

局所二次形式近似による2次元CG流体渦場の幾何学特徴の抽出

丸山, 哲
九州大学大学院芸術工学府

鶴野, 玲治
九州大学大学院芸術工学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/7385406>

出版情報 : The Journal of the Institute of Image Electronics Engineers of Japan. 50 (3), pp.411-418, 2021. 画像電子学会

バージョン :

権利関係 : © 2021 The Institute of Image Electronics Engineers of Japan



局所二次形式近似による 2 次元 CG 流体渦場の幾何学特徴の抽出

丸山 哲[†] 鶴野玲治[‡] (正会員)[†]九州大学大学院芸術工学府, [‡]九州大学大学院芸術工学研究院

Local Quadratic Approximation of 2D CG Vorticity Field and Extraction of Geometric Features

Satoshi MARUYAMA[†], Reiji TSURUNO[‡] (Member)[†]Graduate School of Design, Kyushu University, [‡]Faculty of Design, Kyushu University

CG 向けに最適化された安定性の高い既存の流体シミュレーション手法は美しくリアルな視覚結果をもたらすが、それらは特定の物理的条件を満たすように作られており、幾何学的に不自然な視覚結果を出力することがある。これを解決するために、流体の挙動を幾何学的手法で近似する考え方に基づき、適切な数値モデルを開発することが考えられ、視覚的・幾何学的に自然な流体挙動を少ない計算量で得られるメリットが見込まれる。本研究ではシミュレーションされた流体の渦場を局所的に二次形式の関数で近似する手法と、近似結果を利用した渦場の様々な幾何学特徴の抽出手法を提案する。本手法で流体内の 1 点の近傍での二次形式の幾何学(楕円, 放物線, 双曲線)の構造を判別し、結果が楕円である場合に渦の形状と相性の良い特徴(楕円の中心位置, 縦横比など)を抽出する。また、その幾何学特徴と流体の物理的特徴の関連性も調査し、楕円なら渦の中心付近, 放物線または双曲線なら流れの歪みの関連性が高いことを示す。さらに本手法の応用として流体の渦の細部を上げる既存手法を修正し、よりリアルで幾何学的整合性が良い渦場を作ることに成功した。

キーワード: シミュレーション, 流体, 二次形式, 渦場, セグメンテーション

<Summary> In this paper, we propose a method of numerically approximating vorticity of simulated fluid and extracting their various geometrical characteristics. Our method uses quadratic forms in the approximation process, which can determine the structure of quadratic geometry of vorticity (ellipse, parabola, hyperbola). If the result is an ellipse, we can further extract useful geometrical information such as the center and major/minor axis length of an ellipse. We also investigate the relationship between these geometrical features and physical features of vorticity and show that an ellipse is near the center of the vortex while the parabola or hyperbola is highly related to the flow strain. Our method can be used to improve geometrical artifacts from existing fluid simulation methods such as vorticity confinement.

Keywords: simulation, fluid, quadratic form, vorticity, segmentation

1. はじめに

流体を高いディテールでリアルに CG で再現するために、少ない計算量で CG 向けに最適化された安定性の高いシミュレーション手法がいくつか考案されてきており、その多くは実用性も高い。ただし、特定の状況下では現実的にあり得ない結果を出したり、計算パフォーマンスが悪化したりすることが指摘されている。そこで、流体の「幾何学的特徴」を頼りに、それらの手法を改良することが行われている。流体を幾何学的に調査し、そこで何らかの幾何学法則を見出すことは、解くのが非常に困難なナビエ-ストークス方程式を、流体の幾何学構造を模倣したモデルを置くことで解けるようになる、或いは、別の解きやすい方程式に変形する手助けとなる。

よって、シミュレーションの計算効率向上につながる。ただし、その幾何学構造を知るためにはそれを測る尺度が必要であり、流体から幾何学構造の抽出の際の計算が煩雑になったり、計算コストがかかったりすることがある。本研究は、渦場が楕円や双曲線など、局所的には単純な幾何学形状に類似しているという性質に注目し、ある時刻における流体渦場からの幾何学的特徴抽出のための簡易的な手法を 2 種類に分けて提案する。さらに、導出した渦の幾何学構造が、流体の物理的特徴と強い相関があることを明らかにする。また、応用例として、流体のディテール向上手法の一つである **Vorticity Confinement** を、より幾何学的に妥当で、メリハリのある流れが作れるように改良する。

2. 関連研究

グリッド計算による流体シミュレーションは、Stam¹⁾の研究を始め、CG 分野に持ち込まれ、研究や実用も盛んとなっている。このタイプの手法の欠点として、グリッドが粗いと流れのディテールが失われるという点が挙げられる。渦補強手法²⁾は、グリッドの細かさを変えずに、渦の勾配に垂直な向きに人工的な力を発生させ、流れのディテールの減少を防ぐことでこの課題を解決している。ただし、渦補強が強い場合、大きいサイズの渦が分割していき、流れが拡散して滞るという現象が起こり、低周波と高周波の渦成分が混合した流れを表現することが困難である。これは、シミュレーションを粗い格子グリッド上で行った後、ポストエフェクト処理で適度なノイズを加えることで解決する。Kim ら³⁾の手法は、高周波のエネルギー特徴量がどこで失われるかを適切に判定してからノイズを適用しており、Horvath と Geiger⁴⁾は、ポストエフェクトノイズを適用して高ディテールでリアルな炎を GPU でシミュレーションすることに成功している。ただし、ノイズを用いているため、シミュレーションが決定的でなく、同じ条件下で異なる流れの結果が出る。

