惑星間隔のTitius-Bode則

成清, 修
九州大学大学院理学研究院物理学部門

惑星間隔のTitius-Bode則

九州大学理学部物理学科　成清 修

ALMA 望遠鏡によって原始惑星系の形成過程が観測できるようになってきています。その現在において、惑星間隔の Titius-Bode 則を論じるための出発点となる、最も単純な流体力学の話を復古紹介します。

はじめに

惑星間隔についての Titius-Bode 則には長い議論の歴史[1]があります。ここで紹介する話は、Titius-Bode 則の理想極限のようなものとなります。

惑星系はいくつかのステージを経て形成されますが、その最初期のガスが優勢な時期に焦点をあてた議論を行います。前段で理想極限と述べたのは、Euler 方程式に基づいて、2 次元回転円板の流体力学を考えることを指します。惑星が形成されるためには、その種を導入する必要がありますが、ここでの議論は種を含んではいません。それでも、ガスに密度波が生じることが示せるので、その密度波における高密度のリング状の領域の間隔が、惑星間隔の Titius-Bode 則に繋がる[2]と期待されます。

以下では、折々に記した 4 つのノートを貼り合わせました。最後に、「おわりに」の節を加えました。第 1 のノートでは、理想極限において成立する、渦度の保存則を Euler 方程式から導きました。第 2 では、渦 Rossby 波の基本的な例題を考え、次のノートへの準備を行いました。第 3 では、White による Titius-Bode 則の導出を紹介しました。ここまでは、渦度の保存則のみを用いる、考え得るかぎり最も単純[3]な議論です。第 4 では、Euler 方程式に立ち返り、重力不安定性からリング間隔を議論しました。

(2026-04-06)

[1]たくさんあるので、ここでその文献を紹介することはしません。また、そもそも、そのような経験則は存在しないという議論もあります。

[2]種から成長した塊の間の相互作用によって、ここで得られる理想的なリング間隔は乱されると言った方が正しいと思われますが。

[3]重力や圧力といった力に関する情報が消去されてしまっています。第 4 のノートでは、力のはたらきについて考察します。

渦度方程式

Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{F} \tag{1}$$

から出発します。

式変形のために、以下のベクトル解析の公式を用います。

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\phi) &= 0 && (2)\\
\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= 0 && (3)\\
\nabla\times(\phi\vec{A}) &= (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi(\nabla\times\vec{A}) && (4)\\
\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} && (5)\\
&+ \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) &&\\
\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} && (6)
\end{aligned}$$

渦度は

$$\vec{\omega} = \nabla\times\vec{V} \tag{7}$$

によって与えられます。(3) 式より、渦度は重要な性質

$$\nabla\cdot\vec{\omega} = 0 \tag{8}$$

をもちます。

(1) 式から

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega} = \vec{X} \tag{9}$$

の形の渦度方程式を導きます。

まず、(4) 式と (2) 式を用いて

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \frac{1}{\rho}\Big(\nabla\times(\nabla p)\Big) = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p \tag{10}$$

であることから、(1) 式の回転をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} = -\nabla\times(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \nabla\times\vec{F} \tag{11}$$

となることがすぐにわかります。

(11) 式の両辺に $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega}$ を加えると、左辺は

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega}=\frac{d}{dt}\vec{\omega} \tag{12}$$

となり、右辺の $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega}-\nabla\times(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$ の変形が残る仕事となります。

$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$ を得るために、(5) 式で $\vec{A}=\vec{B}=\vec{V}$ とおくと

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})-\vec{V}\times\vec{\omega} \tag{13}$$

となります。(13) 式の回転をとって、(2) 式に注意すると

$$\nabla\times(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\nabla\times(\vec{V}\times\vec{\omega}) \tag{14}$$

となります。(14) 式の右辺に (6) 式を用いると

$$\nabla\times(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\vec{V}(\nabla\cdot\vec{\omega})+\vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{V})-(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{V}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega} \tag{15}$$

ですが、(8) 式に注意すると、結局

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega}-\nabla\times(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{V})+(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{V} \tag{16}$$

となります。

以上をまとめると、渦度方程式は

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega}=(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{V}-\vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{V})+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p+\nabla\times\vec{F} \tag{17}$$

となります。右辺の第 1 項は、速度勾配が原因となって渦度の強度および向きが変化する効果、第 2 項は、流体の膨張（収縮）が原因となって渦度の強度が減少（増加）する効果、第 3 項は、密度勾配と圧力勾配が平行でないときに現れるトルクによる渦度生成、第 4 項は、外力のトルクによる渦度生成を表しています。

