

課題協学科目における数学アクティブラーニングの 実践例

斎藤, 新悟
九州大学基幹教育院

<https://doi.org/10.15017/7405173>

出版情報 : 基幹教育紀要. 12, pp.113-121, 2026-02-20. Faculty of Arts and Science, Kyushu University
バージョン :
権利関係 :



課題協学科目における数学アクティブラーニングの実践例

斎藤 新悟

九州大学基幹教育院, 〒819-0395 福岡市西区元岡 744

A Case Study of Active Learning in Mathematics in Courses of Interdisciplinary Collaborative Learning of Social Issues

Shingo SAITO

Faculty of Arts and Science, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

E-mail: ssaito@arts.kyushu-u.ac.jp

Received Oct. 31, 2025; Revised Dec. 8, 2025; Accepted Dec. 10, 2025

Between the academic years 2014 and 2024, Interdisciplinary Collaborative Learning of Social Issues was a compulsory, problem-based learning course for all first-year undergraduate students at Kyushu University. As a mathematics educator who taught this course almost every year, I present several examples of mathematical activities that I implemented in the course. These examples illustrate how active learning can be effectively integrated into mathematics classes involving students from diverse academic backgrounds and may serve as useful references for other mathematics educators teaching in similar contexts.

1. はじめに

課題協学科目は、2014 年度から 2024 年度まで九州大学で行われた PBL 型の授業であり、全学部 1 年生の必修科目である。課題協学科目の構成の詳細は九州大学基幹教育院次世代型大学教育開発センター編の書籍¹および古屋謙治氏、大河内豊氏、島田敬士氏、田中岳氏、野瀬健氏、山形伸二氏の論文²に譲り、ここでは、授業のメインの部分で学部・学科混成の 50 人ほどからなるクラスに対して 2 コマ連続（計 180 分）の授業を 1 人の教員が 4 回行うということだけ述べておく。

筆者は課題協学科目開始時からほぼ毎年課題協学科目を担当し、数学の内容に踏み込んだ授業を行ってきた。クラスが学部・学科混成であることから、学生の数学の習熟度はさまざまであり、数学が苦手な学生も楽しめ、数学が得意な学生も退屈しないような題材を探すのは難しく、うまくいかなかった授業も少なくない。また、課題協学科目では、共通の教室テーマの下に専門分野の異なる 3 名の教員が協学課題を設定して授業を行うため、他分野と共通点を持つ題材である必要がある（過去の事例としては、「つながりを知る」という教室テーマに対して「つながりの数理」という協学課題で位相幾何学を扱った。他の 2 人の教員は「人のつながり」、「生き物のつながり」という協学課題で授業を行った）。本稿では、筆者が課題協学科目で扱った題材の中から、比較的成功して何度か実施したものを選んで解説する。同様の授業を担当しており、題材を探している教員の参考に

なれば幸いである。

なお、課題協学科目の授業は定義・定理・証明型の授業ではないため、大まかな理解を優先して、必ずしも厳密ではない表現を用いて授業を進めることも多い。本稿でも数学的な厳密さに欠ける表現を用いることがあるため、厳密な主張を知りたい場合は必要に応じて専門書等を参照されたい。

2. 班活動を始める前に

私が担当する課題協学科目の授業では、九州大学基幹教育院次世代型大学教育開発センター編の書籍¹⁾の p. 81 で示されている方針に従い、50 人ほどの学生を 4～5 人からなる 12 個の班に分け、各班には文科系学部²⁾の学生と理科系学部の学生の両方が所属するようにしている。ただし、1 年生の段階では学部・学科よりも入学前の数学の学習経験の方が数学の習熟度に影響するであろうことから、文科系・理科系の分類は一般選抜（前期日程）での数学の出題範囲に応じたものとしており、共創学部および医学部保健学科看護学専攻は文科系、経済学部経済工学科は理科系とみなして班分けを行っている。

