

メビウス幾何における自己アフィン性に基づく美的 曲線の幾何学

熊谷, 駿
八戸工業大学工学部

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

<https://hdl.handle.net/2324/7388914>

出版情報：日本応用数理学会年会講演予稿集, 2025-09. Japan Society for Industrial and Applied Mathematics (JSIAM)

バージョン：

権利関係：



メビウス幾何における自己アフィン性に基づく美的曲線の幾何学

熊谷 駿¹, 梶原 健司²

¹ 八戸工業大学工学部 ✉shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp / s-kumagai@hi-tech.ac.jp

² 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 ✉kaji@imi.kyushu-u.ac.jp

1 曲線の自己アフィン性

曲線の自己アフィン性 [1] は実車の意匠形状の解析をもとに提案された対称性で、形状設計における「審美性」にかかわるものとして対数型美的曲線 [2] の曲線クラスをもたらした。これまで、曲線の位置 (接) ベクトルに関する「原田型」、曲線の特徴量に関する「三浦型」の二つの自己アフィン性の検討を進めてきた。以下、正則・非退化な平面曲線 $\gamma(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ を考えるものとし、 $s := \int |\gamma_w| dw$ (弧長径数), $\kappa^E := |\gamma_{ss}|$ (ユークリッド曲率), $\theta := \int \kappa^E ds$ (相似弧長径数), $u := \det(\gamma_w, \gamma_{ww})^{-\frac{1}{3}}$ (等積弧長径数), $\kappa^{SA} := -\gamma_{uuu}/\gamma_u$ (等積曲率) とかく。ここで、 w は特別な制約のない径数を指すことに注意する。

命題 1 (三浦型自己アフィン性 [2, 3]) 曲線 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ に対し、三浦型自己アフィン性：

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (\kappa^E(w + \varepsilon), s_w(w + \varepsilon)) = (e^{-\varepsilon} \kappa^E(w), e^{\alpha \varepsilon} s_w(w)), \quad (1)$$

は $\kappa^E(s)^\alpha = \xi s + \eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ (対数型美的曲線) であることに同値である。

命題 2 (原田型自己アフィン性 [3, 4]) 曲線 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ に対し、原田型自己アフィン性：

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \gamma_w(w + \varepsilon) = A(\varepsilon) \gamma_w(w), \quad (2)$$

は $\kappa^{SA}(u) = \pm(\xi u + \eta)^{-2}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ であることに同値である。これは等積アフィン変換を法として、以下の曲線クラスを定める： $\xi = 0$ のとき二次曲線 ($\kappa^{SA} > 0$: 楕円, $\kappa^{SA} = 0$: 放物線, $\kappa^{SA} < 0$: 双曲線), $0 < |\xi| < 2$ のとき対数らせん ($\alpha = 1$ の対数型美的曲線), $|\xi| = 2$ のとき関数 $y = x \log x$ のグラフ, $|\xi| = \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{2}{5}}$ のとき指数・対数関数のグラフ, それ以外ではべき関数のグラフ。

2 メビウス幾何

補題 3 行列値関数 $\Phi(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{GL}(2, \mathbb{C})$, $K(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{M}(2, \mathbb{C})$ に対し、フレネ型公式 $\Phi_w(w) = \Phi(w)K(w)$ が成り立つとする。このとき、 $K(w)$ が定数であるためには $A(w, \varepsilon) := \Phi(w + \varepsilon)\Phi(w)^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{GL}(2, \mathbb{C})$ が w によらない $A(\varepsilon)$ であること、すなわち自己アフィン性

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \Phi(w + \varepsilon) = A(\varepsilon)\Phi(w), \quad (3)$$

が成り立つことが必要かつ十分である。

非退化複素曲線 $c = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に対し $\Phi := (c_w \ c) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, $\lambda := \det \Phi^{-\frac{1}{2}}$, $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_w & \lambda \end{pmatrix}$, **メビウス枠** $\Phi^M := ((c\lambda)_w \ c\lambda) = \Phi\Lambda \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を定義する。このときフレネ型公式

$$\Phi_w^M = \Phi^M K^M := \Phi^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^M & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa^M = S_w \left(\frac{c_2}{c_1} \right) := -2 \left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1} \right)_w + \left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1} \right)^2, \quad (4)$$