2 次元の単純な系では、渦度方程式は保存則

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega}=0 \tag{18}$$

となります。((17) 式の右辺の第 1 項は $\vec{V}$ を xy 面内にとれば $\vec{\omega}$ は z 方向となりゼロ。第 2 項は非圧縮ならばゼロ。第 3 項は順圧ならばゼロ。第 4 項は保存力ならばゼロ。)

(2025-10-03)

渦ロスビー波の基本例題

板野による日本気象学会の用語解説 [1] に沿って、渦ロスビー波の基本例題（「ランキン渦上の渦ロスビー波」）を見てみます。

渦ロスビー波の基本的な考え方は、通常のロスビー波と変わるところはないので、[1] の第 1 図 (上) の惑星ロスビー波の例題に即して、通常のロスビー波のまとめを行って、ロスビー波全般に対する感触を得たいと思います。この図の北半球面の適当な部分を xy 平面に投影し、x 軸の正の向きを東、y 軸の正の向きを北とします。惑星の回転による渦度の地面に垂直な成分 f は緯度とともに大きくなるので、y の関数とします。さらに、線形近似として $f = f_0 + \beta y$ とします（f_0 と β は正の定数)。渦度 ω を背景場 f とそれに相対的な渦度 ζ の和として表し：$\omega = f + \zeta$、ω が保存する場合を考えます。保存則：$D\omega/Dt = 0$ は、速度 $\vec{u}$ の x 成分を u、y 成分を v として

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right]\zeta + \beta v = 0 \tag{1}$$

と書けます。

平均として x 方向に流れる速度場を考えることとし、x 方向の平均速度を $\bar{u}$ として、$u = \bar{u} + u'$ とします。y 方向の平均速度は 0 として、$v = v'$ とします。流れの関数 Ψ を用いて、$u' = -\partial\Psi/\partial y$ および $v' = \partial\Psi/\partial x$ と表すことができ、このとき、$\zeta = \partial v'/\partial x - \partial u'/\partial y = \Delta_2\Psi$ となります ($\Delta_2 \equiv (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2$)。$u'$、$v'$、$\zeta$ を微小として、(1) 式を微小量の 1 次の範囲で考え、Ψ について書くと

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta_2\Psi + \beta\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

となります。Ψ として $\Psi = \Psi_0 \exp[i(kx + ly - \nu t)]$ の形で (2) 式の解を探してみると、$(\nu - k\bar{u})(k^2 + l^2) + k\beta = 0$ ならばこの形の解が許されることがわかります。x 方向の位相速度として ν/k を考えると、平均流からのずれは $\nu/k - \bar{u} = -\beta/(k^2 + l^2)$ となり、平均流と逆向きに伝播する（[1] の第 1 図 (上) では白い曲線で図示）ロスビー波の位相速度を表します。

ここで仮定した Ψ の地形（t を固定して x と y の関数として見た）は正弦波の連なりとなっています。

次に、平均の流れが渦状になっている問題を考えます。上記の平均の流れが直線状の場合を通常のロスビー波と呼びましたが、渦状の場合を渦ロスビー波と呼ぶことにします。以下では、[1] で論じられた基本例題である「ランキン渦上の渦ロスビー波」について見てみます。この場合、[1] の第 2 図のように、Ψ の地形は正渦の山と負渦の谷が円周方向に連なったものとなります。

まず、背景に（無限に長い）円柱渦を置きます。円柱の中心軸を z 軸として、円柱座標 (r, θ, z) を用います。中心軸からの距離が a 以下の円柱内部（$r < a$）の渦度が定数 Ω_0 で、円柱外部（$r > a$）の渦度が 0 であるような渦を円柱渦と呼ぶことにします。流れは円形で、r 方向と z 方向の流れはなく、θ 方向の流れの速度を V とします。円形流一般について、渦度 Ω は

$$\Omega = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rV)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + \frac{V}{r} \tag{3}$$

で与えられます（以下の (6) 式と (7) 式を参照）。上記のような円柱渦の渦度を与える速度場は、円柱内部では $V = \Omega_0 r/2$、円柱外部では $V = \Omega_0 a^2/(2r)$ となります。内部流は、角速度が渦度の半分（$\Omega_0/2$）である剛体的回転になっています。外部流は、$r = a$ で内部の値と連続し、外部で rV が定数となって $\Omega = 0$ を導くもの（ポテンシャル渦）となっています。これらを円形流の基礎から論じると長くなる[1]ので、認めて先に進むことにします。

以下では、上記の円柱渦を背景とし、そこに微小変動が加わっている状況を考えます。円柱座標を用いて、速度場を $\vec{u} = (u, v, 0)$、渦度場を $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ とします。微小変動を記述する流れの関数 Ψ を導入すると

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \qquad v = V + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{4}$$