Kolmogorov の論文⁵⁾で流れのパワースペクトルと渦のサイズの分布の強い関係性が提唱されたのが皮切りになった、流れの幾何学構造の調査の研究分野では、渦場の幾何学要素を調べることが多い。例えば、Meunier et al.⁶⁾の手法は、同じ向きの渦が融合するプロセスをモデル化しており、パーリンノイズによる疑似流体⁷⁾に比べ、物理的に則したものになっている。ウェーブレット変換は、渦場の幾何学特徴を抽出するのに有用である。それは、様々なサイズの渦の分布の情報を提供し、渦場の情報量圧縮だけでなく、CG 流体への応用³⁾⁸⁾にも使える。ただし、ウェーブレットの基底の形状が一つしか選べないため、幾何学的な分類は不向きであり、計算量も多くなる傾向がある。

3. 手法概要

2次元非圧縮性流体が2次元有界閉領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ で定義されるとき、速度場 $\mathbf{v}: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ 及び圧力場 $p: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ の時間発展は次のナビエーストックス方程式によって推移する。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad \text{at } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega \quad (2)$$

ここで、 Re はレイノルズ数、 $\mathbf{f}$ は人工的な外力、 $\mathbf{n}$ は境界点における法線ベクトル、 $\mathbf{L} := \nabla \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ [$L_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$]は速度勾配テンソルである。境界条件は、速度場、圧力場ともにノイマン境界条件を用いている。このとき、渦場 $\omega: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は $\omega = \partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2$ と表される。渦場は全体的に強い非線形性を示しているが、図1に示すように、局所的に見れば、

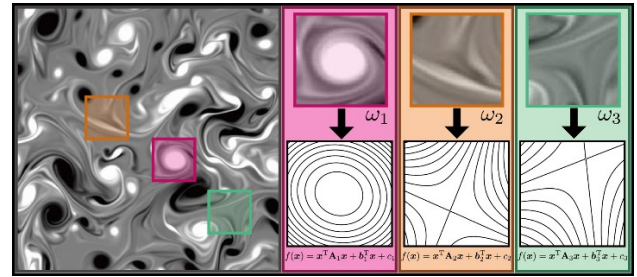


図1 渦場の局所二次形式近似の概要

Fig.1 Overview of local quadratic approximation of vorticity

ば、楕円や双曲線などの二次形式マップによって近似ができる。つまり、ある時刻における渦場 ω の位置 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$ を中心とした幅 d の正方形領域 $\mathcal{D}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} + \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \in [-d/2, d/2]^2\}$ において次の二次形式近似を行うことができる。

$$\omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \approx \mathbf{x}^T \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x} + \mathbf{b}^T(\mathbf{a})\mathbf{x} + c(\mathbf{a}) \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{A}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{b}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^2$, $c(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}$ である。本論文では、4章でこれらの二次形式係数のそれぞれの点 $\mathbf{a} \in \Omega$ における最適な値を求めるための手法を提案し、5章で二次形式係数と渦場の関係性や、その幾何学的な性質を抽出する。さらに、6章で抽出した幾何学的な性質と、流体の物理的な性質との関連性を見出す。

4. 事前計算された渦場の局所二次形式近似

変数 $\mathbf{A}(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}(\mathbf{a})$, $c(\mathbf{a})$ を決定するために、次に示す2通りの近似手法のうちのいずれかを用いる。

4.1 アプローチ1: テイラー展開による近似

渦場 ω が位置 $\mathbf{a}$ において二階微分可能であるとする。 $\omega(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ の位置 $\mathbf{a}$ 周りの二次までのテイラー展開を行い、それぞれの方程式の係数を比較し、次のように係数群を決定する。

$$\begin{cases} A_{ij}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j \omega)(\mathbf{a}) \\ b_i(\mathbf{a}) = (\partial_i \omega)(\mathbf{a}) \\ c(\mathbf{a}) = \omega(\mathbf{a}) \end{cases} \quad [i, j \in \{1, 2\}] \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [-d/2, d/2]^2$, $\partial_i := \partial / \partial x_i$ である。微分の数値計算は差分法を利用する。

4.2 アプローチ2: 最小二乗法による近似

位置 $\mathbf{a}$ に関する係数群 $\mathbf{A}(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}(\mathbf{a})$, $c(\mathbf{a})$ は、以下の関数 $L: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を最小化することによって近似することもできる。

$$L(\mathbf{a}) := \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \left| \mathbf{x}^T \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x} + \mathbf{b}^T(\mathbf{a})\mathbf{x} + c(\mathbf{a}) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \right|^2 \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5)$$

ここで、 $\psi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ は $\psi_1, \psi_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ を用いて $\psi(\mathbf{x}) = \psi_1(x_1) \cdot$

