州大学医療技術短期大学部
バージョン：
権利関係：

有限な立上りをもつ過渡的音のスペクトル

古 賀 宏

On the Spectrum of Transient Sound with Finite Rise Time

Hiroshi Koga

は じ め に

安定な楽音の要件についての物理的考察の一部を前論文[1)]において論じた。その際対象を無限小の立上り時間をもつ正弦波としてとりあつかったが，現実の問題としては，発音体や聴覚には有限の立上り時間が必要である。そこで指数関数的立上りをもつ場合の過渡的音のスペクトルをランニング，スペクトルの方法によって論ずることにする。

理 論 的 考 察

一定角周波数w_0の正弦波Sin w_0t が$t=0$で$(1-e^{-\alpha t})$ なる立上りをもって響き始め，時間の経過とともにそのサイクルを重ねていくとき，$t=t_n$ なる時刻までの周波数スペクトル成分の大きさ$F(w, t_n)$は次式によって求めることができる。

$$F(w, t_n)=\sqrt{a^2(w)+b^2(w)}$$

$$a(w)=2\int_0^{t_n}(1-e^{-\alpha t})\,\mathrm{Sin}\,w_0t\ \mathrm{Sin}\,wt\ dt.$$

$$b(w)=2\int_0^{t_n}(1-e^{-\alpha t})\ \mathrm{Sin}\,w_0t\ \mathrm{Cos}\,wt\ dt.$$

これを計算すると，$a(w)$，$b(w)$はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} a(w)=&\frac{\mathrm{Sin}(w_0-w)t_n}{w_0-w}-\frac{\mathrm{Sin}(w_0+w)t_n}{w_0+w}\\ &-\frac{e^{-\alpha t_n}\{(w_0-w)\mathrm{Sin}(w_0-w)t_n-\alpha\mathrm{Cos}(w_0-w)t_n\}+\alpha}{\alpha^2+(w_0-w)^2}\\ &+\frac{e^{-\alpha t_n}\{(w_0+w)\mathrm{Sin}(w_0+w)t_n-\alpha\mathrm{Cos}(w_0+w)t_n\}+\alpha}{\alpha^2+(w_0+w)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(w)=&\frac{1-\mathrm{Cos}(w_0-w)t_n}{w_0-w}+\frac{1-\mathrm{Cos}(w_0+w)t_n}{w_0+w}\\ &+\frac{e^{-\alpha t_n}\{(w_0-w)\mathrm{Cos}(w_0-w)t_n+\alpha\ \mathrm{Sin}(w_0-w)t_n\}-(w_0-w)}{\alpha^2+(w_0-w)^2}\\ &+\frac{e^{-\alpha t_n}\{(w_0+w)\mathrm{Cos}(w_0+w)t_n+\alpha\ \mathrm{Sin}(w_0+w)t_n\}-(w_0+w)}{\alpha^2+(w_0+w)^2}\end{aligned}$$

ここでt_n までに，n周期くりかえしたとして，$t_n=n\tau=\frac{2\pi n}{w_0}$とすれば，次の結果を得ることができる。

$$A(w,n) = -A\,\mathrm{Sin}\,2\pi nx + e^{-2\pi nk}\sqrt{B^2+C^2}\ \mathrm{Sin}(2\pi nx+\theta) - C$$

$$B(w,n) = A(1-\mathrm{Cos}\,2\pi nx) + e^{-2\pi nk}\sqrt{B^2+C^2}\ \mathrm{Cos}(2\pi nx+\theta) - B$$