と書けます。勾配は

$$\nabla\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \tag{5}$$

でした。回転は

$$(\nabla \times \vec{A})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \tag{6}$$

[1]外部流の短い説明として：電磁気学のアンペールの法則と同型の関係が成立し、半径 r の円（$r > a$）に沿った循環 $V \cdot 2\pi r$ がこの円内の渦度の総量 $\pi a^2 \Omega_0$ に等しいことから、$V = \Omega_0 a^2/(2r)$ となる。

なので

$$\omega = (\nabla \times \vec{u})_z = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{7}$$

となります。

渦度が保存する場合を考え

$$\frac{D}{Dt}\omega = 0 \tag{8}$$

とします。ラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{9}$$

で与えられます。(8) 式に (7) 式と (9) 式を用い、さらに (4) 式を用いて Ψ についての式として書くと

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(V + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(V + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}\right] = 0 \tag{10}$$

となります。(10) 式のうち Ψ について 1 次の範囲のみ残すと

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\Psi - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + \frac{V}{r}\right] = 0 \tag{11}$$

となります。$\Psi = \psi(r)\exp[i(m\theta - \nu t)]$ とおいて (11) 式を $\psi(r)$ について解きます。(11) 式にこの変数分離形を代入して (3) 式を用いると

$$\left[-i\nu + \frac{V}{r}im\right]\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{m^2}{r^2}\right]\psi - \frac{1}{r}im\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\psi = 0 \tag{12}$$

を得ますが、背景の円柱渦の性質から、$r = a$ 以外では Ω が定数であり、(12) 式の後半部分は 0 となるので、$\psi(r)$ は

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{m^2}{r^2}\right]\psi = 0 \tag{13}$$

から決まることになります。

(13) 式の解を $\psi \propto r^n$ の形で探してみると、$n(n-1) + n - m^2 = 0$ を満たせば解となることがわかります。よって、独立な 2 つの解として、$\psi \propto r^m$ と $\psi \propto r^{-m}$ が得られます。一般解はこれらの線形結合となりますが、原点および無限遠でも $\psi(r)$ が微小量であるという境界条件から、円柱内部では $\psi \propto r^m$、円柱外部では $\psi \propto r^{-m}$ が選ばれます。r 方向の

流速 u は $r=a$ で連続であってほしいので、この境界条件から、円柱の内外の解を接続します。結局、$\psi(r)$ そのものが連続となって、内部では $\psi=c\cdot(r/a)^m$、外部では $\psi=c\cdot(a/r)^m$ となります。

ここまでの結果をまとめて、Ψ の実数部分を $t=0$ において書くと

$$\Psi = c\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm m}\cos(m\theta) \tag{14}$$

となります。指数の $+$ は円柱内、$-$ は円柱外の解を表します。

いちばん簡単な $m=1$ の場合を $z=0$ の面で見てみます。円柱内では、Ψ は $r\cos\theta$ に比例するので、Ψ の等高線は y 軸に平行になります。[1] の第 2 図の円内の等高線がこれにあたります。円外は $\cos\theta/r$ で決まる曲線が等高線となります。今考えている円柱渦では、円周上で渦度に跳びがあるので、流線（等高線）が円周上で滑らかには繋がっていません。この $m=1$ の等高線（流線）図の右半分を見ると、円内に磁性体が存在する場合の磁力線と同様になっています。

次に、[1] の第 2 図で $m=3$ の場合を見てみます[2]。Ψ の地形は正渦の山と負渦の谷が円周方向に連なった 6 個の渦列となります。このようなパターンが、以下で調べる角速度で回転するのが渦ロスビー波ということになります。

より一般的な状況で、渦ロスビー波をスケッチすると、[1] の第 1 図 (下) のようになります。

最後に、$\Psi=\psi(r)\exp[im(\theta-(\nu/m)t)]$ が渦度保存の式の解であるために、ν が満たすべき条件（分散関係）を求めてみます。ここでは、ν/m が角速度となります。(12) 式を書き直すと

$$r\left[-\frac{\nu}{m}+\frac{V}{r}\right]\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{m^2}{r^2}\right]\psi=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\psi \tag{15}$$

となります。(15) 式の右辺は、$r=a$ 以外では、Ω が定数なので 0 となりますが、$r=a$ では跳びがあるので、$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}r$ がデルタ関数となります。(15) 式のうち $r=a$ において特異となる（デルタ関数を含む）部分を書くと

$$a\left[-\frac{\nu}{m}+\frac{\Omega_0}{2}\right]\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2}=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\psi \tag{16}$$

[2] $m=2$ および $m=4$ でも同様ですが、[1] の第 2 図では、これらの θ の取り方が、$m=1$ および $m=3$ の場合と異なっているようです。