また、数学が得意な人と苦手な人が共存する班で心理的安全性の高い空間を作るために、数学が得意な人は単独で課題を進めずに周りの人に積極的に教えるように指導し（教えることでより理解が深まることもある）、数学が苦手な人は分からないときでも積極的に発言・質問するように指導している。また、数学的に誤ったコメントをしても問題ないこと、誤りを指摘しても問題ないが人格を否定するようなことは言わないことに留意するように伝えている。

3. 位相幾何学に関する題材

本節では位相幾何学に関する題材をいくつか紹介する。筆者の課題協学科目での経験では、位相幾何学に関する題材で行った授業が最も成功したように感じている。実際の授業における大まかな時間配分は、第 1 回が握手の補題（90 分）および Sperner の補題（90 分）、第 2 回が Euler の多面体定理（180 分）、第 3 回が 4 色定理（180 分）、第 4 回が Möbius の帯の切断（90 分）および教場レポートの執筆（90 分）である。

3.1. 握手の補題

握手の補題の主張は、（無向）グラフの頂点の次数の総和が辺の数の 2 倍に等しいというものである。有向グラフにおいては、入次数の総和と出次数の総和がいずれも辺の数に等しいという主張になる。

授業では、「〇〇な人」という形の条件が 10 個書かれたワークシートを配付し、教室の中で条件に当てはまる人を探してその人に名前を書いてもらう。過去に用いた条件の例は、「福岡市西区に住んでいる人」、「文学部の人」、「名前に「大」が入っている人」などである。少なくともクラスの 1 割程度の学生が満たすと予想される条件を採用している（学部や名前に関しては事前に名簿で確認している）。また、「数学が好きな人」のように条件に当てはまるかどうかは客観的に判別できないものも入れており、当てはまるかどうかは自己判断でよいという指示を出している。お互いに名

前や好きなものを聞くきっかけになることから、アイスブレイクとして用いている。

その後、クラス全体で、名前を書いてもらった人数の総和と名前を書いた回数の総和が等しいことを確認し、握手の補題の主張を述べる。

3.2. Sperner の補題

三角形の边上および内部にいくつかの点を取り、それらをうまくつないで元の三角形を小三角形に分割し、小三角形の各頂点に 1, 2, 3 のいずれかの番号をつける (図 1)。ただし、元の三角形の頂点には反時計回りに 1, 2, 3 の番号をつけ、元の三角形の边上にある頂点には、その辺の両端の番号のどちらかをつける。このとき、頂点に 1, 2, 3 の番号がついた小三角形が少なくとも 1 つ存在するというのが (2 次元の場合の) Sperner の補題である。

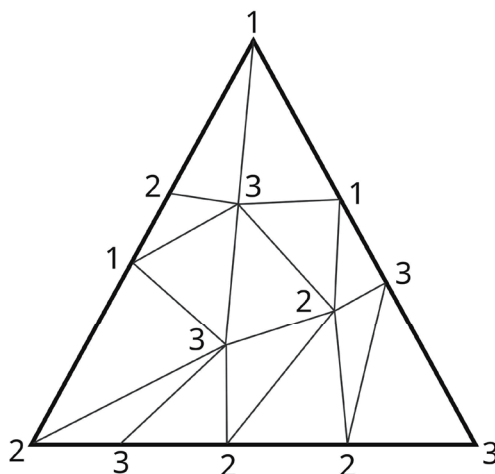


図 1 Sperner の補題

授業では、まずいろいろな場合の図を描いて頂点に 1, 2, 3 の番号がついた小三角形が存在するかどうかを調べてもらう。だんだんと、そのような小三角形が必ず存在し、しかも個数が必ず奇数になることに気づいていく。そのあたりのタイミングで、反時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形と時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形を区別して考えてみるように声掛けを行うと、反時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形の個数がつねに時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形の個数より 1 だけ大きいことに次第に気づいていく (このことから、反時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形が必ず存在することが従い、また、反時計回り与时計回りを区別しないときは 1, 2, 3 の番号がついた小三角形の個数が奇数であることも従う)。

最後に、このことを次の手順で証明する。ただし、三角形の頂点、辺と区別するために、証明中で構成する有向グラフについては【頂点】、【辺】と記載する。

- 各小三角形および元の三角形の外側の領域を【頂点】とする有向グラフを考える。
- 【頂点】A から【頂点】B に向かう【辺】が存在するのは、対応する領域が辺を共有し、A から B へと辺を横切るときに、「辺の両端につけられた番号が 1, 2 で 1 を右側に見る」、「辺の