ここで，A．B．C．x．K．θは次のようなものである。

$$A = \frac{2w_0}{w_0^2 - w^2} \qquad B = \frac{2w_0[\alpha^2 + (w_0^2 - w^2)]}{[\alpha^2+(w_0-w)^2][\alpha^2+(w_0+w)^2]}$$

$$C = \frac{4w_0 w\alpha}{[\alpha^2+(w_0-w)^2][\alpha^2+(w_0+w)^2]} \qquad \tan\theta = \frac{C}{B}$$

$$x = \frac{w}{w_0} \qquad K = \frac{\alpha}{w_0}$$

これによって$F^2(w,n) = A^2(w,n) + B^2(w,n)$は次のようになる。

$$F^2(w.n) = \left[\frac{2}{w_0}\cdot\frac{2}{1-x^2}\cdot\mathrm{Sin}\ \pi nx\right]^2$$

$$+4\,\frac{(1-e^{-2\pi nk})\left[(1-e^{-2\pi nk}) + \dfrac{2kx\mathrm{Sin}\ 2\pi nx}{1-x^2}\right] - (2\,\mathrm{Sin}\,\pi nx)^2\left\{k^2\dfrac{1-e^{-2\pi nk}}{1-x^2}+1\right\}}{w_0^2[k^2+(1-x)^2][k^2+(1+x)^2]}$$

第一項は無限小の立上り時間の場合のスペクトル項であり，第二項が有限な立上り時間を反映する項である。

ここで$w\to w_0$ 即ち $x\to 1$の場合を試算すると，次のようになる。

$$F^2(w_0,n) = \left[\frac{2\pi n}{w_0}\right]^2 + 4\,\frac{(1-e^{-2\pi nk})[(1-e^{-2\pi nk}) - 2\pi nk]}{w_0^2 k^2(k^2+4)}$$

立上りに要する時間は，およそ$1/\alpha$であるから，立上りまでの振動回数は

$$\frac{1/\alpha}{2\pi/w_0} = 1/2\pi k$$ となる。そこで

$2\pi nk > 1$の場合，即ち立上りのあとでは近似的に，

$$F(w_0,n) \fallingdotseq \left[\frac{2\pi n}{w_0}\right]^2 + \frac{4(1-2\pi nk)}{w_0^2 k^2(k^2+4)}$$ となる。

となり，$F^2(w_0,n)$を小さくする効果となって表われることになる。

ここで，$K \gg 1$ の場合には，第二項は第一項に較べて無視できる程小さいが，$K \ll 1$となると第二項が$F(w_0,n)$を小さくする効果をもたらす。しかしnが増大すれば第一項はn^2で増大するのに対して，第二項はn^1で減少するので，結局第二項は無視できることになる。

声の場合，観測によると，K＝0.0 3の程度にあるので，第二項は近似的に

$$-\frac{2\pi nk - 1}{w_0^2\ k^2}$$

次に$w = w_0$の近傍で考えるために$x = 1 + \triangle x$とすれば

$$F^2(w,n) \fallingdotseq \left[\frac{2\pi n}{w_0}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\ n\pi\triangle x}{n\pi\triangle x}\right]^2 + \frac{1 - 2\pi nk\dfrac{\mathrm{Sin}2\pi n\triangle x}{2\pi n\triangle x}}{w_0^2(k^2+\triangle x^2)}$$

となり　$n\Delta x = \frac{1}{2}$ では第一項に

$1/w_0^2\,(K^2 + \Delta x^2)$ を附加することになり，K＜＜1の場合にはスペクトルのひろがりをもたらす結果となる。

結　　論

以上定性的に考察したところではあるが，立上りのおそい音は基本波成分を減らし，近傍の周波数成分をもち上げ，結果としてピッチを認めにくくするということが云える。

即ち発音初期のふらつきは，音程知覚にあいまいさをもたらすことになる。

ここでもちいた立上り時間の$1/a$は発音体そのものだけでなく聴覚のそれまで含めて考えることができ，もし聴覚が周波数分析的にレスポンスするものであれば，過渡音に対するピッチ感覚を通じて，聴覚の機構についての情報をえる手がかりとなる。

文　　献

(1)　古賀宏　九州大学医療短大部紀要№4，83，1977.