となります。右辺が $-c\Omega_0\delta(r-a)$、$\mathrm{d}^2\psi/\mathrm{d}r^2 = -2(cm/a)\delta(r-a)$ である[3]ことから、分散関係は

$$\frac{\nu}{m} - \frac{\Omega_0}{2} = -\frac{1}{m}\frac{\Omega_0}{2} \tag{17}$$

となります。ここに、$\Omega_0/2$ は円柱内の剛体回転の角速度であり、剛体回転に相対的な渦ロスビー波の角速度は $-\Omega_0/(2m)$ となって、通常のロスビー波と同様に、渦ロスビー波も平均流と逆向きに伝播します。この様子を図示したのが、[1] の第 1 図 (下) となります。

参考文献

[1] 板野：天気 57-7 (2010) 81.

(2025-11-28)

[3] $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}r$ の $r \to a$ の値は、円柱内から近づくと cma^{-1}、円柱外から近づくと $-cma^{-1}$ であり、$r = a$ において $-2cma^{-1}$ の跳びがあります。

ジェットストリーム

White 論文 [1, 2] の jet stream について見てみます。記号の用い方は、できるだけ White 論文に忠実に行うようにします。

論の進め方は、渦ロスビー波の場合と全く同じです。2 次元の流体の運動を考え、渦度ベクトルは 2 次元面と垂直になります。速度場を $\vec{V}$ として、運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho^*}\nabla p^* \tag{1}$$

となる場合を考えます。ここに、Φ は重力ポテンシャル、p^* は圧力、ρ^* は密度を表しますが[1]、以下で渦度の時間発展を議論する際には、表立って登場することはありません。

渦度 ζ^* は

$$\zeta^*\hat{z} = \nabla\times\vec{V} \tag{2}$$

で与えられ[2]、保存則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\zeta^* = 0 \tag{3}$$

に従う場合を考えます。時間微分はラグランジュ微分であって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla \tag{4}$$

となります。(3) 式は、流れに沿って一定であるということなので、渦度の波を禁じるものではありません。同様に、非圧縮

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho^* = 0 \tag{5}$$

でも密度の波が存在して構いません。

非圧縮の場合に、$\vec{V}$ のヘルムホルツ分解を考えると、$\nabla\cdot\vec{V} = 0$ なので[3]、適当なベクトル場 $\vec{\psi}^*$ により、速度場は $\vec{V} = \nabla\times\vec{\psi}^*$ と表されます。

---

[1] * は平均とゆらぎに分解するための目印で、平均に $^-$ をつけ、$p^* = \bar{p}+p$ や $\rho^* = \bar{\rho}+\rho$ のように分解します。p や ρ はゆらぎを表します。

[2] $\hat{z}$ は 2 次元面と垂直な単位ベクトル。

[3] 非圧縮の条件

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\rho^* = 0$$

2 次元では、$\vec{\psi}^* \equiv \psi^* \hat{z}$ として、流れの関数 ψ^* の微分によって速度場が表されます。

円柱座標 (r, λ, z) を用いて、動径 r 方向の速度を w、角度 λ 方向の速度を $\bar{u}+u$ とします。すなわち、平均の速度[4]を角度方向の $\bar{u}$ とし、そこからのゆらぎ[5]を u および w としました。このとき、速度場は $\vec{V} = \bar{u}\hat{\lambda} + u\hat{\lambda} + w\hat{r}$ と表されます。ここに、動径方向の単位ベクトルを $\hat{r}$、角度方向の単位ベクトルを $\hat{\lambda}$ としました。流れの関数も平均と揺らぎに分解して、$\psi^* = \bar{\psi} + \psi$ とおくと、[3] の (4) 式において $\Psi = -\psi$ として

$$w = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \qquad u = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{6}$$

となります。渦度も $\zeta^* = \bar{\zeta} + \zeta$ と分解すると、[3] の (6) 式から

$$\zeta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (ru)}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial \lambda}\right] = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}\right] \tag{7}$$

となります。ここに、$\zeta^* = \zeta^*(r, \lambda, t)$ ですが、平均[6]は $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(r)$ とします。[3] では、$\bar{\zeta}$ が動径方向に階段関数となっている場合を考えましたが、以下では $\bar{\zeta}$ が動径方向に滑らかに変化する場合を考えます。

(3) 式の保存則を書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\zeta} + \zeta\right) + \left[\left(\bar{u}\hat{\lambda} + u\hat{\lambda} + w\hat{r}\right) \cdot \nabla\right]\left(\bar{\zeta} + \zeta\right) = 0 \tag{8}$$

となります。(8) 式を、ζ、u、w の 1 次で書くと[7]

