

Geometry of hypersurfaces with zero or pinched anisotropic mean curvature in Euclidean space

井上, 俊実

<https://hdl.handle.net/2324/7363601>

出版情報 : Kyushu University, 2024, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :



氏 名	井上 俊実					
論 文 名	Geometry of hypersurfaces with zero or pinched anisotropic mean curvature in Euclidean space (ユークリッド空間の非等方平均曲率が零または挟まれた超曲面の幾何学)					
論文調査委員	主 査	九州大学	准教授	大津 幸男		
	副 査	九州大学	名誉教授	小磯 深幸		
	副 査	九州大学	教授	笹平 裕史		
	副 査	九州大学	教授	鍛冶 静雄		
	副 査	九州大学	准教授	森田 陽介		

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

非等方的平均曲率は曲面の平均曲率の非等方的な一般化であり、例えば液晶など非等方的な構造を持つ物体の形状を表現する際に自然に現れる量である。数学的には、球面上の与えられた正值関数（以下ではエネルギー密度関数と呼ぶ）を使ってユークリッド空間内の曲面の平均曲率をその方向毎にひねったものが非等方的平均曲率である。この研究ではエネルギー密度関数が C^∞ 級で、ある種の凸性を持つ場合について、平均曲率に関する重要な性質のいくつかが非等方的平均曲率に対して一般化されることを証明している。以下に主な結果を述べる。

本論文では、第 1 章で研究課題の概要を述べた後、第 2 章では非等方的極小曲面についての研究成果を述べている。非等方的極小曲面は、以下に述べるように、古くから研究されている極小曲面の一般化である。極小曲面は平均曲率が至る所 0 の曲面であり、面積汎関数の臨界点である。一方、曲面の各点での法線の向きに依存するエネルギー密度（上述のエネルギー密度関数の値）の曲面上での積分は面積の一般化であり、曲面の非等方的エネルギーと呼ばれる。同じ体積を囲む閉曲面の中で非等方的エネルギーが最小である曲面はウルフ図形と呼ばれる凸曲面であり、球面の非等方的な一般化となっている。曲面上の点を、単位法ベクトルが一致する球面上の点に対応させる写像が曲面のガウス写像であるが、球面の代わりにウルフ図形上の点に対応させる写像は非等方的ガウス写像と呼ばれる。曲面の非等方的エネルギーの臨界点は非等方的平均曲率が至る所 0 の曲面となり、非等方的極小曲面と呼ばれる。非等方的極小曲面には、変分法的性質を使ってモース指数の一般化である指数が定義される（小磯・Palmer）。指数は非等方的極小曲面の安定性を計る重要な量である。極小曲面には普通の指数の上からの評価（Tysk）と下からの評価（納谷）が知られていた。本研究者は完備な非等方的極小曲面の指数について、非等方的ガウス写像の位数の定数倍を使った上からの評価と、非等方的ガウス写像の分岐指数と元の曲面の種数を用いた下からの評価を得ることに成功した。また、その応用として、種数が 0 または 1 で全曲率が有限な完備非等方的極小曲面は、平面なければ不安定であることを示した。これは完備な極小曲面は平面に限るという Bernstein の定理のある条件下での拡張になっている。極小曲面の場合の指数の評価ではガウス写像が球面の分岐被覆と見なせて関数論を自由に使えることが有効に働いていたが、本研究においては関数論と類似の技術が非等方的極小曲面の研究にも拡張できること、例えばガウス写像の臨界点は集積しないことを示し、それを用いて分岐被覆の構造を持つことを示すことで上述のような結果が得られた。

第3章では、一般次元ユークリッド空間内の閉超曲面を扱っている。閉超曲面に対し、それを含む球の最小の半径を外在的半径という。平均曲率の絶対値の最大値と外在的半径の積が1以上になることが Hsanis-Koutroufiotis により示されており、等号が成り立つときその超曲面は外在的半径の球面と等長であることが知られていた。また、この積が1に非常に近いときはその超曲面と外在的半径の球面のハウスドルフ距離は近いことが Roth により示されていた。本論文では、平均曲率と球面を、それぞれ、非等方的平均曲率とウルフ図形に一般化したときにも同様の結果が成り立つことを証明している。

本研究では滑らかな非等方的極小曲面、非等方的平均曲率を中心に考察しているが、本研究者はこれからの研究の方向性として、滑らかでない場合にも様々な拡張を試みたいと述べていた。実際、結晶や液晶など物理現象として現れる曲面にはカドや頂点のような滑らかでない点が自然に現れるため、それらに成功すれば非等方的平均曲率及び非等方的極小曲面の自然現象の解明への応用にも役立つと期待できる。

以上の結果は微分幾何学の中の曲面論においても、数学の他分野への応用という観点からも価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。