

可積分離散べき関数から構成されるMichell-Prager 型トラス構造

政田, 智秋
九州大学

早川, 健太郎
日本大学

林, 和希
京都大学

軸丸, 芳揮
東洋大学

他

<https://hdl.handle.net/2324/7388913>

出版情報 : 日本応用数理学会年会講演予稿集, 2025-09. Japan Society for Industrial and Applied Mathematics (JSIAM)

バージョン :

権利関係 :



可積分離散べき函数から構成される Michell–Prager 型トラス構造

Michell–Prager type truss structures constructed by integrable discrete power functions

政田 智秋 (Masada Motoki)¹, 早川 健太郎 (Hayakawa Kentaro)², 林 和希 (Hayashi Kazuki)³,
 軸丸 芳揮 (Jikumaru Yoshiki)⁴, 梶原 健司 (Kajiwara Kenji)⁵, 横須賀 洋平 (Yokosuka Yohei)⁶
¹ 九州大学 (Kyushu Univ.), ² 日本大学 (Nihon Univ.), ³ 京都大学 (Kyoto Univ.),
⁴ 東洋大学 (Toyo Univ.), ⁵ 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI, Kyushu Univ.),
⁶ 鹿児島大学 (Kagoshima Univ.)
 e-mail : masada.motoki.382@s.kyushu-u.ac.jp

1 概要

以前の講演で, $|(\text{軸力})| \times (\text{部材長})$ の和を最小化するという意味で力学的合理性を有する Michell–Prager 型トラス構造を, 可積分離散指数函数から構成できることを示した [1]. より一般に, 可積分離散正則函数から同様の手順で Michell–Prager 型トラス構造の生成が期待される. 本講演では, 可積分離散べき函数からトラス構造を構成し, その形状や力学特性について検証した結果を報告する.

2 離散べき函数

グラフ $G = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$ ($V = V(\mathbb{Z}^2)$: 頂点集合, $E = E(\mathbb{Z}^2)$: 辺集合), 写像 $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ に対し, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$, $\mathbf{r}_{\pm 1} = \mathbf{r}(n \pm 1, m)$, $\mathbf{r}_{\pm 2} = \mathbf{r}(n, m \pm 1)$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}(n + 1, m + 1)$ と書く.

定義 1 (Bobenko–Pinkall, 1999[2]) $0 < \gamma < 2$ とする. 写像 $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(n, m) \mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$ が初期条件 $\mathbf{r}(0, 0) = 0$, $\mathbf{r}(1, 0) = 1$, $\mathbf{r}(0, 1) = e^{\gamma\pi i/2}$, および

$$Q := (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{12})^{-1}(\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^{-1} = -1, \quad (1)$$

$$\gamma\mathbf{r} = 2n \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-1})}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{-1}} + 2m \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-2})}{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{-2}}, \quad (2)$$

をみたすとき, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$ を指数 γ の離散べき函数 (discrete power function) という.

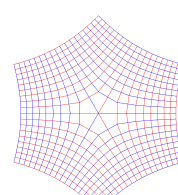
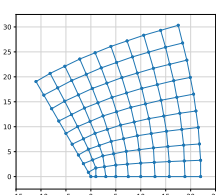
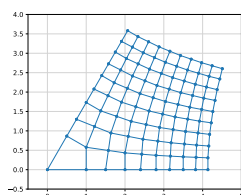


図 1. 離散べき函数 ($\gamma = 2/3$) 図 2. 離散べき函数 ($\gamma = 4/3$) 図 3. $\gamma = 2/3$ で定義域を拡張.

(1), (2) は過剰決定系であるが, 整合的である [3]. 内部の点 $(n, m > 0)$ は (1) で決まり, 境界となる点 $(n = 0$ および $m = 0)$ は (2) で決まる. さらに, 定義域は拡張することが可能である [4](図 3).

