不等間隔における内挿法の吸収係数算出への応用

坂本, 弘巳

竹井, 力

https://doi.org/10.15017/74

出版情報：九州大学医療技術短期大学部紀要. 3, pp.63-67, 1976-03-10. 九州大学医療技術短期大学部

不等間隔における内挿法の吸収係数算出への応用

坂　本　弘　巳，　竹　井　　　力

Application of an Interpolation with Unequal Intervals to Calculation of The Absorption Coefficient for Gamma- or X-rays.

Hiromi Sakamoto and Chikara Takei.

1. 緒　言

γ 線（X線）の物質に対する減弱係数（attenuation coefficient）と質量エネルギー吸収係数（mass energy absorption coefficient）は，前者は放射線施設（X線室，高エネルギー室）の設計施行の際のしゃへい計算に必須であり，後者はレントゲン単位から光子フルエンスまたは rad 換算係数（f値）の算出に用いられ，いずれも放射線防護のための計算には必要な値である。

減弱係数，質量エネルギー吸収係数は γ 線（X線）と物質との相互作用についての理論式[1),2),3)]から計算される。これは被照射物質の原子番号，γ 線（X線）のエネルギーの複雑な関数で表わされるが，日常我々が理論式から計算すれば大変な時間と労力を要する。係数は各物質に対して各々のエネルギーについて求められており普通はこれらの表が使用されている。[2),3),4),5),6)]

これらの係数の表はとびとびのエネルギーについて示されているので，その間のエネルギーについては一般には比例配分法で求められる。しかし係数の変化率が大きく変るエネルギー範囲では比例配分法は精度が良くない。又質量減弱係数値の差が僅かであっても，しゃへい物の厚さが厚くなるとしゃへい効果（透過線量）は大きく違ってくる。ここでは，不等間隔における内挿法[7),8)]を用いた係数算出法について述べ，二・三の計算例を示す。

2. 計算方法（内挿法）

吸収係数 μ_m は，入射 γ 線（X線）のエネルギーをE，被照射物質の原子番号をZとすれば，

$$\mu_m = f\ (Z,\ E) \quad \text{—— (1)}$$

で表わされる。

Zを一定として吸収係数を y，エネルギーを x，で書き換えると(1)式は次のように書ける。

$$y = f\ (x) \quad \text{—— (2)}$$

いま，不等間隔に配置された x の値，$x=x_0$，x_1，x_2，……x_n に対応する y の値，$y=y_0$，y_1，y_2……y_n が知られていて y の値は高精度で得られているものとすると y は次の近似式で表わされる。

$$y = y_0 + (x-x_0)\delta_0^1 + (x-x_0)(x-x_1)\delta_0^2 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\delta_0^3 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\delta_0^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{——(3)}$$

(3)式が不等間隔における内挿法の公式である。ここで，δ_0^1，δ_0^2，δ_0^3，δ_0^4，……は分割階差である。x_0，x_1，x_2，x_3，……，y_0，y_1，y_2，y_3，……と分割階差との関係は下記に示す如くである。

第一分割階差

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \delta_0^1\ , \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \delta_1^1\ ,$$

$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \delta_2^1\ , \ \cdots\cdots$$

第二分割階差

$$\frac{\delta_1^1-\delta_0^1}{x_2-x_0}=\delta_0^2\ ,\quad \frac{\delta_2^1-\delta_1^1}{x_3-x_1}=\delta_1^2\ ,$$

$$\frac{\delta_3^1-\delta_2^1}{x_4-x_2}=\delta_2^2\ ,\ \cdots\cdots$$

第三分割階差

$$\frac{\delta_1^2-\delta_0^2}{x_3-x_0}=\delta_0^3\ ,\quad \frac{\delta_2^2-\delta_1^2}{x_4-x_1}=\delta_1^3\ ,$$