が成り立ち、**メビウス曲率** κ^M がメビウス同値類 $\left\{ (c'_1 \ c'_2)^T \mid \frac{c'_2}{c'_1} = \frac{ac_1 + bc_2}{cc_1 + dc_2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}$

に一対一に対応する．ここで，各 w で $c(w)$ の代わりに代表元 $c(w)\lambda(w)$ をとることは射影曲線 $[c(w)]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ を考えることに対応する．

定理 4 非退化複素曲線 $c = (c_1 \ c_2)^T: \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{C}^2$ に対し，射影的・原田型自己アフィン性：

$$\exists A(\varepsilon): \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w + \varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \quad (5)$$

$$\exists \nu(w, \varepsilon): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = \nu(w, \varepsilon)A(\varepsilon)c(w), \quad (6)$$

が成り立つとき， $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ である．とくに (5), (6) はメビウス枠の自己アフィン性 $\Phi^M(w + \varepsilon) = \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \cdot A(\varepsilon)\Phi^M(w)$ ，ならびに $\kappa^M(w)$ が定数であることに同値である．これはメビウス変換を法として $\kappa^M = 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = w: \text{円} \cdot \text{直線}$ ， $\kappa^M \neq 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \exp(\sqrt{\kappa^M}w): \text{円} \cdot \text{直線}$ ($\kappa^M \in \mathbb{R}^\times$)，対数らせん ($\kappa^M \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}$) として表される曲線クラスを定める．

3 メビウス幾何の特殊化における自己アフィン性

正則・非退化曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し， $\phi = (\gamma_w, \gamma_{ww}) \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ ， $\mu := \exp\left(-\int \frac{\gamma_w \cdot \gamma_{ww}}{|\gamma_w|^2} dw\right)$ ， $M := \begin{pmatrix} \mu & \mu_w \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ，直交枠 $\Phi^\perp := (\gamma_w \mu \ (\gamma_w \mu)_w) = \phi M$ を定義する．ここでは $\mu = 1/s_w$ であり， $\Phi^\perp = (\gamma_s \ \gamma_{sw}) = (\gamma_w/s_w \ \sqrt{-1} \gamma_w \kappa^E)$ と表されることに注意する．さらに $c_\gamma^\perp(w) := (\Phi^\perp(w))^T$ とおくと非退化曲線 $c = c_\gamma^\perp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を定め，その射影座標は $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} \kappa^E s_w = \sqrt{-1} \theta_w$ である．

命題 5 曲線 γ に対して三浦型自己アフィン性 (1) が成り立つならば，実数倍を除いて $s_w = e^{\alpha w}$ ， $\kappa^E = e^{-w}$ ， $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} e^{(\alpha-1)w}$ である．また，次の射影的・原田型自己アフィン性が成り立つ：

$$[c(w + \varepsilon)] = \begin{bmatrix} \gamma_w(w + \varepsilon)/s_w(w + \varepsilon) \\ \sqrt{-1} \gamma_w(w + \varepsilon) \kappa^E(w + \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_w(w + \varepsilon) \\ \gamma_w(w) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} c(w) = [A(\varepsilon)c(w)]. \quad (7)$$

とくに，傾き α の対数型美的曲線 γ が定める複素曲線 $c_\gamma^\perp$ のメビウス曲率は $\kappa^M = (\alpha - 1)^2$ である．

自己アフィン性 (7) において，補題 4 より $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\gamma_w(w + \varepsilon)}{\gamma_w(w)} = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ が成り立つ．したがって γ_w の射影同値類 $\gamma_w \lambda$ に対して次の原田型自己アフィン性が成り立つ：

$$\gamma_w(w + \varepsilon) \lambda(w + \varepsilon) = \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \gamma_w(w) \lambda(w), \quad \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{\alpha+1}{2}\varepsilon}. \quad (8)$$

命題 6 正則・非退化曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し， $c_\gamma^{\mathrm{emb}}(w) := (\mathrm{Re} \gamma_w(w) \ \mathrm{Im} \gamma_w(w))^T$ とおくと非退化曲線 $c = c_\gamma^{\mathrm{emb}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ を定める．これが $A(\varepsilon): \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ， $\nu(w, \varepsilon) = 1$ に対して自己アフィン性 (5), (6) をみたすことは， γ が命題 2 の曲線クラスであることに同値である．

