

## 区分線形近似を用いた動的計画法による軌道最適化

松田, 治樹  
九州大学大学院工学府航空宇宙工学専攻

原田, 明德  
九州大学大学院工学府航空宇宙工学専攻

宮沢, 与和  
九州大学大学院工学研究院航空宇宙工学部門

<https://hdl.handle.net/2324/7358032>

---

出版情報 : AEROSPACE TECHNOLOGY JAPAN, THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES.  
14, pp.33-41, 2015. 日本航空宇宙学会

バージョン :

権利関係 : © 2015 The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences



# 区分線形近似を用いた動的計画法による軌道最適化<sup>\*1</sup>

## Trajectory Optimization using Piecewise Linear Approximation Dynamic Programming

松 田 治 樹<sup>\*2</sup>・原 田 明 徳<sup>\*2</sup>・宮 沢 与 和<sup>\*3</sup>  
Haruki MATSUDA, Akinori HARADA and Yoshikazu MIYAZAWA

**Key Words:** Optimal Control, Optimal Flight, Optimal Trajectory, Optimization, Dynamic Programming

**Abstract:** The feasibility in optimal control applications is increasing in recent years with rapid improvement of computational capability. User-friendly practical tools are highly required to meet complex design requirements in the field of aerospace engineering and dynamic programming is regarded as a powerful tool that satisfies these necessities. On the contrary, dynamic programming possesses a drawback so called 'menace of the expanding grid' or dimensional difference problem in applications where the number of control variables is fewer than that of state variables. This paper proposes a unique method to approach this issue and reviews its validity and feasibility by discussing a classical problem of Linear Quadratic Regulator (LQR) and an optimal gliding flight of an airplane that the analytically given exact solutions are checked for clarity.

### 1. は じ め に

近年、電子計算機が驚異的な能力向上を果たし、以前は不可能とされた大規模かつ複雑な計算が現実のものとなっている。さらに計算資源が低廉化したことも影響し、開発の現場において最適制御を積極的に取り入れる動きがある。航空宇宙の開発現場においても、その複雑な要求に対応するべく、取扱いが容易で実用に耐える最適化ツールが必要とされている。本研究では、そのような最適化手法として動的計画法 (Dynamic Programming, DP) に焦点を当て、動的計画法の実用可能性について議論する。

動的計画法は、1950年代に Richard E. Bellman によって提唱された手法である<sup>1)</sup>。この手法は組み合わせを効率よく探索することができ、最適制御問題においては量子化された状態量の組み合わせを最適化することで問題を解く。収束計算の必要がないため事前に計算量の予測が可能であり、得られる解には大域的最適性を保証する。また、拘束条件の取扱いが容易であり、その変更にも手間を要しない。これらの動的計画法が持つ利点は他の最適化手法には見られないものである。Euler-Lagrange の微分方程式から最適性の条件として導かれる連立微分方程式を2点境界値問題として解く間接法は、複雑な拘束条件の取扱いが困難であり、その変更にも再度定式化を要する。また、汎用の数値計画法を用いる直接法は収束のための反復計算が必要であり、得られる解は初期推定解の与え方に大きく影響される。最適制御が開発の現場においてその威力を十分に発揮できない背景には、上に述べたような最適制御の取扱いの難しさがある。これに対して動的計

画法は、開発現場における要求を高い水準で満足することができる。変数の量子化が確立すれば、すなわち実用上十分な精度の解が得られるよう量子化することができれば、条件の変更に対応でき、反復計算の必要がないため限られた時間の中で大域的最適性を保証された解を得ることができる。このように開発現場における要求をほぼ満たしているかに見える動的計画法が、現状として敬遠されている原因には適用範囲の制限がある。その一つが「次元の呪い」である<sup>2)</sup>。状態変数の高次元化に伴い計算機への負荷が過大となるため、理論上実行可能なアルゴリズムがデバイスの性能に制限されて実行できない状態となることを指している。量子化された状態量の組み合わせを探索する動的計画法にとって次元の呪いは本質的かつ不可避な問題と言える。しかし計算機の処理能力の向上や計算量を削減するアルゴリズムの確立によって、この問題の影響は以前に比べて軽減されている<sup>3)~5)</sup>。次元の呪いが解消されつつある現在、これに代わり動的計画法の幅広い応用を制限する問題の一つとして、次元差の制約、すなわち状態変数と制御変数の次元差に起因する量子化誤差によって計算が困難となる問題が挙げられる。動的計画法は量子化された状態量の組み合わせとして最適解を得るが、状態変数と制御変数に次元差が存在する場合、特に制御変数の次元が状態変数のそれより小さい場合に解を得ることが困難となる。これは量子化された状態量間で遷移の自由度が不足し、選択可能な状態量だけでは組み合わせを考えるとできないからである。このような問題に関する研究は幾つかあるものの、未だ量子化誤差の抑制は困難である<sup>6)~9)</sup>。したがって、次元差の制約を緩和することにより、動的計画法の実用性は飛躍的に向上するものと考えられる。本論文では、量子化誤差、特に状態変数と制御変数の次元差に起因する量子化誤差を低減するような手法を提案し、動的計画法の実用範囲拡大の可能性を示すことを目的とする。