$$\frac{\delta_3^2-\delta_2^2}{x_5-x_2}=\delta_2^3\ ,\ \cdots\cdots$$

これらの分割階差表を作れば表1のようになる。実際の計算にあたっては分割階差表に数値を記入してゆくと便利である。

表1　　分割階差表

x	y	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
x_0	y_0						
		δ_0^1					
x_1	y_1		δ_0^2				
		δ_1^1		δ_0^3			
x_2	y_2		δ_1^2		δ_0^4		
		δ_2^1		δ_1^3		δ_0^5	
x_3	y_3		δ_2^2		δ_1^4		δ_0^6
		δ_3^1		δ_2^3		δ_1^5	
x_4	y_4		δ_3^2		δ_2^4		
		δ_4^1		δ_3^3			
x_5	y_5		δ_4^2				
		δ_5^1					
x_6	y_6						

x_0, x_1, x_2……x_n の大小とその順序は全く自由であり，内挿しようとする点の近くから順次，x_0, x_1, x_2, x_3, ……x_n ととっていく。(3)式より明らかなように右辺の第2項から順次に第一近似，第二近似……となっているから，良い近似を得ようとするときには点の数を増やすとよい。しかし計算しようとする y の値は y_0, y_1, y_2, ……の有効桁数まで求めれば充分である。(3)式において第一近似までとると，これが比例配分法である。

3. 計算結果および考察

（例1）^{60}Coのγ線について，Al, Fe, Cu, Pb, コンクリート，に対する減弱係数を表2[5]を用いて求める。^{60}Coγ線のエネルギーは1.17 MeV, 1.33MeVである。

表2　　質量減弱係数

光子エネルギー〔MeV〕	質量減弱係数　(μ/ρ), cm^2/g				
	Al	Fe	Cu	Pb	コンクリート
0.01	26.3	173	224	133	26.9
0.015	7.93	56.4	74.2	115	8.24
0.02	3.41	25.5	33.5	85.7	3.59
0.03	1.12	8.13	10.9	29.7	1.19
0.04	0.567	3.62	4.89	14.0	0.605
0.05	0.369	1.94	2.62	7.81	0.392
0.06	0.280	1.20	1.62	4.87	0.295
0.08	0.203	0.595	0.772	2.33	0.213
0.10	0.171	0.370	0.461	5.40	0.179
0.15	0.138	0.196	0.223	1.97	0.144
0.20	0.122	0.146	0.157	0.991	0.127
0.30	0.104	0.110	0.112	0.404	0.108
0.40	0.0927	0.0940	0.0941	0.231	0.0963
0.50	0.0844	0.0840	0.0836	0.161	0.0877
0.60	0.0780	0.0769	0.0762	0.125	0.0810
0.80	0.0684	0.0669	0.0660	0.0885	0.0709
1.0	0.0613	0.0599	0.0589	0.0708	0.0637
1.5	0.0500	0.0488	0.0480	0.0517	0.0519
2.0	0.0432	0.0425	0.0420	0.0455	0.0448
3.0	0.0354	0.0362	0.0360	0.0418	0.0365

(Radiological Health Handbook による)

Feについて分割階差表を作ると表3のようになる。太字の数値はそれぞれy_0, δ_0^1, δ_0^2, δ_0^3, ……を示す。

内挿公式(3)に代入し，エネルギー，x =1.17 MeV, 1.33 MeV, 1.25 MeV を代入し計算するとそれぞれ 0.0553, 0.0517, 0.0534 を得る。^{60}Coのγ線は1.17 MeVと1.33 MeVの平均エネルギーとして1.25 MeVとすることが多い。Al, Cu, Pb, コンクリートの場合も同様にして分割階差表を作って計算した結果を表4に示す。比例配分法による計算値も同時に示した。

（例2）近年核医学方面で放射性同位元素が多数使用されているが，そのなかで最も多量に用いられている。^{99m}Tc (0.140MeV), ^{113m}In (0.393 MeV), についての質量エネルギー吸収係数を表5より求める。