$\psi_2(x_2)$ となり、領域 $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbf{0})$ の外で0になる関数である。以下、 $\psi = \exp(-|\mathbf{x}|^2/\sigma^2)$, $\sigma = d/6$ となるガウス関数で近似する。関数 L を最小化するために、式(5)の右辺を各係数群の成分で微分し、それぞれの結果に0を代入することで、 $\mathbf{A}(\mathbf{a}), \mathbf{b}(\mathbf{a}), \mathbf{c}(\mathbf{a})$ に関する連立方程式を得る。 $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}$ より、方程式の数は6つであり、解は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \Phi_{ij} * \omega, \quad \Phi_{ij} = M\left(\frac{2}{\pi\sigma^6}\phi_{ij} - \frac{1}{\pi\sigma^4}\psi\delta_{ij}\right) \\ b_i &= \Phi_i * \omega, \quad \Phi_i = M\left(\frac{2}{\pi\sigma^4}\phi_i\right) \\ c &= \Phi * \omega, \quad \Phi = M\left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\psi - \frac{1}{\pi\sigma^4}(\phi_{11} + \phi_{22})\right) \end{aligned} \quad (6)$$

[i, j ∈ {1, 2}]

ここで、 $\phi_{pq}, \phi_p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ は $\phi_{pq}(\mathbf{x}) := x_p x_q \psi(\mathbf{x})$, 及び $\phi_p(\mathbf{x}) := x_p \psi(\mathbf{x})$ であり、*は畳み込み演算、 M は原点中心の鏡面反転作用素 $(Mf)(\mathbf{x}) := f(-\mathbf{x})$ を意味する。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。渦場の局所二次形式近似を定義域の全部の点で行うためには、上の解をその点ごとに求める必要があるが、畳み込み演算で高速フーリエ変換を利用することで解の計算を全部の点でテクスチャとして一括処理できる。実際の計算では、6つの定数テクスチャ Φ_{ij}, Φ_i, Φ [i, j ∈ {1, 2}]や渦場テクスチャ ω にフーリエ変換を施し、それぞれの結果を掛け算処理したテクスチャを逆フーリエ変換することにより係数場を求めることができる。このとき、テクスチャはすべて同じサイズで、定義域が $[-s, s] \times [-1, 1]$ (ただし、 s はテクスチャのアスペクト比)、原点の座標はテクスチャの中心に設定する。

4.3 2つの近似手法の比較

テイラー展開による近似手法を用いる場合、元の渦場 ω に対して単純で正確な近似を行うことができるが、評価位置 $\mathbf{a}$ において2回微分可能でない状況が生じると、この手法は使えない。また、テイラー展開は一点における偏微分の情報だけで評価する。この微分は、解析的な評価を行うには最適であるが、数値計算(格子グリッドの差分法)の場合は評価点とその周囲の格子点8点のみを合わせて評価するため、粗い格子グリッド上では誤差が発生しやすく、不連続なデータでは不安定な値を出力しやすい。一方、最小二乗法を用いる近似手法の場合、周辺の点まで考慮して近似する。計算コストが上昇し、その点での近似結果がテイラー展開のそれと比べて数理的な厳密性に欠けるが、数値計算との相性がよく、不連続な変化に対応可能で、周辺領域との関係性を明確に調べられる。また、粗い格子グリッド上の評価でも大きく値が崩れることがないため、不正な結果を出力しにくい。

2種類の近似結果の差異の詳細を調べるために、最小二乗法によって導出した係数群 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ から、元の渦場 ω を復元することを考える。以下、特に明記しない限り、アインシュタインの縮約記法を用いることにする。復元渦場 $\tilde{\omega}$ に対し再び最小二乗法近似を適用した際の係数 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}$ がそれぞれ $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に一致すると仮定すると、 $\tilde{\omega}$ を次のように選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\mathbf{a}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\pi\sigma^2} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{A}(\mathbf{a} - \mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{b}^T(\mathbf{a} - \mathbf{x}) \mathbf{x} \\ &\quad + c(\mathbf{a} - \mathbf{x}) \} e^{-|\mathbf{x}|^2/\sigma^2} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} (\psi_{kl} * \mathbf{A}_{kl} + \psi_k * b_k + \psi * c)(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)で、ガウス関数を用いた畳み込み演算が行われていることから、復元渦場 $\tilde{\omega}$ の計算は係数場 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の計算と同様に高速フーリエ変換を利用することができ、元の渦場 ω に比べ、ややばかしが加わったような出力になると予想できる。また、 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ より、最小二乗法を用いた場合の係数群 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は、テイラー展開を用いた場合のそれと比べてボケが付与され、情報量も低下すると予想できる。これは、渦構造のディテールを調べるのには不適切だが、大まかな構造を調べるのには有効である。