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \left(\bar{u}\hat{\lambda} \cdot \nabla\right)\zeta + \left(w\hat{r} \cdot \nabla\right)\bar{\zeta} = 0 \tag{9}$$

と連続の条件

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho^* \vec{V}\right) = 0$$

を両立させるために、$\nabla \cdot \vec{V} = 0$ となります。

[4] λ および t について平均し、$\bar{u} = \bar{u}(r)$ とします。

[5] $u = u(r, \lambda, t)$ および $w = w(r, \lambda, t)$ ですが、これらを λ または t について平均すると 0 とします。

[6] $\zeta^* \hat{z} = \nabla \times \vec{V}$ を $\bar{\zeta}\hat{z} = \nabla \times \bar{u}\hat{\lambda}$ と $\zeta\hat{z} = \nabla \times \left(u\hat{\lambda} + w\hat{r}\right)$ に分解します。

[7] 0 次の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta} + \left(\bar{u}\hat{\lambda} \cdot \nabla\right)\bar{\zeta} = 0$$

ですが、$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(r)$ なので、左辺において $\partial\bar{\zeta}/\partial t = \partial\bar{\zeta}/\partial\lambda = 0$ より等号が成立します。1 次の項のうち、$\left(u\hat{\lambda} \cdot \nabla\right)\bar{\zeta}$ は $\partial\bar{\zeta}/\partial\lambda = 0$ より 0 となります。

となります。

(9) 式において、$\bar{u}$ と $\bar{\zeta}$ が与えられた[8]として、流れの関数 ψ を求めることを考えます。まず、計算を進めるための下ごしらえをいくつか行います。左辺の第 2 項と第 3 項は

$$(\bar{u}\hat{\lambda}\cdot\nabla)\zeta = \frac{\bar{u}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}, \qquad (w\hat{r}\cdot\nabla)\bar{\zeta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}r} \tag{10}$$

となります。ζ を ψ で表して、左辺の第 1 項は

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] \tag{11}$$

であり、同様に (10) 式に

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\zeta = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right] \tag{12}$$

を用います。これで、(9) 式から ψ を求める準備ができました。

ψ を変数分離して

$$\psi = X(r)\cos(m\lambda - \nu t) \tag{13}$$

のように仮定し、動径のみに依存した関数 $X(r)$ を探す問題に帰着させます。ただし、m は整数とします。(13) 式を (9) 式に代入して計算すると

$$-m\sin(m\lambda-\nu t)\left\{\left(\frac{\nu}{m}-\frac{\bar{u}}{r}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-\frac{m^2}{r^2}\right]+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}r}\right\}X = 0 \tag{14}$$

を得ます。よって、$X(r)$ が

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{R^2-m^2}{r^2}\right]X = 0 \tag{15}$$

を満たせば、(13) 式の形の解が存在します。ここに

$$R^2 = r\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\nu}{m}-\frac{\bar{u}}{r}\right)^{-1} \tag{16}$$

としました。

[3] において、平均場（背景場）のモデルとしてランキン渦を考えましたが、ここでは、(16) 式において R^2 が定数となるモデルを考え、平均速

[8] $\bar{\zeta}\hat{z} = \nabla\times\bar{u}\hat{\lambda}$ なので、$\bar{u}$ が与えられた問題になります。

度 $\bar{u}$ を決定します。ただし、以下の議論を見ればわかるように、$R^2 > 1$ とします。$\bar{u}$ によって決まる $\bar{\zeta}$ は [3] の (3) 式のように

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\bar{u})}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\bar{u} \tag{17}$$

であり

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\bar{u} \tag{18}$$

となります。これを用いて (16) 式を書き直すと

$$R^2\frac{\nu}{m} = r\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}r} + \frac{\bar{l}^2}{r}\bar{u} \tag{19}$$

となります。ここに、$\bar{l}^2 = R^2 - 1$ としました。

$\bar{u}$ の形を

$$\bar{u}(r) = r\omega_0 + \bar{A}\cos\big(f(r)\big) \tag{20}$$

と仮定して、$f(r)$ を探してみます。ただし、ω_0 と $\bar{A}$ は定数とします。(19) 式の両辺の定数項が等しいことから

$$\frac{\nu}{m} - \omega_0 = -\frac{1}{R^2}\omega_0 \tag{21}$$

を得ます。これは、[3] の (17) 式と同様に、ゆらぎの波が背景場と逆向きに進むことを示します。$Y(r) = \cos\big(f(r)\big)$ とおいて[9]、(19) 式の定数項以外について

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}r} + \frac{\bar{l}^2}{r^2}Y \tag{22}$$

の関係が成り立ちます。この式を $f(r)$ について書くと

$$0 = -\cos f\cdot\big(f'\big)^2 - \sin f\cdot f'' - \frac{1}{r}\sin f\cdot f' + \frac{\bar{l}^2}{r^2}\cos f \tag{23}$$