命題 7 正則・非退化曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し， $c_\gamma(w) := (\gamma_w \ \gamma_{ww})^T = \begin{pmatrix} s_w & 0 \\ s_{ww} & s_w \end{pmatrix} c_\gamma^\perp$ とおくと非退化曲線 $c = c_\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を定める．これが自己アフィン性 (5), (6) をみたすことは $\frac{c_2}{c_1} = \frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w}$ のメビウス変換を法として， γ が放物線 ($\kappa^M = 0$) または対数型美的曲線 ($\kappa^M \neq 0$) であることに同値である．

謝辞 本研究は JST CREST JPMJCR1911 の助成を受けたものである．

参考文献

- [1] 原田利宣，森典彦，杉山和雄，“曲線の物理的性質と自己アフィン性”，デザイン学研究，Vol.42, No.3, pp.33–40, 1995.
- [2] 三浦憲二郎，“美しい曲線の一般式とその自己アフィン性”，精密工学会誌，72 (7) 857–861, 2006.
- [3] S. Kumagai, K. Kajiware, “Self-affinities of planar curves: towards unified description of aesthetic curves”, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, arXiv:2407.17008, 2024.
- [4] S. Kumagai, K. Kajiware, “A new class of aesthetic curves based on the self-affinity in equiaffine geometry”, preprint, arXiv:2505.20713, 2025.

4 主結果

定理 8 正則・非退化曲線 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, さらに, 次の二つの原田型自己アフィン性が成り立つならば, γ に対して三浦型自己アフィン性 (1) が成り立つ.

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = A(\varepsilon)c(w), \quad (9)$$

$$\exists B(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{CO}^+(2, \mathbb{R}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \gamma_w(w + \varepsilon) = B(\varepsilon)\gamma_w(w). \quad (10)$$

定理 9 非退化複素曲線 $c = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に対し, 射影的・原田型自己アフィン性:

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w + \varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \quad (11)$$

$$\exists \nu(w, \varepsilon) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = \nu(w, \varepsilon)A(\varepsilon)c(w), \quad (12)$$

が成り立つことは, $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ であって, とくにメビウス枠の自己アフィン性 $\Phi^M(w + \varepsilon) = \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \cdot A(\varepsilon)\Phi^M(w)$ が成り立つこと (とくに κ^M が定数であること) に同値である.

証明 定義より $\lambda(w) = \det(c_w \ c)^{-\frac{1}{2}}$ であったから, (12) が成り立つとき次を得る.

$$\lambda(w + \varepsilon)^{-2} = \det(c_w \ c)(w + \varepsilon) \quad (13)$$

$$= \det((\nu_w A c)_w \ \nu_w A c) = \det(\nu_w A c + \nu_w A c_w \ \nu_w A c) \quad (14)$$

$$= \nu^2 \det A(\varepsilon) \det(c_w \ c) = \nu^2 \det A(\varepsilon) \lambda(w)^{-2}, \quad (15)$$

よって $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ を得る. (12) を w で微分すると

$$c_w(w + \varepsilon) = \nu_w A c + \nu_w A c_w, \quad \Phi^M(w + \varepsilon) = A(c_w \ c) \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ \nu_w & \nu \end{pmatrix} =: A \Phi^M(w) N(w, \varepsilon) \quad (16)$$

(16) を ε で微分し, $\varepsilon = 0$ ととると

定理 10 非退化複素曲線 $c = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に対し, (原田型) 自己アフィン性:

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = A(\varepsilon)c(w), \quad (17)$$

が成り立つならば, κ^M は定数である. これは, メビウス変換を法として $\kappa^M = 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = w$ (円・直線), $\kappa^M \neq 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \exp(\sqrt{\kappa^M} w)$ ($\kappa^M \in \mathbb{R}$: 円・直線, $\kappa^M \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: 対数らせん), という曲線クラスを定める.