<sup>\*1</sup>©2015 日本航空宇宙学会。

平成26年10月9日、第52回飛行機シンポジウムにて発表

平成26年7月25日原稿受付

<sup>\*2</sup>九州大学大学院工学府航空宇宙工学専攻

<sup>\*3</sup>九州大学大学院工学府航空宇宙工学部門

## 2. 動的計画法と次元差の制約

**2.1 動的計画法による数値解法** ここでは、動的計画法を一般的に定式化し、状態変数と制御変数の次元差が数値解法に及ぼす影響を明らかにする。

制御対象とするシステムは、状態空間法により以下のように記述されるものとする。システムの状態方程式は状態変数ベクトルを用いて次式で表現される。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

状態変数の初期値が与えられる。

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

制約条件として状態変数と制御入力に不等式拘束条件が課される。

$$g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \quad (3)$$

ここでは独立変数を時間 $t$ とする。評価区間 $t_0 \leq t \leq t_f$ に対し、次式で定義される評価関数を最小化する最適制御問題を考える。

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (4)$$

よって、ある時刻 $t$ に、ある状態 $\mathbf{x}$ から終端まで最適な制御を行った際に実現される最適コスト関数 $J_{\text{opt}}$ は次式で表される。

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u}[t, t_f]} \left( \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \right) \quad (5)$$

ただし $\mathbf{u}[t, t_f]$ は時間区間 $[t, t_f]$ の制御入力関数を表している。ここで無限小時間を $dt$ とし、区間 $[t, t_f]$ の最適コスト関数を部分区間 $[t + dt, t_f]$ の最適コスト関数を用いて再帰的に表現する。

$$\begin{aligned} J_{\text{opt}}(\mathbf{x}, t) &= \min_{\mathbf{u}[t, t+dt]} \left\{ \int_t^{t+dt} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \right. \\ &\quad \left. + J_{\text{opt}}(\mathbf{x} + \mathbf{f}dt, t + dt) \right\} \\ &= \min_{\mathbf{u}} \{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt + J_{\text{opt}}(\mathbf{x} + \mathbf{f}dt, t + dt) \} \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式より連続系の Hamilton Jacobi Bellman の最適性の条件式が導かれるが、本論文では時間方向に離散化を行う。制御入力はサンプリング周期の一定時間において一定値、すなわちゼロ次ホールドを仮定する。時間を $N_t$ 分割し、 $k$ 番目の時刻を次式で定義する。なお、動的計画法では離散化された時刻を段と呼ぶ。

$$t_k = t_0 + (t_f - t_0)(k - 1)/N_t \quad (7)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_t + 1$$

デジタル計算機で数値計算を行う場合、このような独立変数方向の離散化は必須の処理であるが、動的計画法では状態量の量子化も必要となる。第 $k$ 段の状態変数 $\mathbf{x}_k = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$ についても同様に、それぞれ $N_i$ 分割することで $j$ 番目の量子化された状態量を定義する。これにより、独立変数と $n$ 個の状態変数からなる $n + 1$ 次元空間において、量子化された状態量がそれぞれ割り当てられた格子点を設定することができる。

$$x_{i,j} = x_{i \min} + (x_{i \max} - x_{i \min})(j - 1)/N_i \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N_i + 1$$

このような離散化を行い、タイムステップ幅 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ を導入すると、(6)式は次のように離散系で表現することが

できる。

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_k, t_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \{ L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \Delta t + J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) \} \quad (9)$$

また、終端における条件は次式となる。

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_{N+1}, t_{N+1}) = \phi(\mathbf{x}_{N+1}, t_{N+1}) \quad (10)$$