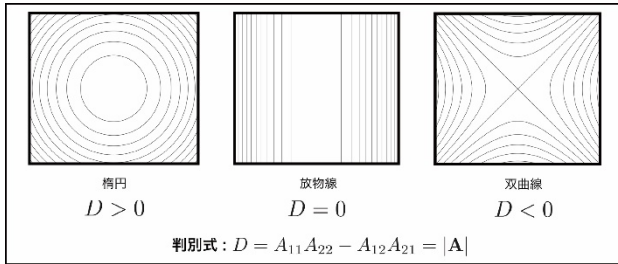
5. 二次形式マップとしての渦場の幾何学

$\mathbf{R}^2$ 上で定義された二次形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ は、そのグラフの特徴によって、楕円型、放物線型、双曲線型のいずれかのマップに分けられる。この幾何学的性質は、 $\mathbf{A}$ の行列式の符号を調べることによって数学的に区別(セグメンテーション)することもできる。具体的には図2のように、楕円型なら $|\mathbf{A}| > 0$ 、放物線型なら $|\mathbf{A}| = 0$ 、双曲線型なら $|\mathbf{A}| < 0$ となる。乱流のような高レイノルズ数の流体によって生成される渦場は、ほとんどの場合、ほぼ全領域で非線形性を示すため、その二次形式近似が線形的特徴のみしか持たない事象($\mathbf{A} = \mathbf{0}$)は無視できる。渦近似の式(3)中の係数行列 $\mathbf{A}$ は評価点 $\mathbf{a}$ によって変化する。つまり、その行列式 $|\mathbf{A}|$ も $\mathbf{a}$ によって変化し、幾何学情報もそれに続いて変化することを意味する。後述の結果に示すように、渦場のセグメンテーションの出力は、どの近似手法を用いるかによって大きく異なる。

渦場のセグメンテーションにより評価点 $\mathbf{a}$ で $|\mathbf{A}| > 0$ となる時、つまり、点 $\mathbf{a}$ での渦場が楕円型の性質を示すとき、楕円に関する様々な有益な幾何学的情報を得ることができる。図3ではその例を示している。図3中の白い点が評価点であり、領域 $\mathcal{D}$ においてそれが原点に対応する。セグメンテーション結果が楕円型であるときの二次形式マップ $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ を示しており、楕円形の中心 s や長軸ベクトル $\lambda_1 \mathbf{q}_1$ 、短軸ベクトル $\lambda_2 \mathbf{q}_2$ [$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ は単位ベクトル]、水平線からの角度 α が取れる。このとき、原点におけるマップ勾配 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$ に垂直なベクトル $\mathbf{n}$ は必ずしも2つの軸ベクトルと平行になるとは限らない。楕円の中心点 s は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{b}$ を用いて次のように求まる。

$$s = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (8)$$

残りの特徴量 $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ はそれぞれ $\mathbf{A}$ の固有値及び固有単位ベクトルに一致する。ここで、 $\mathbf{A}$ は対称行列であるため、固有値は必ず2つの実数解を持ち、対応する固有単位ベクトル

図2 $|A|$ の符号の違いによる、二次形式のグラフの特徴Fig.2 Visualization of quadratic form of different signs of $|A|$

ルはそれぞれ直交する。したがって、 $\mathbf{q}_1 \perp \mathbf{q}_2$ が保証される。これらの導出はどちらの近似手法を選んでも同じである。二次元流体では、渦が楕円形に類似していることから、渦の中心付近では、導出した楕円の幾何学的特徴と渦の幾何学的特徴がほぼ一致すると考えられる。つまり、渦の中心が楕円の中心 s に、渦の長軸・短軸がそれぞれ楕円の長軸 $\lambda_1 \mathbf{q}_1$ ・短軸 $\lambda_2 \mathbf{q}_2$ に、渦の角度が楕円の長軸角度 α になると考えられる。

6. 流体の物理的特徴量と幾何学的特徴量の関連

二次元流体では一般的に、渦の中心に近い領域では楕円型の性質を示し、それ以外の、例えば直線的な箇所や引き伸ばされたような箇所では双曲線型の性質を示すと考えられる。このことは、速度の角度変化を示す回転テンソル $\mathbf{W} := (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2 = (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)/2$ や、速度の引き伸ばしを表すひずみテンソル $\mathbf{D} := (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2 = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2$ といった流体の物理的性質との関連性を追求することに繋がる。ただし、行列のままだと扱いにくいので、代わりにエネルギー散逸 $\mathbf{D}:\mathbf{D}$ [ここで、 $\mathbf{X}:\mathbf{Y} = X_{kl}Y_{kl}$]及びエンストロフィー $\mathbf{W}:\mathbf{W}$ などのスカラー場を用いることにする。このとき、 $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ 、 $\mathbf{L}:\mathbf{L} = \mathbf{D}:\mathbf{D} + \mathbf{W}:\mathbf{W}$ が成り立つことを利用し、次のような変数 γ を考える。

$$\gamma := \frac{\mathbf{D}:\mathbf{D}}{\mathbf{L}:\mathbf{L} + \epsilon} = \frac{\mathbf{D}:\mathbf{D}}{\mathbf{D}:\mathbf{D} + \mathbf{W}:\mathbf{W} + \epsilon} \quad (9)$$

ただし、 ϵ は $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ での γ のゼロ除算を防ぐための微小な定数で、本研究では $\epsilon = 10^{-6}$ と設定する。定義(9)から直ちに