定理 11 (旧定理 4) 非退化複素曲線 $c = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に対し, 射影的・原田型自己アフィン性:

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w + \varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \quad (18)$$

$$\exists \nu(w, \varepsilon) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = \nu(w, \varepsilon)A(\varepsilon)c(w), \quad (19)$$

は κ^M が定数であることに同値である. このことは, メビウス変換を法として $\kappa^M = 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = w$: 円・直線, $\kappa^M \neq 0$ のとき $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \exp(\sqrt{\kappa^M} w)$: 円・直線 ($\kappa^M \in \mathbb{R}$), 対数らせん ($\kappa^M \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), という曲線クラスを定める.

命題 12 曲線 γ に対して三浦型自己アフィン性 (1) が成り立つならば、実数倍を除いて $s_w = e^{\alpha w}$, $\kappa^E = e^{-w}$, $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} e^{(\alpha-1)w}$ である。また、次の射影的・原田型自己アフィン性が成り立つ：

$$[c(w+\varepsilon)] = \begin{bmatrix} \gamma_w(w+\varepsilon)/s_w(w+\varepsilon) \\ \sqrt{-1} \gamma_w(w+\varepsilon) \kappa^E(w+\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_w(w+\varepsilon)}{\gamma_w(w)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} c(w) \end{bmatrix} = [A(\varepsilon)c(w)]. \quad (20)$$

補題 4 より、 $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\gamma_w(w+\varepsilon)}{\gamma_w(w)} = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w+\varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ が成り立つ。したがって γ_w の射影同値類 $\gamma_w \lambda$ に対して次の原田型自己アフィン性が成り立つ。

$$\gamma_w(w+\varepsilon) \lambda(w+\varepsilon) = \det A(\varepsilon) \gamma_w(w) \lambda(w). \quad (21)$$

ここでは $\det A(\varepsilon) = e^{-(\alpha+1)\varepsilon}$,

$$\lambda(w)^{-2} = \det(c_w \ c) = \det \begin{pmatrix} \gamma_{sw} & \gamma_s \\ \gamma_{sww} & \gamma_{sw} \end{pmatrix} = -\sqrt{-1} e^{2\sqrt{-1}\theta} \theta_{ww}, \quad (22)$$

である。

5 自己アフィン性に基づく美的曲線の統一的定式化に向けて

第一に、命題 3 は $c(w) := (\operatorname{Re} \gamma_w(w) \ \operatorname{Im} \gamma_w(w))^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, $A(\varepsilon) \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$, $\kappa^M \in \mathbb{R}$ であるものとして、定理 4 の特別な場合に当たる。その射影座標 $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \operatorname{grad} \gamma_w(w)$ は w または $\exp \sqrt{\kappa^M} w$ のメビウス変換に決まり、1)-4) の曲線クラスを定める。第二に、**相似幾何**の枠組みで [?] 等の対数型美的曲線の性質の定式化が進んだが、この設定は退化性 $\det(c_w \ c) = 0$ に対応する。代わりに、相似変換を法とした不定性は $\mathbb{C}P^2$ における射影同値 $c \sim c\nu$, $\nu \in \mathbb{C}^\times$ としても捉えられる。

補題 13 曲線 $c(w) = (c_1(w) \ c_2(w))^T$ の退化性は射影座標が定数 $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \tau \in \hat{\mathbb{C}}$ であること、関数 $f(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて $(c_1(w) \ c_2(w))^T = (f(w) \ \tau f(w))^T$ の形の曲線であることに同値である。

原田型・三浦型の二つの自己アフィン性の統一的定式化に向けて、メビウス幾何の「直交」アナログで特殊化した議論を示す。一般に正則・非退化曲線 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 $\phi = (\gamma_w, \gamma_{ww}) \in \operatorname{GL}^+(2, \mathbb{R})$, $\mu := C \exp \left(- \int \frac{\gamma_w \cdot \gamma_{ww}}{|\gamma_w|^2} dw \right)$, $M := \begin{pmatrix} \mu & \mu_w \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, **直交枠** $\Phi^\perp := (\gamma_w \mu \ (\gamma_w \mu)_w) = \phi M \in \operatorname{GL}^+(2, \mathbb{R})^\perp$ を定義する。ここで $C = 1$ を選ぶと $\mu = 1/s_w$ であり、実際は $\Phi^\perp = (\gamma_s \ \gamma_{sw}) = (\gamma_w/s_w \ \sqrt{-1} \gamma_w \kappa^E)$ により表せることに注意する。このとき次のフレネ型公式が成り立つ：

$$\Phi_w^\perp = \Phi^\perp K^\perp, \quad K^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -(\kappa^E s_w)^2 \\ 1 & 2(\log \kappa^E s_w)_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_w^2 \\ 1 & 2\theta_{ww}/\theta_w \end{pmatrix}, \quad (23)$$