状態変数と制御変数の次元差が0、すなわち $n = m$ であれば、第 $k$ 段から第 $k + 1$ 段への遷移において、(1)式の状態の遷移を支配する $n$ 個の方程式に対し、それを実現する $n$ 個の制御変数が導かれる。これにより、終端から始点に向かって各段における最適コスト関数の値を計算することができ、また、最適な経路選択の情報を記録しておくことで量子化された状態量の組み合わせとして最適な軌道を得る。

これに対し本論文にて問題とするのは、 $m < n$ となる場合である。 $n$ 個の支配方程式に対し、制御変数の自由度がそれよりも少ない $m$ 個であることから、量子化された状態量の組み合わせとして軌道を求めることができない。これを動的計画法における次元差の制約とし、この問題に対して有効な手法を提案する。

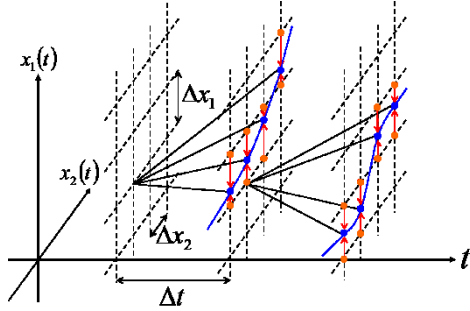
### 2.2 区分線形近似動的計画法

ここでは、次元差の制約に対して、これを緩和するような計算手法を提案する。動的計画法を用いた最適化では独立変数の離散化に加えて状態変数の量子化を行うが、本手法では状態変数方向には物理量が連続的に分布しているという近似を行う。すなわち通常の量子化は行うものの、その値は連続的な物理量を代表するものであり、必ずしも量子化された状態量の組み合わせとして解を導く必要がない。この手法を区分線形近似動的計画法 (Piecewise Linear Approximation Dynamic Programming, PLA-DP) と呼ぶことにする。本手法は2種類の区分線形近似を行う。1つは「最適コスト関数の近似」であり、もう1つは「最適経路選択情報の近似」である。

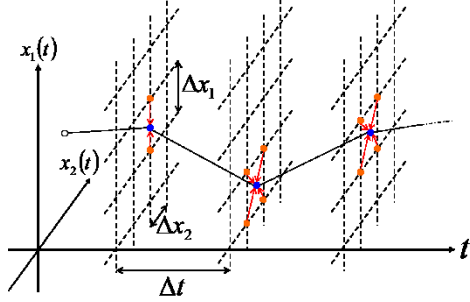
「最適コスト関数の近似」について説明する。以下で述べる内容を模式的に表したのが第1図である。ただしこの図では理解しやすいように状態変数を2次元、状態変数と制御変数の次元差を1としている。以下の議論は次元、次元差が増大しても同様に適用可能である。状態変数と制御変数に次元差が存在する場合、第 $k$ 段から第 $k + 1$ 段への遷移において、ある状態 $\mathbf{x}_k$ から遷移可能な状態 $\mathbf{x}_k + \mathbf{f}\Delta t$ が量子化された状態に一致するとは限らない。この場合は第 $k + 1$ 段の $\mathbf{x}_k + \mathbf{f}\Delta t$ に隣接する格子点の最適コスト関数 $J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1})$ を用いて線形補間し、 $J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_k + \mathbf{f}\Delta t, t_{k+1})$ とする。次元差に応じて複数回の内挿を行うことになるが、次元差1であれば1回の線形補間を行う。第 $k + 1$ 段において第 $r$ 番目の状態変数に遷移可能な状態量と量子化された状態量に不一致がある場合、 $x_{r,j-1} < x_r + f_r \Delta t < x_{r,j}$ とすると次式で内挿を行う。

$$\begin{aligned} J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_k + \mathbf{f}\Delta t, t_{k+1}) &= J_{\text{opt}}(x_{r,j-1}, t_{k+1}) \\ &\quad + \{ J_{\text{opt}}(x_{r,j}, t_{k+1}) - J_{\text{opt}}(x_{r,j-1}, t_{k+1}) \} \\ &\quad \times \{ (x_r + f_r \Delta t) - x_{r,j-1} \} / (x_{r,j} - x_{r,j-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし次元差 $p$ の系では $r$ の値は $p$ 個存在し、 $p$ 回の線形補間を行う必要がある。これを用いて第 $k$ 段での最適コスト関数を次式で求める。