となります。$\cos f$ の項から、$\big(f'\big)^2 = \bar{l}^2/r^2$ が要求され、$\sin f$ の項から、$f'' = -f'/r$ が要求されますが、$f' = \bar{l}/r$ ならば両方の要求を満たすので、この最後の条件を満たすように

$$f(r) = \bar{l}\log r + c \equiv \bar{l}\log\frac{r}{a} \tag{24}$$

と決まります。積分定数 c ないし a は、必要があれば後から決めることにします。

[9] 一般解は、$Y(r) = C_1\cos\big(f(r)\big) + C_2\sin\big(f(r)\big)$ のようになります。

R^2 が定数となる背景場モデルの平均速度 $\bar{u}$ が、(20) 式と (24) 式で表されることがわかりましたが、(15) 式はモデルのパラメータ R^2 の値しか必要としないので、$\bar{u}$ を決める議論とは独立に X を決めることができます。$R^2 > m^2$ として、$R^2 - m^2 \equiv l^2$ とおいて (15) 式を書き直すと

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r} + \frac{l^2}{r^2}X = 0 \tag{25}$$

となり、(22) 式と同じ形[10]になります。よって、特解として

$$X(r) = A\cos\big(l\log(r/a)\big) \tag{26}$$

が得られます。

重要な結果として、$\log(r/a)$ という動径方向の依存性を得ました。この依存性と惑星間隔の Bode 則の関係は次回以降に考察を行います。

White の用語では、$\bar{u}$ の構造を jet stream、ψ の構造を vortex wave と言っています。

これまで、個々の特解について議論してきました。(13) 式の形の流れの関数は、[3] の (14) 式と同様に円周に沿った渦度の山と谷の地形を与えます。

最後に、特解の重ね合わせがスパイラル状の流線を与えることを見てみます。簡単のため、$t = 0$ および $m = 1$ とすると、(13) 式は $X(r)\cos\lambda$ となりますが、$X(r)\cos\lambda$ も特解たりえます。また、(26) 式の代わりに $X(r) = A\sin\big(l\log(r/a)\big)$ としても特解となります。重ね合わせ：$\sin\big(l\log(r/a)\big)\cdot\cos\lambda + \cos\big(l\log(r/a)\big)\cdot\sin\lambda$ も解であり、[2] の (30) 式で考えているのは、この解となります。このとき、$\sin\big(l\log(r/a)+\lambda\big)$ の値が一定となるのが流線（流れの関数の等高線）であり、動径を角度の関数として表すと、パラメータ α ごとに、$r/a = \exp\big[(\alpha-\lambda)/l\big]$ となります。[2] の Fig. 2 に流線が図示されています。

[10] (25) 式を [3] の (13) 式と比べると、左辺の第 3 項の符号が逆の場合となっています。

参考文献

[1] White：Nature Physical Science 238 (1972) 104.

[2] White：Astrophysics and Space Science 16 (1972) 295.

[3] 渦ロスビー波の基本例題

(2025-12-25)

密度波

White 論文の重要な結果は、$\log r$ 依存性の発見でした。しかし、そこでの議論[1]からは α の値[2]を決めることができません。ここでは、α の値を Jeans に始まる重力不安定性の理論[3]から導きます[4]。

Jeans 不安定性

密度 ρ_0 の一様なガスを考えます。これに $\delta\rho$ のゆらぎが生じて、密度が $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ となった場合に、ゆらぎが一様な状態を不安定化する条件を求めます。

ガスの各構成要素間にはたらく重力を考えると、引力によって密度の高いゆらぎ領域が増幅することが予想されます。他方、ガスの圧力はゆらぎをならして一様な状態にもどそうとします。重力が圧力に勝つと一様な状態は不安定化します。

この不安定化を論じるための基本方程式系として、連続の式、運動方程式[5]、重力ポテンシャル Φ の Poisson 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{3}$$

を用います[6]。

[1]渦度保存のみの議論でした。今回は運動方程式にもどって、力のはたらきを見てみます。

[2]物理量の密度波ができた場合に、動径方向の隣り合う高密度の位置が r_n と r_{n+1} のとき、$\alpha = r_{n+1}/r_n$ とします。

[3]重力（引力）と圧力（斥力）の競合の問題です。

[4][1] の Chapter 10 の議論を抜粋します。

[5][1] の Chapter 10 の議論のように、粘性項のない運動方程式を用います。希薄ガスを対象としているので、分子粘性は無視できます。状況によっては、乱流粘性を考慮する必要がありますが、ここでの議論は、定常解のまわりのゆらぎが線形の範囲に留まっており、非線形の乱流効果は考慮していません。