両端につけられた番号が 2, 3 で 2 を右側に見る」、「辺の両端につけられた番号が 3, 1 で 3 を右側に見る」のいずれかが起こる場合とする。

- このとき、反時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形に対応する【頂点】では入次数が 0、出次数が 3 であり、時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形に対応する【頂点】では入次数が 3、出次数が 0 である。またそれ以外の小三角形に対応する【頂点】では入次数と出次数は等しい。また、外側の領域に対応する【頂点】では、入次数は出次数より 3 だけ大きい。
- 以上より、握手の補題を用いると、反時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形の個数が時計回りに 1, 2, 3 の番号がついた小三角形の個数より 1 だけ大きいことが従う。

3.3. Euler の多面体定理

Euler の多面体定理とは、穴の空いていない多面体について、頂点、辺、面の数をそれぞれ v , e , f とおくと $v - e + f = 2$ が成り立つという定理である。平成 21 年 3 月告示の高等学校学習指導要領解説数学編³の数学 A の項には「多面体に関する基本的な性質としては、オイラーの定理を用いて正多面体が 5 種類しかないことを扱うことなどが考えられる。」という記述があるために、Euler の多面体定理をすでに知っている学生は多いが、穴の空いた多面体に対しては成立しないことを知っている学生は少なく、穴が n 個の多面体に対して $v - e + f = 2 - 2n$ が成立することを知っている学生はほとんどいない。

授業では、まず 5 種類の正多面体および切頂 20 面体（サッカーボール）の写真を見せて、頂点、辺、面の数を求めてもらった後に（写真には裏側が写っていないので、裏側を想像して計算する必要がある）、東京書籍のポリドロン⁴という教具を用いて正多面体と切頂 20 面体を作り、実際に頂点、辺、面の数を数えてもらう。これらすべての多面体で $v - e + f = 2$ が成立することを確認した後、Euler の多面体定理の主張を述べる。

次に、ビーチボールを配付し、班ごとに多角形分割を行って頂点、辺、面の数を数えてもらって、やはり $v - e + f = 2$ が成立することを確認する。正確に数えてもらうためには、3 色のシールを配付して、数え終わった頂点、辺、面にシールを貼っていってもらうのが効果的である。

そして、穴の空いた多面体の例を挙げて Euler の多面体定理が成立しないことを見た後、浮き輪を多角形分割して頂点、辺、面の数を数えてもらい、 $v - e + f = 0$ が成立することを確認する。

最後に、穴が n 個の多面体に対しては $v - e + f = 2 - 2n$ が成立するという定理を述べ、次の手順で証明する：

- 特定の多角形分割に対して $v - e + f = 2 - 2n$ が成立することを確認する。
- 任意の 2 つの多角形分割 A , B に対して $v - e + f$ が等しいことを証明すればよい。多角形分割 A , B を重ねて得られる多角形分割 C （重ねたものが多角形分割にならない場合は A , B を少しずらしておく）を考えると、 A , C に対して $v - e + f$ が等しいことを証明すればよい。
- A に、「辺上に頂点を付け加える」（頂点、辺が 1 ずつ増加）、「面上に頂点を付け加え、別の頂点と辺で結ぶ」（頂点、辺が 1 ずつ増加）、「既存の 2 頂点を辺で結ぶ」（辺、面が 1 ずつ増加）の 3 つの操作を繰り返すことで C に到達でき、これらの操作で $v - e + f$ の値は変わらないので、 A , C に対して $v - e + f$ の値は等しいことが分かる。

Euler の多面体定理を用いて、正多面体が 5 種類しかないと証明することができる（各面が正 m 角形で、各頂点に n 個の面が集まるとすると、 $mf = 2e = nv$ なので、 $v - e + f = 2$ より、 $(m/n - m/2 + 1)f = 2$ となり、カッコ内が正であることから m, n の候補が絞られる）。