第1図 最適コスト関数の近似



第2図 最適経路選択情報の近似

$$J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_k, t_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \{L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \Delta t + J_{\text{opt}}(\mathbf{x}_k + \mathbf{f} \Delta t, t_{k+1})\} \quad (12)$$

これにより、遷移可能な状態量と量子化された状態量との不一致は計算の進行を妨げる要因から除外することができる。これが「最適コスト関数の近似」である。

次に「最適経路選択情報の近似」について説明を行う。第2図はこの操作を模式的に示す。第1図と同様、状態変数の次元や状態変数と制御変数の次元差の増大によって以下の議論の一般性が損なわれることはない。ここでいう最適経路選択情報とは、最適軌道として何番目の格子点を選択するべきかという情報のことである。各格子点は遷移可能性に問題のある第 $r$ 番目の状態変数方向を除いて、各状態変数方向の最適経路選択情報を記録している。第 $k$ 段の格子点を持つ最適経路選択情報から第 $k+1$ 段で取るべき最適な状態量を求めるが、遷移可能な状態量と量子化された状態量に不一致がある第 $r$ 番目の状態変数方向には最適経路選択情報が存在しない。そこで以下のような近似を行う。まず、第 $k$ 段目の最適な状態変数 $\mathbf{x}_{k \text{ opt}} = [x_{1 \text{ opt}}, x_{2 \text{ opt}}, \dots, x_{i \text{ opt}}, \dots, x_{n \text{ opt}}]^T$ に対して、それぞれの状態変数の値に隣接する量子化された状態量 $x_{i, j_{i-1}}, x_{i, j_i}$ を明らかにする。すなわち、 $x_{i, j_{i-1}}, x_{i, j_i}$ は次の関係を満たす。

$$x_{i, j_{i-1}} < x_{i \text{ opt}} < x_{i, j_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

これは想定する $n$ 次元状態空間において、最適な状態量に隣接する格子点を表している。これらの格子点には、第 $r$ 番目を除いた全ての状態変数方向の最適経路選択情報が記録されている。第 $i$ 番目の状態変数方向の最適経路選択情報を次のように $I_i$ と表現することとする。

$$\begin{aligned} I_1(i, j_{i-1}), I_1(i, j_i) \quad & i = 1, 2, \dots, n \\ & \vdots \\ I_n(i, j_{i-1}), I_n(i, j_i) \quad & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (14)$$

これは次の第 $k+1$ 段において状態変数 $x_i$ は第 $I_i$ 番目の量子化された状態量 $x_{i, I_i}$ を最適な値として選択するべきであるこ

とを意味する。遷移可能性に問題のある第 $r$ 番目の状態変数を除いて、 $\mathbf{x}_{k \text{ opt}}$ における全ての $I_i \text{ opt}$ は上記の $I_i(1, j_{i-1}), I_i(1, j_i), \dots, I_i(n, j_{i-1}), I_i(n, j_i)$ を用いた $n$ 次元の内挿によって得られる。したがって第 $r$ 番目を除いた状態変数については、第 $k+1$ 段で選択するべき値を次式のように決定できる。

$$\begin{aligned} x_{i \text{ opt}}(k+1) \\ = x_{i \text{ min}} + (x_{i \text{ max}} - x_{i \text{ min}})(I_i \text{ opt} - 1)/N_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

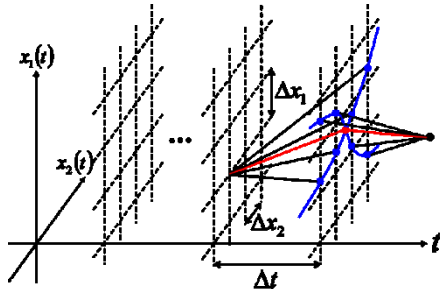
残る第 $r$ 番目の状態変数については、既に決定したその他の状態変数と合わせて系の支配方程式を満足するように第 $k+1$ 段での値を決定する。以上の手順を段ごとに繰り返すことにより、終端までの最適な軌道を得ることができる。これが「最適経路選択情報の近似」である。

ところで、「最適コスト関数の近似」については類似の計算方法が存在する<sup>10)</sup>。このような計算方法は内挿計算が煩雑であり時間を要するため、実用性は疑問視されていた。そのため、最適コスト関数の算出の後に必要となる軌道の生成技術については手法として確立されていない。しかし冒頭にも記したように、計算機的能力が著しく向上し煩雑な計算も短時間で実行可能となった現在、このような計算方法は次元差の制約に対する有効な手法の候補となり得る。先に述べた「最適経路選択情報の近似」は軌道の生成を可能にするものであり、「最適コスト関数の近似」と合わせて区分線形近似動的計画法として提案する。区分線形近似動的計画法は既存の計算方法を補完し、次元差の制約を緩和する手法として期待されるものである。