[6][2] の第 3 章の議論のように、位置ベクトル $\vec{r}$ をスケール因子 $a(t)$ を導入して、$\vec{r} = a(t)\vec{x}$ と書き、$\vec{x}$ を共動座標での位置と呼ぶことにします。共動座標を用いて Poisson 方程式を書くと、$\Delta\Phi = 4\pi G\delta\rho$ となり、重力ポテンシャルの空間変化（$\Delta\Phi$）は、ゆらぎ（$\delta\rho$）によってつくられ、背景（ρ_0）は無関係という自然な結果が導かれます。背景（ρ_0, p_0）は Friedman 方程式（$\ddot{a}/a = -(4\pi G/3)(\rho_0 + 3p_0/c^2)$）のように、スケールの変化に吸収されます。以下の議論は、共動座標を用いて行っていることにします。

以下では、ゆらぎの線形の範囲で考えます。速度のゆらぎを $\vec{u}$ として、$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ と書くと、$\vec{v}_0$ は一様状態に対するものなので、$\vec{v}_0 = 0$ となります。圧力を $p = p_0 + \delta p$ と書いて、δp は $\delta\rho$ に比例するものとします。すなわち、音速を c_{s} として $\delta p = c_{\mathrm{s}}^2 \delta\rho$ とします。重力ポテンシャルも $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$ と書くと、一様な状態では、Φ_0 は定数であり、$\Delta\Phi_0 = 0$ となります[7]。

線形化した基本方程式系は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \rho_0(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} = -\nabla(\delta\Phi) - \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{\rho_0}\nabla(\delta\rho) \tag{5}$$

$$\Delta(\delta\Phi) = 4\pi G(\delta\rho) \tag{6}$$

となります。(4), (5), (6) から $\vec{u}$ と $\delta\Phi$ を消去して $\delta\rho$ が満たす式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta\rho) = c_{\mathrm{s}}^2 \Delta(\delta\rho) + 4\pi G\rho_0(\delta\rho) \tag{7}$$

を得ます。

平面波 $\delta\rho \propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ が (7) の解となるとき、分散関係

$$\omega^2 = c_{\mathrm{s}}^2 k^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{8}$$

が要求されます（$k = |\vec{k}|$）。$\omega^2 < 0$ ならば、ゆらぎが増大して不安定となります。

ここまでは 3 次元空間の議論でした。2 次元平面で同じ議論を行うと、分散関係

$$\omega^2 = c_{\mathrm{s}}^2 k^2 - 2\pi G\sigma k \tag{9}$$

が得られます [1]。ここに、σ は単位面積あたりの質量です。ゆらぎが増大して不安定となる際に、波数 $k = \pi G\sigma / c_{\mathrm{s}}^2$ のゆらぎが最も大きく成長するので、間隔 $\lambda = 2c_{\mathrm{s}}^2 / G\sigma$ で密度が大きくなった帯が発生します [1]。

Toomre 不安定性

回転円板（角速度 Ω）で同じ議論[8]を行うと、分散関係

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_{\mathrm{s}}^2 k^2 - 2\pi G\sigma k \tag{10}$$

[7] 脚注 3 で述べた事情により、$\Delta\Phi_0 = 4\pi G\rho_0$ は成り立ちません。

[8] 正確に言えば、局所的には、κ, c_{s}, σ を定数と見做して、平面波解で近似する議論ということになります。

が得られます [1]。ここに、κ は

$$\kappa^2 = 2\Omega\left(2\Omega + r\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right) \tag{11}$$

によって与えられるエピサイクリック振動数[9]です。

軸対称性を破る（$m \neq 0$）スパイラル波の場合は

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 + c_\mathrm{s}^2 k^2 - 2\pi G\sigma k \tag{12}$$

となります [1]。

Willerding 近似

Willerding は [3] で α の値を評価しました。以下では、その議論を劣化させて（結果をカンニングしながらのこじつけを）紹介します。

(10) の導出を局所平面波近似で行いました。そこでは波を $\exp(ikr)$ で表現しましたが、k の r 依存性を残すと、

$$\exp\left(i\int^r k(r')\mathrm{d}r'\right) \tag{13}$$

となります。密度波ができたとして、隣り合う高密度の位置（r_n と r_{n+1}）は

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} k(r')\mathrm{d}r' = 2\pi \tag{14}$$

