

Geometry of hypersurfaces with zero or pinched anisotropic mean curvature in Euclidean space

井上, 俊実

<https://hdl.handle.net/2324/7363601>

出版情報 : Kyushu University, 2024, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :



氏 名 : 井上 俊実

論 文 名 : Geometry of hypersurfaces with zero or pinched anisotropic mean curvature in Euclidean space
(ユークリッド空間の非等方平均曲率が零または挟まれた超曲面の幾何学)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

ユークリッド空間内の超曲面の平均曲率は、超曲面の第二基本形式のトレースとして与えられる最も素朴かつ基本的な幾何学的量である。一方で、平均曲率は面積汎関数の変分を通して出現し、特に平均曲率が一定であるような超曲面は面積汎関数の条件付き極値問題の解であり、シャボン玉や石鹸膜の数理モデルとして知られている。平均曲率が一定であるという条件は、3次元ユークリッド空間内の安定な極小曲面は平面に限るという **Bernstein** の定理や、平均曲率一定な埋め込まれた超曲面は球面に限るという **Alexandrov** の定理に代表されるように、しばしば超曲面の形状に強い制約を与える。また、平均曲率が有界であるというより一般的な状況下でも、**Laplacian** の第 1 固有値に関する **Reilly** の不等式や、超曲面の外在的半径に関する **Hasanis-Koutroufiotis** の不等式を通して、平均曲率は超曲面に幾何学的制約を与える。

近年、平均曲率を一般化した非等方的平均曲率に関する超曲面の幾何学が盛んに研究されている。その設定を以下に述べる。超曲面 Σ および単位球面上の正值関数 γ で、その **Hessian** A_γ が正定値なものを考える。作用素 A_γ と、第二基本形式から定まる超曲面の型作用素 S を合成した作用素 $A_\gamma \circ S$ のトレースとして与えられるのが非等方的平均曲率である。平均曲率のときと同様に、非等方的平均曲率は表面エネルギー $\int_\Sigma \gamma(N)$ の変分を通して特徴付けられる。ここで、 N は超曲面 Σ に沿った単位法ベクトル場で、積分は面積要素に関して考えている。非等方的平均曲率が一定の超曲面は、結晶やネマチック液晶のような異方性を持つ物質の表面の形状の数理モデルとして知られており、応用上も重要である。また、 γ をサポート関数に持つような凸超曲面が(平行移動を除いて)ただ一つ存在し、**Wulff** 図形と呼ばれる。**Wulff** 図形は、同じ体積を囲む表面エネルギー最小の超曲面、 γ の双対ノルムが 1 で一定の超曲面など、非等方的設定における”球面”と考えられるような性質を有することが知られている。

上記の設定のもとで、平均曲率に関する古典的な結果の一般化が多くの研究者によってなされてきた。比較的最近の先行研究として、例えば、**O. Chodosh** と **C. Li (2023)** は 4次元ユークリッド空間内の非等方的平均曲率が零であるような超曲面(以下、非等方的極小超曲面)の **Bernstein** 問題について考察し、 γ が定数関数に C^2 の意味で近い場合に、安定な非等方的極小超曲面が超平面に限ることを示した。また、**J. Scheuer** と **X. Zhang (2023)** は、閉超曲面に関する **Heinze-Karcher** の不等式の非等方版について、その等号を殆ど成立させる超曲面は **Hausdorff** 距離に関して **Wulff** 図形に近いという意味で、**Wulff** 図形の定量的安定性を示した。

本学位論文では、等方的な場合に知られていた平均曲率の幾何学に関する種々の結果を、非等方

的な場合に拡張することを主目的として研究した. 具体的には, 非等方的極小曲面の Morse 指数, および閉超曲面に関する Hasanis-Koutroufiotis の不等式の非等方的一般化について考察した.

以下に, 本論文の内容の概要を述べる. 第 1 章では研究の背景および概要を述べる. 続く第 2 章では非等方的極小曲面を, 第 3 章では閉超曲面の非等方的平均曲率を扱う.

第 2 章では, 非等方的極小曲面上の Gauss 写像の特異点は孤立しているという, 極小曲面の場合に知られている事実の一般化を示し, その応用として極小曲面の場合に知られていた Morse 指数の評価の一般化を示した. Morse 指数とは, 汎関数の第二変分を通して定義される 2 階線形微分作用素の負固有空間の次元であり, 変分問題の解の安定性を測る量である. 極小曲面の場合の従来の Morse 指数の解析には, 多くの場合に Gauss 写像の正則性に由来した複素解析的手法が用いられてきた. この手法は非等方的な場合には適用できないため, 非等方的極小曲面の Morse 指数はこれまでに解析されていなかった. 本研究では, Gauss 写像の特異点の分布から, Gauss 写像が非等方的極小曲面から球面への分岐被覆写像になるという点に着目した Morse 指数の評価を行なった. より具体的には, J. Tysk (1987) による全曲率を用いた Morse 指数の上からの評価の一般化と, S. Nayatani (1990) によって得られた被覆写像の分岐指数を用いた Morse 指数の下からの評価の一般化を行なった. また, 後者の下からの評価の応用として, 種数が 0 または 1 の場合に, 平面でない安定な非等方的極小曲面の非存在性を示した.

第 3 章では, 閉超曲面の非等方的外在的半径を定義し, Hasanis-Koutroufiotis の不等式 (1973) の非等方的一般化および等号成立が Wulff 図形に限ることを示した. さらに等号を殆ど達成するような超曲面は Hausdorff 距離に関して Wulff 図形に近いことを示した. この結果は J. Roth (2007) による外在的半径のピンチング定理の非等方的一般化である. また, 等号を殆ど達成する超曲面に対して, 非等方的平均曲率と非等方的外在的半径の逆数との差に関する explicit な評価を得た.