表3 Feについての分割階差表

x	y	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
$x_0=1.0$	$y_0=$**0.0599**						
		−0.0222					
$x_1=1.5$	$y_1=0.0488$		**0.018**				
		−0.0258		**−0.007**			
$x_2=0.8$	$y_2=0.0669$		0.011		**0.0102**		
		−0.0203		−0.0111		**−0.0034**	
$x_3=2.0$	$y_3=0.0425$		0.021		0.0033		**0.0076**
		−0.0245		−0.0061		−0.0073	
$x_4=0.6$	$y_4=0.0769$		0.0075		0.0106		
		−0.0169		−0.0093			
$x_5=3.0$	$y_5=0.0362$		0.0215				
		−0.0191					
$x_6=0.5$	$y_6=0.0840$						

表4 ^{60}Co の γ 線に対する物質の質量減弱係数

[MeV]	物質 / 計算法	質量減弱係数 (μ/ρ), cm^2/g Al	Fe	Cu	Pb	コンクリート
1.17	内挿法	0.0565	0.0553	0.0542	0.0607	0.0590
	比例配分法	0.0575	0.0561	0.0552	0.0643	0.0597
1.25	内挿法	0.0546	0.0534	0.0524	0.0571	0.0571
	比例配分法	0.0557	0.0544	0.0535	0.0613	0.0578
1.33	内挿法	0.0529	0.0518	0.0507	0.0544	0.0553
	比例配分法	0.0538	0.0526	0.0517	0.0582	0.0559

表5 物質の質量エネルギー吸収係数値

光子エネルギー [MeV]	質量エネルギー吸収係数 (μ_{en}/ρ), cm^2/g 水	空気	骨	筋肉
0.01	4.89	4.66	19.0	4.96
0.015	1.32	1.29	5.89	1.36
0.02	0.523	0.516	2.51	0.544
0.03	0.147	0.147	0.743	0.154
0.04	0.0647	0.0640	0.305	0.0677
0.05	0.0394	0.0384	0.158	0.0409
0.06	0.0304	0.0292	0.0979	0.0312
0.08	0.0253	0.0236	0.0520	0.0255
0.10	0.0252	0.0231	0.0386	0.0252
0.15	0.0278	0.0251	0.0304	0.0276
0.20	0.0300	0.0268	0.0302	0.0297
0.30	0.0320	0.0288	0.0311	0.0317
0.40	0.0329	0.0296	0.0316	0.0325
0.50	0.0330	0.0297	0.0316	0.0327
0.60	0.0329	0.0296	0.0315	0.0326
0.80	0.0321	0.0289	0.0306	0.0318
1.0	0.0311	0.0280	0.0297	0.0308
1.5	0.0283	0.0255	0.0270	0.0281
2.0	0.0260	0.0234	0.0248	0.0257
3.0	0.0227	0.0205	0.0219	0.0225

(Radiological Health Handbook による)

表6 ^{99m}Tc, ^{113m}Inのγ線に対する物質の質量エネルギー吸収係数

核種	物質 / 計算法	質量エネルギー吸収係数 μ_{en}/ρ 水	空気	骨	筋肉
^{99m}Tc	内挿法	0.0273	0.0248	0.0315	0.0272
[0.140MeV]	比例配分法	0.0273	0.0247	0.0319	0.0272
^{113m}In	内挿法	0.0329	0.0296	0.0316	0.0325
[0.393MeV]	比例配分法	0.0328	0.0295	0.0316	0.0324

^{99m}Tcについて，$x_0=0.15$, $x_1=0.10$, $x_2=0.20$, $x_3=0.30$, $x_4=0.40$ の5点から，^{113m}Inについて，$x_0=0.40$, $x_1=0.30$, $x_2=0.50$, $x_3=0.20$, $x_4=0.60$ の5点から水，空気，骨，筋肉についての質量エネルギー吸収係数の計算結果を表6に示す。

