

The Recurrence and Transience of Random Walks on Growing Graphs

熊本, 舟馬

<https://hdl.handle.net/2324/7363600>

出版情報 : Kyushu University, 2024, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :



氏 名	熊本 舟馬			
論 文 名	The Recurrence and Transience of Random Walks on Growing Graphs (成長するグラフ上のランダムウォークの再帰性と非再帰性)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	白井 朋之
	副 査	九州大学	教授	溝口 佳寛
	副 査	九州大学	准教授	角田 謙吉
	副 査	滋賀大学	教授	来嶋 秀治

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ランダムウォークの再帰性と非再帰性は、確率論における古典的かつ基本的な研究テーマであり、さまざまな設定で数多くの研究がなされてきました。例えば、 d 次元整数格子上の単純ランダムウォークは、 $d=1, 2$ のとき再帰的であり、 $d \geq 3$ のとき非再帰的であることが知られています。このことは一般の無限グラフ上のランダムウォークについても盛んに研究されており、例えば、無限 k 分木におけるランダムウォークは非常に強い非再帰性を示す典型例です。 d 次元整数格子の各頂点での推移確率がランダムに与えられているようなランダムな環境（ランダム媒質内）でのランダムウォークも大きな研究テーマであり、1970年代に Solomon により一次元ランダム環境下のランダムウォークの再帰性・非再帰性が研究されたのを皮切りに、Sinai、Zerner らをはじめとする多くの研究者によって発展してきました。これらの研究には、強化ランダムウォークや興奮ランダムウォークといった自己相互作用型のランダムウォークも含まれます。最近では、Amir や Dembo その他共著者らによって、時間的に変化するランダム環境における再帰性や非再帰性も議論され始めており、特に成長する d 次元格子の部分グラフや無限に成長する木に関する研究が進んできています。本論文の研究対象である、成長するグラフとは、固定されたグラフの増大列 $\{G(n)\}$ と $G(n)$ から $G(n+1)$ に成長するまでの時間幅をあらわす数列 $\{\partial(n)\}$ のペアで記述されるものを指します。この成長するグラフ上のランダムウォークは、実世界のネットワーク上の問題に取り組むうえで、実用的にも重要な研究テーマの一つです。たとえば、分散コンピューティングでは、各計算資源を頂点としたグラフを考え、そのグラフ上での探索問題、分散アルゴリズムの設計、ネットワークの特性評価（被覆時間、到達時間、混合時間）などにおいてランダムウォークが重要なツールとなっています。本論文では、特に成長するグラフ上のランダムウォークの再帰性と非再帰性を判定する条件に焦点を当てており、重要な貢献の一つは、以下に述べる LHaGG の概念の導入です。直感的には、成長するグラフでは、グラフの成長速度が遅いほどグラフが小さくなるため、原点から出発したランダムウォークの原点への再帰確率が大きくなると考えられます。この直感を定式化する性質として、「less-homesick as graph growing (LHaGG)」という概念を導入しました。この概念を通じて、成長するグラフ列が LHaGG であるとき、成長速度を表す数列 $\{\partial(n)\}$ 、各グラフ $G(n)$ の定常分布、および混合時間を用いて、成長するグラフ上のランダムウォークの再帰性と非再帰性に関する十分条件を与えています。成長するグラフが LHaGG であることは、十分条件を適用する際の仮定として必要ですが、それ自身が非自明な性質です。本論文では、(i) 高さが増加する完全 k 分木の増大列、(ii) 各辺の長さが増大する d 次元立方体グラフ、(iii) 次元が増大するハイパーキューブ（超立方体）グラフ、などの成長するグラフ列が LHaGG であることを証明しました。これらの証

明には、成長速度の異なる複数の成長グラフ上のランダムウォークを単調カップリングし、ある種の比較定理を用いる手法を採用しています。先行結果より適用範囲は狭くなる部分もありますが、直感的かつ簡明な証明が与えられています。この結果に基づき、十分条件をチェックすることで、上記の成長するグラフにおける再帰性と非再帰性の条件を具体的に与えました。また、LHaGGは自然な条件ではありますが、すべての成長グラフが満たすわけではなく、またチェックしにくい場合もあります。そのような場合には、LHaGGの定義の中の再帰確率を平均再帰回数に置き換えて、少し緩和した条件「weakly LHaGG」を導入し、その条件下での再帰性・非再帰性の十分条件を提示しました。この結果、例えば次元が増加する立方体グラフ、成長するスパイダー木やある種のランダム木が weakly LHaGG であることを示し、それらの場合にも再帰性・非再帰性を議論可能であることを確認しました。特に、これらの証明には停止カップリングという手法を用いており、比較的シンプルながらも有力なアプローチです。以上のように、増大するグラフ列に対して LHaGG や weakly LHaGG といった新しい概念や停止カップリングなどを導入し、理論的な新規性を持つ概念や手法を提示する点でも本論文は意義深いものです。また、広範なクラスの成長するグラフにおけるランダムウォークの再帰性と非再帰性に対する十分条件を提供するものであり、確率論および情報科学など応用分野においても価値ある研究であり、高く評価されるべき業績と認められます。

以上により、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があると認められます。