综述黎曼ζ函数的零点分布

谢佳汶
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

出版情報：NU Ideas. 5 (1), pp.1-5, 2016-10-17. Nagoya University Writing Center
バージョン：

综述黎曼ζ函数的零点分布

Ade Irma Suriajaya[1]（中文名: 谢佳汶）
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

此文在描写黎曼ζ函数的解析性质与零点分布的同时，也将简单介绍黎曼ζ函数的零点分布与素数分布之间的关联。

In this paper, we give a brief description of the analytic properties and distribution of zeros of the Riemann zeta function. We also briefly introduce the relation between the distribution of zeros of the Riemann zeta function and the distribution of prime numbers.

1. 导入

黎曼ζ函数ζ(s)是无限级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots \quad (s>1) \tag{1.1}$$

在复数平面$\mathbb{C}$上的解析延拓（analytic continuation；即复变函数论上的函数定义域的推广方法）。$\zeta(s)$在$s=1$时具有一个简单极点（simple pole），这是其唯一的奇点（singularity）。格奥尔格·弗雷德里希·波恩哈德·黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann）在其1859年的论文“论小于给定数值的素数的个数”中首次把$\zeta(s)$称为复变函数。在此篇论文中，黎曼讨论了$\zeta(s)$与素数分布之间的关系。他发现$\zeta(s)$的非平凡零点（non-trivial zeros）的分布与素数分布具有密切的关联：$\zeta(s)$的零点指$\zeta(s)=0$的解，进而提出了一个猜想：$\zeta(s)$的非平凡零点全都在一条直线$\mathrm{Re}(s)=1/2$上。其中，$\mathrm{Re}(s)$表示复数点s的实部，直线$\mathrm{Re}(s)=1/2$被称为临界线（critical line）。此猜想被称为“黎曼猜想”（Riemann hypothesis）。

素数是除1和自身以外无法被其它正整数整除的数，如：$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,\ldots$，其序列的规则很难理解，但是素数对整数的理解又起着举足轻重的作用。因为，在高等代数里任意的正整数都能够被写为素数的乘积，因此，了解素数能够便于我们了解整数。也正基于这一理由，了解素数分布是数论中的一大课题。另外，素数也是加密（cryptography）里不可或缺的概念。事实上，为了构造密码，加密学家必须使用素数。由于黎曼（1859）首次讨论了$\zeta(s)$的零点分布与素数分布的关系问题，因此证明“黎曼猜想”的正确性就成了一个非常重要的难题。

此文主要描写黎曼ζ函数$\zeta(s)$的零点分布。在下一节中，我们首先对$\zeta(s)$进行简单介绍；第三节，我们将记述$\zeta(s)$的零点分布与素数分布的关联；第四节，我们将描写$\zeta(s)$的零点的既知分布，关键是介绍它的实部的分布与个数；最后在第五节中，我们将简单地介绍$\zeta(s)$的导函数的零点分布。

[1] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15J02325.

NU Ideas Volume 5, issue 1. 2016. Nagoya University Writing Center

2. 黎曼ζ函数的零点与“黎曼猜想”

无限级数(1.1)在复数半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上收敛，而且我们还可以证明它在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上解析。由此，$\zeta(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上解析。$\zeta(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上也可以表达为无限乘积

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \frac{1}{1-7^{-s}} \times \frac{1}{1-11^{-s}} \times \dots \quad (\mathrm{Re}(s) > 1). \tag{2.1}$$

此无限乘积表达式称为欧拉乘积（Euler product）。根据以上的乘积表达式(2.1)，$\zeta(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上非零，即没有零点。

$\zeta(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上也可以表达为积分

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \frac{[x] - x + 1/2}{x^{s+1}}\,dx. \tag{2.2}$$

在这一表达式中，$[x]$表示x以下最大的整数。积分(2.2)作用于所有满足$\mathrm{Re}(s) > 0$的s，即以积分表达式(2.2)，$\zeta(s)$在半平面$\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$上可以解析；而且，对于所有$s \in \mathbb{C}$，$\zeta(s)$还应满足以下关系式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{2.3}$$

此关系式(2.3)具有把$\zeta(s)$与$\zeta(1-s)$的值相关联的作用。根据表达式(2.2)和(2.3)，我们得到了$\zeta(s)$在复数平面$\mathbb{C}$上的解析延拓。式中的$\Gamma(s)$是欧拉Γ函数（定义省略）。$\Gamma(s)$是$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$上的解析函数，在非正整数点$s = 0, -1, -2, -3, \dots$中具有简单极点。此外，式中的三角函数$\sin(s)$是$\mathbb{C}$上的解析函数，在$s = \cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$中具有简单零点（simple zeros）。因为指数函数a^s $(a > 0)$为s的函数在$\mathbb{C}$上解析非零，也就是说它不具有奇点与零点，而$\zeta(s)$在半平面$\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$上的解析又在$s = 1$中具有简单极点，由此我们得知：$\zeta(s)$在负偶整数点$s = -2, -4, -6, \dots$中具有简单零点。这些零点被称为黎曼$\zeta$函数的平凡零点（trivial zeros）。$\zeta(s)$的$s = -2, -4, -6, \dots$以外的零点被称为非平凡零点（non-trivial zeros）。