次節で述べる 6 色定理の証明のため、3 個以上の頂点を持つ単純連結グラフが平面的ならば $e \leq 3v - 6$ が成立することを証明しておく（外側も含めた領域の数を f とおくと、 $v - e + f = 2$ および $3f \leq 2e$ が成立することから従う）。

3.4.4 色定理

4 色定理とは、平面上のいかなる地図も、隣り合う領域が異なる色になるように 4 色で塗り分け可能であるという定理である。いかなる地図も 4 色で塗り分け可能であることが証明されてはいるが、実際に与えられた地図を 4 色で塗り分けるのは必ずしも容易ではない。実際、McGregor の地図⁵と呼ばれる地図を 4 色で塗り分けるのは容易ではなく、Martin Gardner はエイプリルフールのジョークとしてこの地図が 4 色で塗り分け不可能であると述べている⁶。

授業では、まず個人ワークとして、15 分間で McGregor の地図をできるだけ少ない色で塗り分けてもらう。経験上、50 人ほどのクラスで数人が 4 色での塗り分けに成功する。次に、班でできるだけ多くの色が必要そうな地図を描いてもらい、別の班と地図を交換してできるだけ少ない色で塗り分ける。このワークにより、4 色で塗り分けるのが難しい地図を作ることも容易ではないことが体験できる（班によっては、2 色で塗り分け可能な地図を作ってしまうこともある）。なお、これらのワークをする際には、色覚多様性に配慮するように学生に伝えることが必要である。

その後、4 色定理の主張と簡単な歴史（1852 年に Guthrie が予想し、1977 年に Appel と Haken がコンピュータを用いた証明を出版）について述べ、次の手順で 6 色定理を証明する：

- 領域の個数に関する帰納法を用いる。
- 隣接する領域が 5 個以下の領域が存在することを証明すればよい。
- 双対グラフの頂点の数を v とし、辺の数を e とすると、双対グラフは平面的なので $e \leq 3v - 6 < 3v$ であることが分かる。
- よって $2e/v < 6$ であり、左辺は双対グラフの平均次数なので、双対グラフには次数が 5 以下の頂点が存在する。
- これは、隣接する領域が 5 個以下の領域が存在することを示している。

3.5. Möbius の帯の切断

Möbius の帯とは、図 2 のように長方形の帯を 180° ひねって貼り合わせることで得られる曲面である。



図2 Möbius の帯

Möbius の帯を中央に沿って切ると大きな 1 つの（ひねられた）帯ができる。授業では、条件をいろいろと変えて（例えば Möbius の帯よりさらにひねった帯を中央で切るとどうなるか、Möbius の帯を 3 等分した線で切るとどうなるか、図 3 のように 2 つの Möbius の帯を貼り合わせてどちらも中央で切るとどうなるか）実験をしてもらう。比較的大きな紙（A3 用紙以上）を用意しておくとも実験がやりやすい。また、切ってできた帯のひねり数を数えるときには、 180° ひねりを 1 回と数えるか、 360° ひねりを 1 回と数えるかを統一しておく、班の結果を確認しやすくなる。



図3 2 つの Möbius の帯を貼り合わせたもの

なお、この題材は、伊藤仁一氏、田中麻綾氏、堀内菜智氏の論文⁷によって詳細にまとめられている。

4. その他の題材

この節では、前節で述べた位相幾何学以外の題材をいくつか紹介する。

4.1. Josephus の問題

n を正の整数とする。 n 人に円形に立ってもらい、1 番から n 番まで順に番号をつける。1 番の人を飛ばして 2 番の人を座らせ、3 番の人を飛ばして 4 番の人を座らせ、……というように、立っている人の中で順に 1 人を飛ばして次の人を座らせるという操作を続けていき、最後に残る人の番号を a_n とおく。この a_n を求めるというのが Josephus の問題である。

授業では、まず学生全員に名前の順に円形に並んでもらう（このときお互いに名前を聞きあう必要があるため、他の学生の名前を知るきっかけになり、アイスブレイクとして有用である）。1番から順に番号をつけ、上で述べたルールに従って座っていったら最後は何番の人が残るかを実験する。