なお, (1) は離散等温網 (discrete isothermic net)[5] または離散正則函数 (discrete holomorphic function)[6] を定める式で, 4 点 $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_2$ がこの順で同一円周上にあることを意味する. 離散等温網 $\mathbf{r}$ に対して, 次式で定まる $\bar{\mathbf{r}}$ を $\mathbf{r}$ の Christoffel 変換という ($\mathbf{r}^*$ は $\mathbf{r}$ の複素共役):

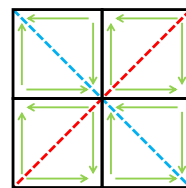
$$(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}^*) = C, \quad (\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}^*) = -C, \quad C : \text{任意定数}. \quad (3)$$

定理 2 (Schief, 2014[7]) $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を離散曲率線網, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ を純せん断力とする. 組 $(\mathbf{r}, F)$ の力とモーメントが釣り合うためには, $\mathbf{r}$ が離散正則函数であることが必要十分である. このとき, 力

F のなす格子は r の Christoffel 変換 $\bar{r}$ で与えられる (r : form diagram, $\bar{r}$: force diagram とよぶ).

3 Michell–Prager 型トラス構造

Michell トラスについては、「各部材に対する $|(\text{軸力})| \times (\text{部材長})$ が構造全体で一定である」という性質がよく知られており、本講演ではこの性質をもつトラス構造のことを **Michell–Prager 型トラス構造**



(Michell–Prager type truss structures) とよぶ. 純せん断力で釣り合う面要素の対角線は, 釣り合い状態にあるトラス構造を生成し (図 4), これにより離散べき函数からトラス構造を構成できる. 特に離散等温網の対角線のなす構造は Michell–Prager 型トラス構造であり, 部材長の対数の符号付き和をエネルギー汎函数とする変分原理で統制される.

4 主結果

離散べき函数の対角線から図 5 に示す部分構造を抽出し, 離散等温網が純せん断力で釣り合う状態に対応する荷重を設定したところ, このトラス構造は近似的に Michell トラスであることがわかった. 以下は構造解析の結果の一例である. 図 5 は軸力分布を表し, 黒の三角形は固定点, 矢印は節点荷重, 赤色 (青色) は圧縮力 (引張力) が生じている部材, 色の濃淡は軸力の大きさを表す. 図 6 は, Michell 型汎函数による最適化前 (before, 薄灰色の点線) と最適化後 (after, 濃灰色の実線) の比較である.

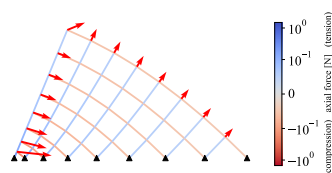


図 5. 軸力分布 ($\gamma = 1.5, N = 18$)

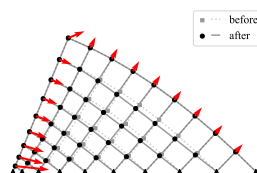


図 6. 最適化前後の比較

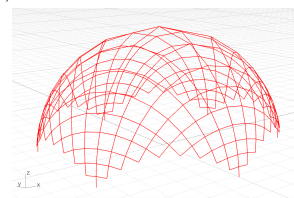


図 7. メビウス変換による 3 次元構造

なお, 離散等温性はメビウス不変であり, 今回のトラス構造にメビウス変換を施すことで, 釣り合いを保ったまま 3 次元構造を構成できる (図 7). 実際の応力分布や力学特性は今後検証予定である.

参考文献

- [1] K. Hayashi et al., Parametric generation of optimal structures through discrete exponential functions: unveiling connections between structural optimality and discrete isothermicity. *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol. 67(3)(2024), 41.
- [2] A. I. Bobenko, U. Pinkall, Discretization of Surfaces and Integrable Systems, in: *Discrete Integrable Geometry and Physics* (1999), pp.3–58.
- [3] F. Nijhoff, H. Capel, The Discrete Korteweg–de Vries Equation, *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 39 1-3 (1995), 133-158.
- [4] H. Ando et al., An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, *Funkcial. Ekvac.*, Vol. 57(1)(2014), 1-41.
- [5] A. Bobenko, Y. Suris, *Discrete Differential Geometry*, AMS, 2009.
- [6] A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, *J. Reine. Angew. Math*, Vol. 475 (1996), 187-208
- [7] W. K. Schief, Integrable structures in discrete shell membrane theory, *Proc. R. Soc. A*, Vol. 470 (2014), 20130757.