“黎曼猜想”是假设$\zeta(s)$的所有非平凡零点都位于临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$上。对此，虽然目前数学界还依然没有找到足够的证据来验证这一猜想的正确性，但是根据$\zeta(s)$的解析性与关系式(2.3)，我们首先能够证明：若设ρ为$\zeta(s)$的非平凡零点，那么ρ应对称于实轴和直线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$。因为$\zeta(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > 1$上非零，根据其对临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$的对称性，$\zeta(s)$的非平凡零点ρ应位于0与1之间，表示为：$0 \le \mathrm{Re}(\rho) \le 1$。进而我们还能够证明：$0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$。此领域被称为临界带（critical strip）。因而可以说，$\zeta(s)$的非平凡零点应等价于$\zeta(s)$的临界带$0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$里的零点。

虽然我们目前还无法了解$\zeta(s)$的非平凡零点的精确位置，但是很多数学家对于$\zeta(s)$的非平凡零点进行了数值计算。现在我们确认了最初的十亿以上个$\zeta(s)$的非平凡零点位于临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$上（Van de Lune et al 1986）。之后，Xavier Gourdon（2004）在未出版的论文里验证了最初的十万亿个$\zeta(s)$的非平凡零点位于临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$上。这是目前取得的最新成果。

数学家们也做了很多证明试图使“黎曼猜想”得以成立。比如阿特勒·塞尔伯格（Atle Selberg）（1942），诺曼·莱文森（Norman Levinson）（1974），布莱恩·康瑞（Brian J. Conrey）（1989）探究过临界线上的$\zeta(s)$的非平凡零点的比率。Hung Bui, Brian Conrey 和 Matthew Young（2011）证明了$\zeta(s)$的非平凡零点的41%以上位于临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$上。这是目前取得的最佳研究成果。

3.“黎曼猜想”与素数的关联

设$\pi(x)$为x以下素数的个数，$\mathrm{Li}(x)$由积分

$$\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

定义。$\mathrm{Li}(x)$经常被称为对数积分（logarithmic integral）。1896年，雅克·阿达玛（Jacques Hadamard）与查尔斯·贞·德·拉·瓦莱-普森（Charles Jean de la Vallée-Poussin）独立的证明：存在某个常数$C, c > 0$使，当x充分大（x接近于∞）时，

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq C \left| \frac{x}{e^{c\sqrt{\log_e x}}} \right| \tag{3.1}$$

成立（参阅 Montgomery 和 Vaughan 2006: 179–180, 192, 195 和 197）。换句话说，对数积分$\mathrm{Li}(x)$近似于素数的个数函数$\pi(x)$。因为相对于素数的个数函数的研究，对数积分则是一个相对容易分析的连续函数，因此，式(3.1)可以使素数的个数函数$\pi(x)$得以被估计。式(3.1)也经常被称为强条件的素数定理（the quantitative form of the prime number theorem）。式(3.1)的证明里，$\zeta(s)$在$\mathrm{Re}(s) = 1$上非零的事实为不可缺的性质。故此，我们得了$\zeta(s)$与素数定理的关联。

1901年，尼尔斯·法比安·海里格·冯·科赫（Niels Fabian Helge von Koch）证明，假设“黎曼猜想”成立，存在某个常数$C > 0$使，当x充分大（x接近于∞）时，

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq C \left| x^{1/2} \log_e x \right| \tag{3.2}$$

成立（参阅 Montgomery 和 Vaughan 2006: 419, 447 和 450）。近似式(3.2)表示$\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$的误差。当x充分大时，设$E(x)$为$\pi(x)$和$\mathrm{Li}(x)$的误差值，如以下公式所示：

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + E(x),$$

我们能够证明存在常数$C > 0$使

$$E(x) \geq Cx^{\theta}$$

而θ不可能小于1/2，所以，近似式(3.2)是接近于素数定理的‘最佳’估算公式。可以说，“黎曼猜想”提供了素数定理的最小误差项。因此，为了了解素数分布，了解$\zeta(s)$的非平凡零点分布就显得更为重要。