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (10)$$

が成り立つ。これは、 γ が0に近いほどより回転の性質が強く、1に近いほど引き伸ばしの性質が強いことを意味する。式(10)で値を制限することにより、 γ は他の物理的特徴量 $\mathbf{D}:\mathbf{D}$ や $\mathbf{W}:\mathbf{W}$ よりも幾何学的に相性が良くなる。このとき、 γ は $|A|$ などの幾何学的な情報を内包していないことに注意すべきである。よって、幾何学的特徴 $|A|$ と物理的特徴 γ との関連性を調べるのが優先される。本研究では数値計算の結果を用いて比較を行う。

7. 結果

前部において、渦場の二次形式近似のための複数の手法を

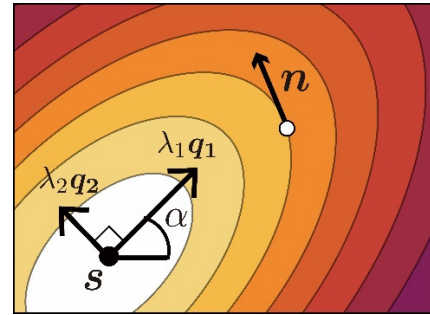


図3 楕円の特徴量の例

Fig.3 Geometrical characteristics of an ellipse

提示した。以下では、それらを用いて渦場の二次形式に準ずるセグメンテーションを実証し、そこから渦場の楕円に関する幾何学情報を抽出する。また、渦場の物理的性質を示すスカラー場と幾何学セグメンテーション結果の関連性を図解により明らかにし、導出した幾何学的特徴量の流体シミュレーションにおける応用例をいくつか紹介する。以下に現れる全ての渦場は2次元であり、式(2)で示した境界条件を満たし、レイノルズ数が $Re = 10,000$ である2次元流体のシミュレーションによって生成されるとする。シミュレーションの数値計算において、領域は解像度幅256px、高さ256pxの矩形とし、Stam氏の手法⁹⁾に従い計算する。計算の安定化と差分近似によって生じる全体的な誤差を減らすために、スタaggerド格子を用いた中心差分による計算を行う。速度場の移流計算はDupont氏⁹⁾が提唱したSemi-Lagrangian法のバックトレースによってなされる。また、以下の結果では常に $\sigma = 0.03$ を採用している。なお、本研究のシミュレーションは、本研究の著者が作成した、マウスに反応するインタラクティブなアプリケーションによってリアルタイムに行われ、領域内でポインタをマウスボタンを押しながら移動させると、その位置近傍に外力 f を移動方向に発生させる仕組みになっている。本研究の結果画像はすべて、動作しているアプリケーションからスクリーンショットをしたものである。

7.1 二次形式に準ずるセグメンテーションと、楕円の幾何学情報の抽出

この節では、前部の2種類の近似手法ごとに、シミュレーションで生成された渦場のセグメンテーションの実証と幾何学的特徴の抽出を行った結果を示す。図4は2種類のセグメンテーション結果を表しており、渦場は50%グレー領域をゼロとし、白が正の値、黒が負の値を表し、セグメンテーションではグレーが放物型または双曲型領域で、白と黒が楕円型領域を示す。図4から、テイラー展開を用いた場合、最小二乗法を用いた場合と比べて構造が複雑になり、結果からは視認できないほど渦度のコントラストが比較的弱い部分でも構造分けを行う一方、最小二乗法を用いた場合、弱いコントラストが無視され、構造がシンプルになることが確認できる。

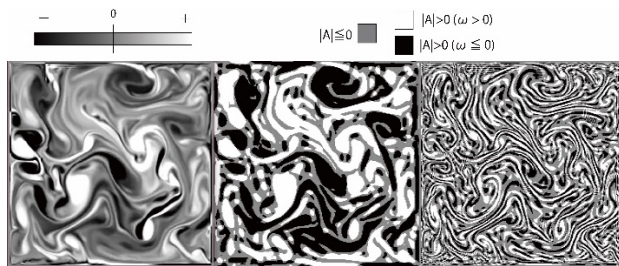


図4 渦場のセグメンテーション結果

左：ある時刻における渦場 ω
 中央：最小二乗法を用いた場合のセグメンテーション結果
 右：テイラー展開を用いた場合のセグメンテーション結果

Fig.4 Vorticity segmentation results

Left: vorticity ω at a given time
 Center: segmentation result using the least square method
 Right: segmentation result using the Taylor expansion