その後、班に分かれて a_n を求める問題を考えてもらう。 n が小さな場合から実験すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

のような表が得られるため、明らかにパターンが分かる。学生の中には、

$$a_n = 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 1$$

という式に到達する人もいる（実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す）が、証明ができる学生はほとんどいない。

多くの班がパターンを見つけたタイミングで、次のような証明を解説する：

- n が2の累乗の場合は $a_n = 1$ であることを帰納的に確認する。
- 一般の場合は、 $2^k \leq n < 2^{k+1}$ を満たす非負整数 k を取り（ $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ ）、1週目で $n - 2^k$ 人が座った段階を考えると、残りの人数は 2^k 人なので、最後に座った $2(n - 2^k)$ 番の次の人である $2(n - 2^k) + 1$ 番の人が最後に残る。よって $a_n = 2(n - 2^k) + 1$ である。

別の方法としては、最初の1周が終わった段階を考えることにより、

$$a_{2n} = 2a_n - 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n + 1$$

という漸化式が得られるので、帰納的に a_n を求めることもできる。

4.2. 組合せゲーム

組合せゲームにはさまざまな種類があるが、ここでは最も基本的なニムと呼ばれる石取りゲームについて述べる。さまざまな拡張の詳細については、一松信氏の書籍⁸、佐藤文広氏の書籍⁹、安福智明氏、坂井公氏、末續鴻輝氏の書籍¹⁰を参照してほしい。

3枚のお皿の上におはじきがそれぞれ l 個、 m 個、 n 個置かれており、2人の人が交互におはじきを取っていく。1枚のお皿からは何枚取ってもよいが、2枚以上のお皿から同時に取ることはできないものとし、おはじきがなくなって取れなくなった人が負けとする。このとき、 $l \oplus m \oplus n = 0$ のときは後手必勝であり、それ以外のときは先手必勝であることが知られている（証明は前述の書籍を参照）。ここで非負整数 a, b に対して、 a, b を2進法で表して桁ごとに mod 2 で和を取って得られる非負整数を $a \oplus b$ と書く。

授業では小さな場合から実験してもらい、次第に l, m を固定したときに後手必勝となる n を調べるように誘導していく。表を書いてみると、2の累乗がキーになった法則性に気づいていく学生も多い。

ニムのような石取りゲームとは異なる組合せゲームとしては、チョンプというゲームを授業で扱ったことがある。 m, n を正の整数とし、 $m \times n$ に分かれた板チョコを2人で交互に食べる。ただし、食べるときは1つのブロックを選んで、そのブロックおよびその右・上・右上にあるブロックをすべて食べるものとし、左下の1個だけが毒入りでそれを食べた人が負けとする。このゲームは

$(m, n) \neq (1, 1)$ の場合はすべて先手必勝であることを次のように証明することができる：後手必勝であると仮定すると、先手が最初に右上 1 個だけを食べたときの後手の行動を先手が最初からとることによって先手が勝つことができるので矛盾である。このような論法は戦略拝借と呼ばれる。授業では、 m, n が小さい場合から考えてもらい、 $(m, n) \neq (1, 1)$ の場合がすべて先手必勝であることを予想できた段階で上の証明を述べる。

4.3. 帽子パズル

帽子パズルにはさまざまなバリエーションがあるが、ここでは次のようなものを考える。赤・黒の帽子がどちらもたくさんあり、 n 人の参加者がそれぞれどちらかの色の帽子をかぶせられる。自分以外の人の帽子の色は分かるが、自分の帽子の色は分からない。各参加者は同時に赤・黒のどちらかの色を答え、自分の帽子の色と答えた色が同じだった人が k 人以上いると成功になる。参加者が帽子をかぶせられる前に全員で作戦を立て、必ず成功するようにすることは可能だろうか。