4.黎曼ζ函数的非平凡零点分布

如在第二节所述，$\zeta(s)$的非平凡零点的精确分布依然未知。即使如此，我们知道它们对称于临界线$\mathrm{Re}(s) = 1/2$，即对于任意的$T > 0$

$$\sum_{\substack{\zeta(\beta+i\gamma)=0, \\ 0<\beta<1, \\ 0<\gamma<T}} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{4.1}$$

成立。在此，我们囊括了虚部大于0（在上半复数平面）小于T的$\zeta(s)$的非平凡零点的集合，包含其重复度。等式(4.1)表示$\zeta(s)$的非平凡零点的实部的分布。

1905年，汉斯·卡尔·弗里德里希·冯·曼戈尔特（Hans Carl Friedrich von Mangoldt）

研究了$\zeta(s)$的非平凡零点的个数问题。结合$\zeta(s)$的非平凡零点的实部的分布，我们可知$\zeta(s)$的非平凡零点的纵分布，即虚部的分布。具体来说，汉斯・冯・曼戈尔特证明：设$N(T)$虚部大于0小于T的$\zeta(s)$的非平凡零点的包含重复度的个数，存在某个常数$C > 0$使，当T充分大（T接近于∞）时，

$$\left|N(T) - \left(\frac{T}{2\pi}\log_e\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\right)\right| \leq C\log_e T$$

成立（参阅 Davenport 2000: 59–60）。

5. 黎曼ζ函数的导函数的零点分布（简介）

1935年，安德列亚斯·史本塞（Andreas Speiser）证明："黎曼猜想"成立的充分及必要条件是$\zeta(s)$的一阶导函数$\zeta'(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) < 1/2$上没有非实的零点。换句话说，"黎曼猜想"等价于$\zeta'(s)$在临界线的左边（半平面$\mathrm{Re}(s) < 1/2$）的所有零点都是实数零点（即虚部为0）。这一结果让科学家们也开始关注$\zeta(s)$的导函数的零点。此后，不少数学家开始探究$\zeta(s)$的导函数的零点。例如：Robert Spira（1965, 1970）考察了$\zeta(s)$的导函数的非零领域，Bruce C. Berndt（1970）研究它们的零点的个数，Norman Levinson 和 Hugh L. Montgomery（1974）探究了它们的实部的分布。2012年，赤塚广隆（Akatsuka Hirotaka）在假设"黎曼猜想"成立的前提下，得到了$\zeta(s)$的一阶导函数$\zeta'(s)$的更精确的零点的实部的分布与个数的评估公式。之后2015年 Ade Irma Suriajaya 又把赤塚广隆的这一结果对$\zeta(s)$的所有导函数进行了适用性验证，从而得到了"黎曼猜想"所假定的$\zeta(s)$的高阶导函数的零点分布的当前最佳估算公式。

References

Akatsuka, Hirotaka. 2012. "Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of $\zeta'(s)$." *Journal of Number Theory* 132 (10): 2242–2257.

Berndt, Bruce. C. 1970. "The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$." *Journal of the London Mathematical Society* 2 (Part 2): 577–580.

Bui, Hung, Brian Conrey and Matthew Young. 2011. "More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line." *Acta Arithmetica* 150 (1): 35–64.

Conrey, John Brian. 1989. "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 399: 1–26.

Davenport, Harold. 2000. *Multiplicative Number Theory*. Third edition. Revised and with a preface by Hugh Lowell Montgomery. New York: Springer-Verlag.

Gourdon, Xavier. 2004. "The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height." http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf

Levinson, Norman. 1974. “More than one third of zeros of Riemann’s zeta-function are on $\sigma = 1/2$.” *Advances in Mathematics* 13 (4): 383–436.

Levinson, Norman and Hugh Lowell Montgomery. 1974. “Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function.” *Acta Mathematica* 133: 49–65.

Montgomery, Hugh Lowell and Robert Charles Vaughan. 2006. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge: Cambridge University Press

Riemann, Bernhard. 1859. “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.” Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1859: 671–680.

Selberg, Atle. 1942. “On the zeros of Riemann's zeta-function.” *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I* 1942 (10): 1–59.

Speiser, Andreas. 1935. “Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion.” Mathematische Annalen 110: 514–521.

Spira, Robert. 1965. “Zero-free regions of $\zeta^{(k)}(s)$.” Journal London Mathematical Society 40: 677–682.

Spira, Robert. 1970. “Another zero-free region for $\zeta^{(k)}(s)$.” Proceedings of the American Mathematical Society 26: 246–247.

Suriajaya, Ade Irma. 2015. “On the zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function under the Riemann hypothesis.” *Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici* 53 (1): 69–95.

Van de Lune, Jan, Herman J.J. te Riele and Dik T. Winter. 1986. “On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV.” *Mathematics of Computation* 46 (174): 667–681.