学部生のための「ミクロ・マクロ双対性」とその周辺の物理学講義 : 補講B：行列の固有値分解

成清, 修
九州大学理学部物理学科

https://hdl.handle.net/2324/7420008

出版情報：pp.1-2
バージョン：

学部生のための
「ミクロ・マクロ双対性」
とその周辺の物理学講義

九州大学理学部物理学科　成清 修

補講 B：行列の固有値分解

$n \times n$ 複素行列 A について考える[1]。固有値と固有ベクトルを

$$A|\xi_i\rangle = \lambda_i|\xi_i\rangle \tag{1}$$

のように設定[2]する（$i = 1, 2, 3, \cdots, n$）。

固有値問題が解けて、正規直交系 $\{|\xi_i\rangle\}$ が得られたとすると

$$A = \lambda_1|\xi_1\rangle\langle\xi_1| + \lambda_2|\xi_2\rangle\langle\xi_2| + \lambda_3|\xi_3\rangle\langle\xi_3| \cdots + \lambda_n|\xi_n\rangle\langle\xi_n| \tag{2}$$

のように表現[3]できる（行列の固有値分解）（行列の対角化）。

λ_i が測定値になるようにして A を使おうとすると、すべての λ_i が実数として (2) が成立してほしい。(2) がそのようなもの[4]であるための必要十分条件は、$A^\dagger = A$（エルミート性）である。

一般に、行列の対角化を考えるならば、λ_i は複素数となる。複素数 λ_i に対して (2) のような表現が成立する[5]ための必要十分条件は、$A^\dagger A = AA^\dagger$（正規性）である。

[1]結果のみを記すので、省略された議論については [笠原] などを参照されたし。
[2]固有値が縮退していても、それぞれに異なるラベル i を割り振る。
[3]線型変換と表現行列の関係は [笠原] の 3-2 図のように整理される。
[4]エルミート性があれば、固有値は実数であり、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。縮退した固有値に属する固有空間の中では、シュミットの直交化法により、正規直交基底を用意する。
[5]正規性があれば、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。縮退した固有値については、脚注 4 に同じ。

参考文献

[笠原]

笠原「線型代数と固有値問題」[新装版改訂増補] (現代数学社, 2019).

(2026-04-15)