直交枠の転置が定める複素曲線 $c(w) := (\Phi^\perp(w))^T = M^T \phi^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は射影座標が $\sqrt{-1} \kappa^E s_w$ で表される非退化曲線で、三浦型自己アフィン性 (2) は次の (射影的) 原田型自己アフィン性を導く：

$$[c(w+\varepsilon)] = \begin{bmatrix} \gamma_w(w+\varepsilon)/s_w(w+\varepsilon) \\ \sqrt{-1} \gamma_w(w+\varepsilon) \kappa^E(w+\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_w(w+\varepsilon)}{\gamma_w(w)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} c(w) \end{bmatrix} =: [A(\varepsilon)c(w)]. \quad (24)$$

逆に自己アフィン性 (6) を仮定したとき、定理 4 より c の射影座標 $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} \kappa^E s_w$ は円・直線 ($\kappa^M \in \mathbb{R}$) または対数らせん ($\kappa^M \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) のメビウス変換で表される。いま $\kappa^E s_w \in \mathbb{R}$ より、 $\kappa^M \in \mathbb{R}$ かつ $\kappa^E s_w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($z = w, \exp(\sqrt{\kappa^M} w)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{R})$) の形である。

6 対数型美的曲線の w -表示

対数型美的曲線は $s_w(w) = e^w$ となる径数 w において三浦型自己アフィン性 (1) が成立する. このとき $\kappa^E = (\xi s + \eta)^{-\frac{1}{\alpha}} = \xi^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha} w} =: k e^{lw}$, $\theta = \int \kappa^E s_w dw = k \int e^{(l+1)w} dw =: K e^{Lw} + C$, $\gamma_s = e^{\sqrt{-1} K e^{Lw}}$, $\gamma_w = \gamma_s s_w = e^{\sqrt{-1} K e^{Lw} + w}$

$$\frac{\gamma_s(w + \varepsilon)}{\gamma_s(w)} = e^{K(e^{L\varepsilon} - 1)e^{Lw}}, \quad \frac{\gamma_w(w + \varepsilon)}{\gamma_w(w)} = e^\varepsilon e^{K(e^{L\varepsilon} - 1)e^{Lw}}, \quad (25)$$

$\gamma_{sw}/\gamma_s = (\log \gamma_s)_w = \theta_w = K L e^{Lw}$ が自己アフィン性をもつ: θ の自己アフィン性

$(\gamma_{ww}/\gamma_w)_w = (\log \gamma_w)_{ww} = \sqrt{-1} K L^2 e^{Lw}$ の自己アフィン性: 使っていないのではないかな? $\rightarrow$ NO?: LAC のとき $s_{ww}/s_w = 1$, $\gamma_{ww}/\gamma_w = \sqrt{-1} \theta_w + 1$, その w -微分の自己アフィン性は θ_{ww} の自己アフィン性

$$\frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w} = (\sqrt{-1} K e^{Lw} + w)_w = \sqrt{-1} K L e^{Lw} + 1, \quad \left(\frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w} \right)_w = \sqrt{-1} K L^2 e^{Lw} \quad (26)$$

$$\left(\frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w} \right)_w (w + \varepsilon) = \beta(\varepsilon) \left(\frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w} \right)_w (w), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \quad (27)$$

一般には, $\beta(\varepsilon)$ が w に依存しないだけでなく, $(\gamma_{ww}/\gamma_w)_w \in \mathbb{C}$ の向きがシフトしても変わらないことも非自明である. これは何かしらの意味で直交同値類をとる前の $\phi = (\gamma_w, \gamma_{ww})$ についての自己アフィン性として現れることが期待される.