ついでにf—値は

$$f=0.869\,\frac{(\mu_{en}/\rho)_{med}}{(\mu_{en}/\rho)_{air}} \quad (4)$$

であるから，表6の μ_{en}/ρ を用いて計算すると，表7を得る。

表7　^{99m}Tc, ^{113m}Inのγ線に対する水，骨，筋肉のf—値

	水	骨	筋　肉
^{99m}Tc	0.957	1.104	0.953
^{113m}In	0.966	0.928	0.954

（例3）^{60}Coのrhm値および光子フルエンスを求める。

空気に対する質量エネルギー吸収係数は表5を用いて，$x_0=1.0$, $x_1=1.5$, $x_2=0.8$, $x_3=2.0$, $x_4=0.6$, $x_5=3.0$, $x_6=0.5$ の7点から内挿すると，次の値を得る。

$x=1.17$ のとき $y=0.0271_6$〔cm^2/g〕

$x=1.25$ のとき $y=0.0267_5$〔cm^2/g〕

$x=1.33$ のとき $y=0.0262_7$〔cm^2/g〕

光子フルエンスをΦ, エネルギーフルエンスをΨ, γ線のエネルギーをE MeVとすれば，1 Ciの点状γ線源からd cmの点における単位時間当りのエネルギーフルエンスは

$$\frac{\triangle\Psi}{\triangle t}=E\cdot\frac{\triangle\Phi}{\triangle t}=3.7\times10^{10}\times\frac{1}{4\pi\cdot d^2}\times E\ \frac{MeV}{cm^2\cdot sec\cdot Ci} \quad (5)$$

である。また，空気1g当りの吸収線量Dは

$$D=\Psi\cdot\mu_{en}/\rho=E\cdot\Phi\cdot\mu_{en}/\rho \quad (6)$$

で表わされる。ここで，μ_{en}/ρは空気の質量エネルギー吸収係数である。

rhm値Γは次のように求められる。(5), (6)式より

$$\Gamma=D\cdot\frac{1}{86.9}=3.7\times10^{10}\times\frac{1}{4\times3.14\times(100)^2}\times3600\times E\times1.60\times10^{-6}\times\frac{1}{86.9}\times\frac{\mu_{en}}{\rho}$$

$$=19.52\cdot E\cdot\frac{\mu_{en}}{\rho}\ \frac{R}{hr\cdot Ci} \quad (7)$$

ここで内挿法によって算出した^{60}Coの質量エネルギー吸収係数を代入すると

$$\Gamma=19.52\times(1.17\times0.0271_6+1.33\times0.0262_7)$$

$=1.30_2$　R/hr•Ci at 1 meter

となる。また，平均エネルギーを1.25 MeVとしたときの値は，

$$\Gamma=19.52\times(2\times1.25\times0.0267_5)$$

$=1.30_5$　R/hr•Ci at 1 meter

となる。

つぎに，$^{60}Co\ \gamma$線について1 R当りの光子フルエンスΦを計算すると，

$\Phi=8.14\times10^8$　光子/cm^2•R

という値を得る。

例1で$^{60}Co\ \gamma$線に対するAl, Fe, Cu, Pb, コンクリートの質量減弱係数を内挿法で計算した。表4よりAl, Fe, Cu, コンクリートについては内挿法と比例配分法の値は2%以内で一致した。しかしPbについては比例配分法の値が内挿法よりも8%程度大きい値を示した。表2[5]の質量減弱係数は，1.25MeVの前後でAl, Fe, Cu, クンクリートについてはゆるやかに変わっているので内挿法と比例配分法とで余り差がないが，Pbでは変化率の差が大きく変わるので両者の差は大きく現われる。質量減弱係数値の差が僅かであってもしゃへい物の厚さが厚くなるとしゃへい効果（透過線量）は大きく違ってくる。電離箱式サーベイメータの許容誤差をJIS (Z-4309) で±10%以内と規定していることから10%を一つの目安として，両計算法から求めた質量減弱係数値を用いて$^{60}Co\ \gamma$線の透過線量に10%の差が生じるしゃへい物の厚さを計算してみると，Pbで2 cm, Feで約15cm, コンクリートで約65cmである。したがって誤差を10%以内におさえたい場合もしくは，しゃへい物の厚さが前述の値より厚くなると計算精度の良い内挿法で計算した質量減弱係数値を使用すべきである。