授業では $(n, k) = (2, 1)$ の場合から始めて考えてもらう。赤・黒の帽子の代わりにトランプをランダムに引いておでこに当てると実験しやすい。しばらくすると、「1 人が相手と同じ色を言い、もう 1 人が相手と異なる色を言う」という作戦を思いつく。この作戦を用いると、 $n \geq 2k$ の場合は 2 人ずつペアにすることで必ず成功できることが分かる。次に $(n, k) = (3, 2)$ の場合を考えてみると、不可能であろうことが予想されるが、学生が証明を思いつくのは難しい。一般に、 $n < 2k$ の場合は不可能であることが次のように証明される。可能であるような作戦があると仮定する。帽子のかぶせられ方 f (これは 2^n 通り) と参加者 s の組 (f, s) であって、この作戦で f のときに s が正解できるようなものの全体の個数 N を考える。どのような f に対しても k 人以上が正解できることから $N \geq 2^n k$ である。また、各参加者 s について、2 つの帽子のかぶせられ方 f_1, f_2 が s の色のみ異なる場合、 s は f_1, f_2 の一方で正解、他方で不正解となるので、 $N = 2^{n-1} n$ である。したがって $2^{n-1} n \geq 2^n k$ すなわち $n \geq 2k$ が必要となる。

授業で扱うことは難しいが、参加者数が無限（可算でも非可算でもよい）であり、有限人を除いて全員が正解したときに成功とする場合の作戦は選択公理の興味深い応用である。参加者全体の集合を S とし、 S から {赤, 黒} への写像全体の集合を X とおく (X は帽子のかぶせられ方に対応する)。 $f, g \in X$ に対して、 $\{s \in S \mid f(s) \neq g(s)\}$ が有限集合のときに $f \sim g$ と定めると、 $\sim$ は X 上の同値関係である。この同値関係に関する代表元をあらかじめ固定しておく（ここで選択公理を用いる）。与えられた帽子の色を $f_0 \in X$ とおくと、各参加者は自分以外の帽子の色が分かることから f_0 の属する同値類が分かり、あらかじめ固定したその同値類の代表元における自分の帽子の色を答える。同値関係の入れ方から、この作戦で有限人を除いて全員が正解することができる。

5. まとめ

本稿では、筆者の課題協学科目での経験をもとに、アクティブラーニング型の数学授業の題材をいくつか紹介した。大学での数学の授業は講義形式が主流であるが、授業の目的によっては班活動を中心とした授業が有用な場合もあるように思われる。本稿がそのような授業の内容を考える上での助けとなれば幸いである。

参考文献

- ¹ 九州大学基幹教育院次世代型大学教育開発センター編, アクティブ・ラーナーを育む: 新時代を拓く基幹教育, 九州大学出版会, 2020, 154p, ISBN 978-4-7985-0285-4.
- ² 古屋謙治, 大河内豊, 島田敬士, 田中岳, 野瀬健, 山形伸二, 基幹教育「課題協学科目」, 基幹教育紀要, vol. 1 (2015), 63-69. <https://doi.org/10.15017/1495422>
- ³ 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編, 2009. https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf
- ⁴ 東京書籍, ポリドロンの. <https://www.tokyo-shoseki.co.jp/polydron/>
- ⁵ Eric W. Weisstein, McGregor Map, MathWorld—A Wolfram Resource.
<https://mathworld.wolfram.com/McGregorMap.html>
- ⁶ Martin Gardner, Mathematical Games: Six Sensational Discoveries that Somehow or Another have Escaped Public Attention, Scientific American, vol. 232 (1975), 126-133. <https://www.jstor.org/stable/24949779>
- ⁷ 伊藤仁一, 田中麻綾, 堀内菜智, 大学生による数学探究活動の報告—秋山仁先生のメビウスフラワーに関連するいくつかの考察—, 梶山女学園大学教育学部紀要, vol. 16 (2023), 91-97.
<https://doi.org/10.20557/00003533>
- ⁸ 一松信, 石とりゲームの数理 POD 版, 森北出版, 2003, 178 p, ISBN 978-4-627-01029-1.
- ⁹ 佐藤文広, 石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014, 256p, ISBN 978-4-903342-76-4.
- ¹⁰ 安福智明, 坂井公, 末續鴻輝, 組合せゲーム理論の世界: 数学で解き明かす必勝法, 共立出版, 2024, 254p, ISBN 978-4-320-11558-3.