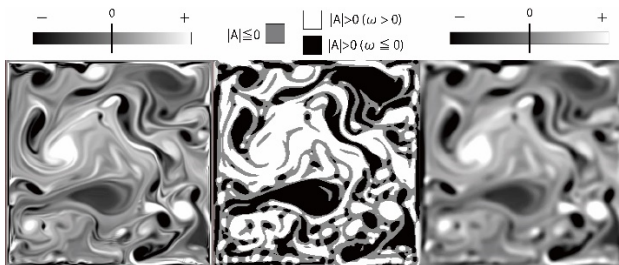


図5 最小二乗法を用いた場合の渦場の復元結果

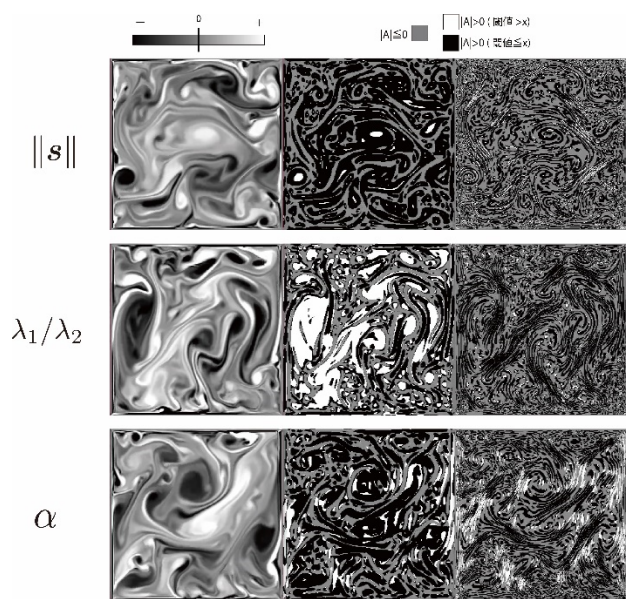
左：ある時刻における渦場 ω
 中央：最小二乗法を用いた場合のセグメンテーション結果
 右：近似による係数群 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を用いた復元渦場 $\tilde{\omega}$

Fig.5 Reconstruction of vorticity from least square characteristics

Left: vorticity ω at a given time
 Center: segmentation result using the least square method
 Right: vorticity $\tilde{\omega}$ reconstructed from approximation coefficients $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

特に顕著な箇所が、渦中心付近のセグメンテーションである。一個の弱い負の渦が強い正の渦の中に入り込んで融合し、渦度の拡散などで正の渦へ変化するような状況では、テイラー展開がその構造を差別化するのにに対し、最小二乗法では同じ構造とみなす。これに関連し、図5は、最小二乗法の近似後、式(7)によって渦場を復元した結果を示しており、復元渦場が元の渦場にガウスぼかしをかけたような結果になることを明らかにしている。したがって、近似の段階で渦場の細部の情報が切り捨てられ、テイラー展開に比べて結果が単純になる要因を生み出している。

次に、渦場の近似係数 $\mathbf{A}$ から、楕円に関する幾何学的特徴量を抽出する。図6は、セグメンテーションで楕円として判定された箇所($|\mathbf{A}| > 0$)において、それぞれ楕円の中心点と評価点との距離 $|s| = 0.1\sigma$ 、長軸短軸の長さの比率 $\lambda_1/\lambda_2 = 1.5$ 、長軸の水平線からの角度 α ($|\pi/2 - \alpha| = 0.4$)といった特徴量の閾値を設定し、 $|\mathbf{A}| > 0$ の領域における値が閾値未満なら白

図6 渦場の $|\mathbf{A}| > 0$ の領域における幾何学特徴量の閾値による色分け結果

左列：ある時刻における渦場 ω ，
 中央列：最小二乗法を用いた場合の色分け結果
 右列：テイラー展開を用いた場合の色分け結果

Fig.6 Classifications of vorticity according to threshold values of various elliptic($|\mathbf{A}| > 0$) characteristics

Left column: vorticity ω at a given time
 Center column: Classification in the least square method case
 Right column: Classification in the Taylor expansion method case

に、閾値以上なら黒に色分けし、それ以外の領域をグレーで色分けした結果を、2種類の近似手法別に示している。どちらの近似手法を用いても、特徴量の抽出結果が全く異なる性質を示していることがわかる。最小二乗法では渦度の見た目から特徴量を抽出するのに対し、テイラー展開では渦場内に在している詳細な特徴量を抽出するためである。このことから、渦場の形状について調べるのであれば、最小二乗法を用いるのが好ましい。

7.2 物理的特徴量と幾何学的特徴量の比較結果

流体の物理的な性質を、二次形式近似による幾何学的な性質で結びつけられるという仮説を検証するため、定義(9)で示した γ と二次形式近似によるセグメンテーション結果を画像で比較する。図7は図4と同等のセグメンテーション結果に、 $\gamma > 0.7$ の領域、すなわち引き伸ばされる傾向のある領域に対し、半透明の色塗りを赤で行い、加算処理した結果を示しており、渦場やセグメンテーションの画像を低コントラストで表示している。テイラー展開を用いた場合は関連性が少ないが、最小二乗法を用いた場合、双曲線型として認識された領

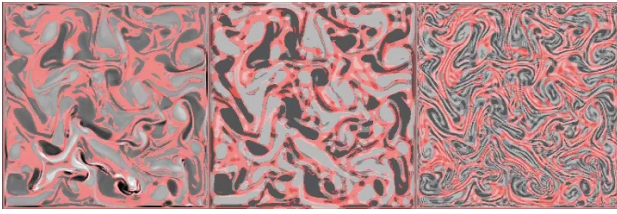


図7 セグメンテーション結果と γ の閾値との関係

Fig.7 Relationship between the segmentation result and a threshold value of γ

域に集中して塗られる傾向があり、強い相関性が確認できる。よって、最小二乗法では、引き伸ばされた領域と双曲線型の領域が類似するという仮説はある程度正しい。またこの結果は、流体の物理的特徴量と幾何学的特徴量を結びつける一例ともいえる。