また、本手法は、格子点値は連続的に分布する物理量を代表するものにすぎないという考え方に基づいている。これにより、「最適コスト関数の近似」は次に述べることを新たに可能にする。

1つは先に述べた軌道の生成である。既存の計算方法により、格子点値からの内挿補間によって最適コスト関数を算出することはできたが、その後に最適解として軌道を得る際、最も近い格子点を選択するなどの弥縫策を取っていた<sup>3)</sup>。このような方法では危険側の誤差、すなわち評価関数値を実現可能な値よりも良くするような誤差が発生し得る。しかし本手法では「最適経路選択情報の近似」によって必ずしも格子点を通らない軌道を得ることができる。これによって従来法で生じていた危険側の誤差の発生を抑えることができる。なぜならば本手法によって得られる軌道は系の支配方程式を完全に満足しており、その意味で如何なる場合も安全側となるからである。

もう1つは固定された終端における自由度の増大である。終端において、格子が空間的な広がりを持っていれば内挿補間を行うことができるが、固定された終端では同様の内挿補間を行うことができない。しかし本手法では、先に述べたような考え方に基づき、以下のような対処が可能であることがわかる。第3図は固定された終端において自由度を増大する方法を説明している。理解しやすいよう状態変数は2次元までしか表示していないが、次元が増えても同様に適用可能である。図に示すとおり、第 $N+1$ 段、すなわち終端から遷移



第3図 終端における自由度の増大

可能な第 $N$ 段上の曲線と、第 $N-1$ 段のある格子点から遷移可能な第 $N$ 段上の曲線は交点を持つ。交点が現れない場合もあるが、それはその格子点から終端まで到達不可能だということを意味する。もし交点が存在する場合、これが第 $N-1$ 段のある格子点から遷移可能でかつ終端に到達できる第 $N$ 段上の点である。第 $N$ 段でこの点を選択するときの終端までのコストを第 $N-1$ 段の対応する格子点に記録し、第 $N-1$ 段を新たな終端とすることで終端状態量自由の問題として本手法を適用可能である。

### 3. 線形システムでの検討

**3.1 LQR (Linear Quadratic Regulator)** ここでは、具体的な応用例として、時不変有限次元線形システムに対し2次形式の評価関数を用いて設計するレギュレータ、すなわちLQRを考える。この問題は厳密な解析解を得ることができるため、提案した手法による解と比較することで、その妥当性を評価することができる。なお、線形システムであれば状態変数の線形変換により正準形に変換することで次元差の問題を回避する手法も取り得る<sup>11)</sup>。本稿では状態変数の変換は行わず、提案した手法を用いて解を求めることとする。

線形システムの状態方程式、2次形式の評価関数は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (16)$$

$$J = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right\} dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{P}_f \mathbf{x}(t_f) \quad (17)$$

ここで、状態変数 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 、制御変数 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 。状態変数の初期値が与えられる。 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は定数行列とする。重み行列 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 。ただし、 $\mathbf{Q} \geq 0$  (準正定行列)、 $\mathbf{R} > 0$  (正定行列) とする。

サンプル/ホールドによる離散時間系に変換する。サンプリング周期を $\Delta t$ とし、各周期で制御入力 $\mathbf{u}$ はゼロ次ホールドとする。第 $k$ 番目の周期の状態変数 $\mathbf{x}(k\Delta t)$ を $\mathbf{x}_k$ 、制御変数 $\mathbf{u}[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ を $\mathbf{u}_k$ と表記すると、状態方程式は次のようになる。添え字 $d$ は離散系であることを示す。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k \quad (18)$$

また、評価関数は次式のように離散化される。

$$J_d = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_d \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{x}_k^T \mathbf{N}_d \mathbf{u}_k \right) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_d \mathbf{x}_N \quad (19)$$

係数間の関係を表すために、次の記法を導入する。

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= e^{\mathbf{A}\tau} \\ \Gamma(\tau) &= \int_0^\tau e^{\mathbf{A}(\tau-\eta)} \mathbf{B} d\eta \end{aligned} \quad (20)$$