例2で^{99m}Tcおよび^{113m}Inに対する，水，空気，骨，筋肉の質量エネルギー吸収係数を算出した。表6の値は内挿法と比例配分法とは一致した。これは^{99m}Tc（0.140 MeV）と^{113m}In（0.393MeV）のγ線のエネルギーが表5[5]のエネルギー値（0.15MeV, 0.40MeV）の近傍にあり，しかも質量エネルギー吸収係数がこれらのエネルギー附近で余り差がないためである。このような場合は比例配分法で計算しても充分である。

例3で$^{60}Co\ \gamma$線のrhm値および光子フルエンスを求めた。rhm値としては1.30という値

を得た。[60]Co γ 線の rhm 値は Johns の表[4]では1.29，Jaeger の表[9]では1.32となっている。これは準拠する質量エネルギー吸収係数の理論式の違いによるもので，現在では1.30～1.33の範囲の値がよく用いられる。

[60]Co γ 線について1R当りの光子フルエンスは8.14×10^{9} 光子/cm²・R と算出された。γ線またはX線の測定においては電離を測る方法（roentgen meter）と，光子数を測る方法（counter）とがあるが，この両者の関係は1R当りの光子フルエンスによって結びつけられる。光子フルエンスが重要となるのは，放射線防護の立場から低線量のγ線またはX線の測定を行う場合とX線のエネルギー・スペクトル測定からR値またはf一値を求める場合である。後者については NBS Handbook 62[10] にその物理的見解が詳細に述べられ，Allisy 等[11]や竹井[12]が測定して計算値を示している。

診療用X線のエネルギー・スペクトルは10keV～150keV程度であるから，質量エネルギー吸収係数表[4),5)]（表5）にはこのエネルギー範囲では10点しか掲載されていない。したがって，エネルギー・スペクトルからR値またはf一値を正確に求めようとするとエネルギーを細かく分けて質量エネルギー吸収係数値を算出する必要がある。表5から明らかなように10～150keVの低エネルギー領域では質量エネルギー吸収係数の変化率が大きく変わるので，中間のエネルギーに対する値は精度のよい内挿法を用いて算出すべきである。

4. 結　語

不等間隔における内挿法を用いたγ線（X線）の質量減弱係数と質量エネルギー吸収係数の算出法について例をあげて述べた。

1. γ線のエネルギーが吸収係数表のエネルギーの近傍にあるときは誤差は小さいので比例配分法で求めても充分である。

2. γ線のエネルギーが吸収係数表の中間のエネルギーで，かつそのエネルギーの前後で変化率の差が大きく異るとき，又しゃへい計算でしゃへい物が厚くなるときは内挿法にて算出すべきである。

文　献

1) Heitler, W: Quantum Theory of Radiation, 3rd edition Oxford University Press, 1954.
2) Hine, G.J. and Brownell, G.L: Radiation Dosimetry, 3rd printing Academic Press Inc, 1961.
3) Siegbahn, K: Beta and Gamma-Ray Spectroscopy, North Holland Publishing, 1965.
4) Johns, H.E. and Cunningham J.R: The Physics of Radiology, 3rd edition Charles C Thomas Publisher, 1969.
5) Radiological Health Handbook, U.S. Department of Health, Education and Welfare, Public Health Service, 1970.
6) NBS Handbook no. 85, 1964.
7) 宮本正太郎著：誤差論及計算法，恒星社厚生閣発行（昭和28年）．
8) Whittaker, E.T. and Robinson, G: A Short Course in Interpolation, Blackie and Son Limited, 1924.
9) Jaeger, R.G. et al: Engineering Compendium on Radiation Shielding, vol, 1, Springer-Verlag, 1968.
10) NBS Handbook No.62, 1957.
11) Allisy, A. and Astier, A.: Journal de Radiologie 39:335, 1958.
12) 竹井力：日医放会誌23：1456，1964.