7.3 渦の中心位置の検出

渦度の局所二次形式近似を応用し、渦の中心位置の検出の実証を行う。近似手法は最小二乗法を用い、セグメンテーションによって楕円と認識された領域において、それぞれの楕円の性質値（長軸短軸比、中心との距離）の閾値に関する条件を満たすような領域を抽出し、そこを渦の中心付近の領域として決定する。図8ではその結果を示し、推定領域はシミュレーション結果に上乗せる形で、オレンジ色で示してある。閾値の条件として、本研究では長軸短軸比 1.5 以下、中心との距離を 3 ピクセル未満と指定している。図8より、実際の渦の中心位置が、検出された予想中心位置にほぼ含まれている。また、渦が小さくコントラストが強い場合、中心位置の推定結果がほぼ一点に収束していることがわかる。ただし、渦の中心付近の山や谷の変化がある程度小さくなった場合、渦の予想中心位置の領域が広がっていくことが確認できる。また、引き伸ばされた箇所など、本来なら渦の中心ではない場所でも検出されることがある。この結果は、例えば渦巻フィルターの集合によって渦場をモデリングする際に、フィルターの中心位置がどのように分布しているのかを学習データで得る場合に利用することができる。

7.4 マスク処理された Vorticity Confinement

次の応用として、Fedkiw 氏が提唱した Vorticity Confinement 手法²⁾を、本研究の手法を利用して改良することを実証する。本研究では渦補強をそのまま全領域に適用するのではなく、補強箇所を、テイラー展開の近似によるセグメンテーションで楕円として認識されたところに限定するようなマスク処理を行う。渦が発生する箇所では形状が楕円形になる傾向があるため、渦を補強するならば、セグメンテーションで楕円として認識された領域に限定すべきである。マスク処理前と処

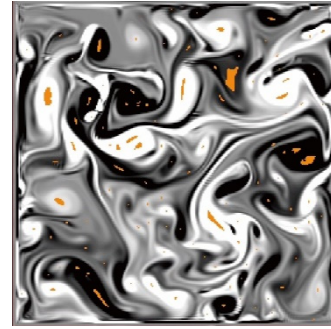


図8 ある時刻における渦場の渦の予想中心位置の推定

Fig.8 Position estimation of the center of vortices in vorticity at a given time

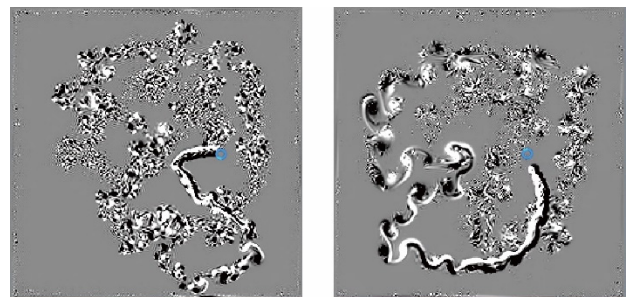


図9 渦場の Vorticity Confinement のマスク処理結果

左側：マスク処理なし 右側： $|A| > 0$ の領域にマスクを適用

Fig.9 Masked vorticity confinement result

Left : no mask operation

Right : mask applied within region where $|A| > 0$

理後の結果を図9で表している。マスク処理後の方が、強い乱流の性質を示しているが、流れの大まかな構造を失っていないのがわかる。また、図10は、簡単な2次元の煙のシミュレーションに応用した結果を示している。Vorticity Confinement のマスクなしでは細かな渦が滞ったまま上方向に流されていく一方、マスクありでは通常のシミュレーションで見える大まかな渦によって細かな渦が移流されていく様子が確認できる。このように、細かな渦を滞らせずに流れていくようにさせ、流れに変化を持たせたい場合や、層流と乱流の異なるサイズの渦が合わさっているような流れを作りたい場合に本手法が使用できる。

8. 考察と今後の課題

セグメンテーション結果や応用例から、テイラー展開が微細な幾何学特徴を抽出し、シミュレーションのディテールを上げるのに向いているのに対し、最小二乗法は大まかな幾何学特徴を抽出するため、渦場全体の幾何学構造を調べるのに向いていることがわかった。本研究で、流体の幾何学的特徴と物理的特徴を関連づけることに成功したことは、流体の流

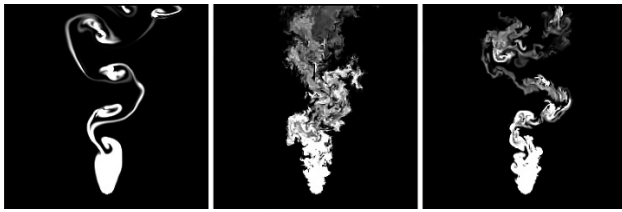


図10 2次元の煙のシミュレーション
 左側：通常(Vorticity Confinement なし)
 中央：マスクなしの Vorticity Confinement
 右側：マスクありの Vorticity Confinement