7

一般に, w, e^{kw} のメビウス変換の不定積分は,

(28)

$$\int \frac{aw + b}{cw + d} dw = \begin{cases} \frac{a}{c} w - \frac{ad - bc}{c^2} \log |cw + d| + C & (c \neq 0) \\ \frac{a}{2d} w^2 + \frac{b}{d} w + C & (c = 0) \end{cases}, \quad (29)$$

$$\int \frac{ae^{kw} + b}{ce^{kw} + d} dw = \begin{cases} \frac{b}{d} w + \frac{ad - bc}{cdk} \log |ce^w + d| + C & (d \neq 0) \\ \frac{a}{c} w - \frac{b}{ck} e^{-kw} + C & (d = 0) \end{cases} \quad (30)$$

$$\log s_w = \log \gamma_s - \log \gamma_w \quad (31)$$

$$s_w = \begin{cases} (cw + d)^\zeta e^{\eta w} e^{\varepsilon w} \\ (ce^w + d)^\zeta e^{\eta w} \end{cases} \quad (32)$$

8 メビウス曲率一定が表す自己アフィン性

$\kappa^M = 0$, $\theta_w = \frac{aw + b}{cw + d}$ のとき,

$$\theta_w(w + \varepsilon) = \frac{aw + a\varepsilon + b}{cw + c\varepsilon + d} = \left[\begin{pmatrix} a & b + a\varepsilon \\ c & d + c\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \right]_M \theta_w(w) \quad (33)$$

$\kappa^M \in \mathbb{R}^\times$, $\theta_w = \frac{ae^{kw} + b}{ce^{kw} + d}$ のとき,

$$\theta_w(w + \varepsilon) = \frac{ae^{k\varepsilon}e^{kw} + b}{ce^{k\varepsilon}e^{kw} + d} = \left[\begin{pmatrix} ae^{k\varepsilon} & b \\ ce^{k\varepsilon} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \right]_M \theta_w(w) \quad (34)$$

9 相似幾何との関連

$$(\Phi^\perp)^T = \begin{pmatrix} \gamma_s \\ \sqrt{-1} \gamma_s \theta_w \end{pmatrix} = \theta_s \begin{pmatrix} \gamma_\theta \\ \sqrt{-1} \gamma_\theta \end{pmatrix} = \kappa^E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta_w \end{pmatrix} (\Phi^{\text{sim}})^T =: \Theta^T (\Phi^{\text{sim}})^T \quad (35)$$

である．いま，次の自己アフィン性を仮定する：

$$(\Phi^\perp)^T(w + \varepsilon) = A(\varepsilon)(\Phi^\perp)^T(w), \quad (36)$$

$$\Theta^T(w + \varepsilon)(\Phi^{\text{sim}}(w + \varepsilon))^T = A(\varepsilon)\Theta^T(w)(\Phi^{\text{sim}}(w))^T, \quad (37)$$

このとき，転置をとると

$$\Phi^{\text{sim}}(w + \varepsilon)\Theta(w + \varepsilon) = \Phi^{\text{sim}}(w)\Theta(w)A(\varepsilon)^T, \quad (38)$$

ε -微分をとって $\varepsilon = 0$ とすると，

$$(\Phi_\theta^{\text{sim}}\theta_w)\Theta + \Phi^{\text{sim}}\Theta_w = \Phi^{\text{sim}}\Theta A'(0)^T, \quad (39)$$

$$\Phi_\theta^{\text{sim}} = \frac{1}{\theta_w} \Phi^{\text{sim}} \{ \Theta A'(0)^T - \Theta_w \} \Theta^{-1} \quad (40)$$

$$= \frac{1}{\theta_w} \Phi^{\text{sim}} \begin{pmatrix} a - 1 & b\theta_w^{-1} \\ c\theta_w & d - \theta_{ww} \end{pmatrix} \quad (41)$$

相似フレネの公式 $\Phi_\theta^{\text{sim}} = \Phi^{\text{sim}} \begin{pmatrix} -\kappa^{\text{sim}} & -1 \\ 1 & -\kappa^{\text{sim}} \end{pmatrix}$ と連立させると，