によって関係づけられます。

(10) から k の r 依存性を決めますが、ほぼ定常の状態を考えて

$$0 = \kappa^2 + c_\mathrm{s}^2 k^2 - 2\pi G\sigma k \tag{15}$$

で近似します。(9) で見つけた波数 $k = \pi G\sigma/c_\mathrm{s}^2$ においては、$c_\mathrm{s}^2 k^2 - 2\pi G\sigma k = -c_\mathrm{s}^2 k^2$ なので、

$$\kappa^2 = c_\mathrm{s}^2 k^2 \tag{16}$$

[9] 意味は [1] の図 10.7 に示されています。角運動量との関係が見えるように書くと $\kappa^2 = \dfrac{2\Omega}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\Omega)$ となります。また、剪断との関係が見えるように書くと $\kappa^2 = (2\Omega)^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\log\Omega}{\mathrm{d}\log r}\right)$ となります。

と近似します。さらに、ガスの運動を Kepler 回転[10]で近似すると、$\kappa = \Omega$ なので

$$k = \frac{\Omega}{c_{\rm s}} \tag{17}$$

となります。Kepler 回転による速さを $v_{\rm K} = \Omega r$ と書くと

$$k(r) = \frac{v_{\rm K}}{c_{\rm s}} \frac{1}{r} \tag{18}$$

が得られます。ここに、$v_{\rm K}$ と $c_{\rm s}$ は r に依存しますが、(14) の積分においては、定数と見做す近似を用います。(18) を (14) に用いて

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \exp\left(2\pi \frac{c_{\rm s}}{v_{\rm K}}\right) \tag{19}$$

を得ます[11]。

参考文献

[1] 福江・和田・梅村:「宇宙流体力学の基礎 [改訂版]」(日本評論社, 2022)

[2] 二間瀬・池内・千葉:「宇宙論 II [第 2 版]」(日本評論社, 2019)

[3] Willerding:Planet. Space Sci. 43 (1995) 283.

(2026-04-02)

[10] 円板の中心に大質量 M の質点があるとして、$\Omega = (GM/r^3)^{1/2}$ の場合を考えます。

[11] White の記法では、$\bar{l}(\log r_{n+1} - \log r_n) = 2\pi$ となる無次元量 $\bar{l}$ を次元解析で決めたことに相当します($\alpha = \exp(2\pi/\bar{l})$)。重力と圧力を代表する速さの $v_{\rm K}$ と $c_{\rm s}$ を用いて、数因子を 1 とすれば $\bar{l} = v_{\rm K}/c_{\rm s}$ となりますが、[3] では、数因子を 2 と評価しています。

おわりに

White 論文や Willerding 論文では具体的なモデルに基づいて $\log r$ 依存性を見つけ Titius-Bode 則

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \exp\left(2\pi\frac{c_\mathrm{s}}{v_\mathrm{K}}\right) \tag{1}$$

を導きました。

後に、Graner と Dubrulle[1] は、$\log r$ 依存性はスケール不変性の反映であることを指摘しました。確かに、Kepler 回転している系の動径方向の依存性は冪的になるので、物理量 A は動径（r）に

$$A(r) = r^\alpha \tag{2}$$

のように依存するはずです。冪関数はスケール不変性の表現となっています。(2) を指数関数を用いて書き直すと

$$A(r) = \exp(\alpha \log r) \tag{3}$$

となります。α が純虚数 ik のとき

$$A(r) = \exp(ik \log r) \tag{4}$$

となりますが、これは、重力不安定性の議論で頻出した局所平面波 $\exp(ikr)$ を (4) に変更することを示しており、Willerding の結果の劣化説明で行ったことに相当します。

Kepler 回転のもとでは、連続的なスケール不変性が成立しますが、(1) の関係は、それが破れて離散的になったものです。この連続的な不変性の破れは、重力不安定性によるというのが Willerding 論文の内容でした。Dubrulle と Graner[2] も具体的なモデルを用いて類似の議論を行っています。

ここまでの議論は、ガス円板についてのもので、惑星の種はまだ導入されていません。White 論文では、定性的に種を導入した後の推論が行われていますが、例えば、[3] では具体的な計算が行われています。ガスとダストの 2 成分系の計算は、その他にもたくさん行われてきています。

White 論文および Willerding 論文は、Titius-Bode 則の理想極限を議論したものと考えられます。そこで見出された密度波を母体[1]として惑星形成が進むので、惑星間隔は (1) に近い[2]ものになると期待されます。

参考文献

[1] Graner, Dubrulle：Astron. Astrophys. 282 (1994) 262.

[2] Dubrulle, Graner：Astron. Astrophys. 282 (1994) 269.

[3] Tanga, Babiano, Dubrulle, Provenzale：ICARUS 121 (1996) 158.

(2026-04-07)

[1] [3] の (20) がそれにあたります。FIG.1 に図示されています。

[2]「はじめに」において述べたように、惑星の種の間の相互作用によって、理想極限からずれたものが実際に観測される惑星系になると思われます。