Fig.10 2D smoke simulation results

Left : without Vorticity Confinement
 Center : with Vorticity Confinement (no mask)
 Right : with Vorticity Confinement (mask applied)

れを数理的にモデル化する際に大きな意義があると考えられる。たとえ外因的な情報を頼りに流れがモデル化されたとしても、それが物理的に正しいことが裏付けられれば、よい流れモデルといえる。逆に、物理的に正しい流れに含まれる幾何学的な性質が導き出されれば、その幾何学構造を直接モデリングすることで、流れを物理的に導出するよりも計算時間が短くなることが考えられる。本研究の手法には制限があり、テイラー展開では渦が一方方向に引き伸ばされたときに、最小二乗法では渦場の幾何学スケールが検査領域よりも大きくなりすぎたときに正しい特徴抽出が行えないことが明らかになったので、状況に応じて手法を使い分ける必要がある。また、

$$\dot{\mathbf{A}} = \nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{L} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{L}^T \mathbf{b}) \quad (11)$$

が必ずしも 0 にはならないため、係数 $\mathbf{A}$ で示される幾何学情報は移流される間に保存されるとは限らない。移流による幾何学情報の保存は、幾何学情報がどこかへ逃げることが起こらないということを保証するため、重要な概念である。したがって、これらを考慮する場合は、二次形式係数とは異なる幾何学情報量を定義する必要がある。また、本研究の手法をそのまま3次元流体に拡張する場合は、渦場がスカラーからベクトルに変わるため、それぞれの成分毎に係数場 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を用意しなければならない。計算量が増大する。また、渦場が2次元と3次元で性質や構造が大きく異なるため、本研究の手法によって得られる幾何学的特徴量も3次元で別の性質を表すといった問題が発生する可能性がある。これは、3次元へ拡張する際に渦場そのものではなく渦糸などの別の適切な3次元的情報を考慮すれば解決できると考えられる。

9. おわりに

本研究では、渦場を局所的に二次形式の関数で近似する方法を開発し、近似結果を利用した渦場の二次形式の幾何学(楕円、放物線、双曲線)の判別手法を提案した。さらに、判別結果が楕円の場合、渦と相性が良い楕円の幾何学的特徴の抽

出方法を考案した。また、二次形式の幾何学的特徴と流体の物理的特徴の関係性も明らかにし、楕円の領域なら回転が、双曲線の領域なら歪みの度合いが強いことが分かった。さらに、本研究の手法の応用例として渦の中心位置の検出とマスク処理された Vorticity Confinement を紹介し、本手法の有用性を示した。本研究の結果が、物理的特徴と幾何学的特徴を関連付ける数理モデルの開発などに応用されることが期待される。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP20K12534 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) J. Stam: "Stable Fluids", Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '99, pp. 121-128, (1999).
- 2) R. Fedkiw, J. Stam, H. W. Jensen: "Visual Simulation of Smoke", Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '01, pp. 15-22 (2001).
- 3) T. Kim, N. Thurey, D. James, M. Gross: "Wavelet Turbulence for Fluid Simulation", ACM Transactions on Graphics, Vol. 27, No. 3, pp.1-6 (2008).
- 4) C. Horvath, W. Geiger: "Directable, High-Resolution Simulation of Fire on the GPU", ACM Transactions on Graphics, Vol. 28, No. 3, pp.41:1-41:8 (2009).
- 5) A. Kolmogorov: "The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers", Doklady Akademiia Nauk SSSR, Vol. 30, pp.301-305 (1941).
- 6) P. Meunier, S. Le Dizes, T. Leweke: "Physics of Vortex Merging", Comptes Rendus Physique, Vol. 6, No. 4-5, pp.431-450 (2005).
- 7) R. Bridson, J. Hourihane, M. Nordenstam: "Curl-Noise for Procedural Fluid Flow", ACM Transactions on Graphics, Vol. 26, No. 3, pp.46:1-46:4 (2007).
- 8) S. Jeschke, T. Skrivan, M. Muller-Fischer, N. Chentanez, M. Macklin, C. Wojtan: "Water Surface Wavelets", ACM Transactions on Graphics, Vol. 37, No. 4, pp.94:1-94:13 (2018).
- 9) T. F. Dupont, Y. Liu: "Back and Forth Error Compensation and Correction Methods for Removing Errors Induced by Uneven Gradients of the Level Set Function", Journal of Computational Physics, Vol. 190, No. 1, pp.311-324 (2003).

(2021 年 3 月 14 日 受付)

(2021 年 5 月 25 日 再受付)



丸山 哲

九州大学大学院芸術工学府博士後期課程在学中. 2018 年九州大学芸術工学部卒業, 2020 年九州大学大学院芸術工学府修士課程修了. コンピュータグラフィックス, 情報科学の研究に従事.



鶴野 玲治 (正会員)

九州大学大学院芸術工学府教授. 1987 年大阪府立大学大学院修了, 1993 年博士(工学). 九州芸術工科大学講師, 九州大学准教授などを経て現職, コンピュータグラフィックス, コンテンツ制作支援技術などの研究に従事, 情報処理学会, 芸術科学会, ACM, Eurographics などの会員.