この記法を用いて、(18)式の係数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \Phi(\Delta t) \\ \mathbf{B}_d &= \Gamma(\Delta t) \end{aligned} \quad (21)$$

同様に $\Phi, \Gamma$ を用いて(19)式の $\mathbf{Q}_d, \mathbf{R}_d, \mathbf{N}_d$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{N}_d \\ \mathbf{N}_d^T & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} \Phi^T(\tau) & \mathbf{0} \\ \Gamma^T(\tau) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(\tau) & \Gamma(\tau) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

さらに $\mathbf{P}_d$ は次の離散リカッチ方程式を満たす安定化解である。

$$\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d - \mathbf{P}_d + \mathbf{Q}_d - (\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d + \mathbf{N}_d) (\mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d + \mathbf{R}_d)^{-1} (\mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d + \mathbf{N}_d^T) = 0 \quad (23)$$

本論文では、線形システムとして2階の積分系を考える。以下に示す2階の積分系は次元差1であり、このシステムでは状態の変化率を制御変数で直接制御できないため、動的計画法を適用すると本論文が主題とするところの量子化誤差が大きく問題が発生する。

制御の対象となる2階の積分系の状態方程式を示す。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = u(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (24)$$

(16)式の状態変数 $\mathbf{x}$ と係数 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は次のようになる。

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ dy/dt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで、状態変数 $y, \dot{y}$ と制御変数 $u$ はそれぞれスカラーである。評価関数は(17)式となるが、重み行列を次式で与える。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = r \quad (26)$$

動的計画法を用いて最適化を行うために、システムを離散系で記述する。離散系の状態方程式は(18)式となるが、(20)、(21)式より行列 $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d$ は次のようになる。

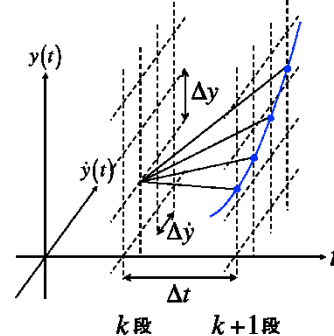
$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.5 \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (27)$$

状態方程式をそれぞれの状態変数について書き記す。

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{y}}_k + \dot{\mathbf{y}}_{k+1}) \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{k+1} = \dot{\mathbf{y}}_k + \Delta t \cdot \mathbf{u}_k \quad (29)$$

状態方程式2つに対し、自由に与えることができる制御変数が1つであるから、自由度が足りない。まず、このシステムにおいて、動的計画法の適用に際し自由度が足りないことが問題となることを示す。第4図に独立変数である時間 $t$ と、状態量である $y(t), \dot{y}(t)$ によって定義した空間を示す。第 $k$ 段のある格子点 $\mathbf{P}_k(t_k, y_k, \dot{y}_k)$ から第 $k+1$ 段への遷移を考える。



第4図 空間に設定された格子

第 $k$ 段において $y_k, \dot{y}_k$ が与えられており、第 $k+1$ 段において $\dot{y}_{k+1}$ が与えられれば、(28)式より $y_{k+1}$ がただ一つ決まる。したがって第 $k+1$ 段の全ての格子点との遷移を考えることができず、さらに、そのようにして決まった遷移可能な点が予め設定しておいた格子点上に存在するとは限らない。第4図の青い曲線は、第 $k$ 段のある格子点 $P_k(t_k, y_k, \dot{y}_k)$ から遷移可能な第 $k+1$ 段上に存在する点の集合、すなわち遷移可能な曲線を表している。

**3.2 区分線形近似動的計画法を用いた数値例** 次元差1のシステムでは、格子点間の遷移として軌道を求めることが困難である。先に述べた通り、これは遷移可能な点が格子点上に存在しない場合があるからである。そこで、本論文にて提案した手法を適用し、数値解の導出を試みる。初期値依存性の有無を調べるため、第1表に示す無作為に抽出した複数の初期条件に対して計算を行う。計算に用いたパラメタを第2表に、格子の設定を第3表に示す。それぞれの計算ケースについて、連続系における解析解と離散系における厳密解、さらに動的計画法による数値解を算出し、評価区間全体の最適コスト関数をまとめたものが第4表である。また、例としてCase1について、状態量と制御入力 $u$ の最適な軌道を、厳密解を赤線で、数値解を青線でそれぞれプロットしたものが第5図から第7図である。

離散系における厳密解は、時間方向の離散化を行ったことによる離散化誤差が含まれる。さらに、DPによる数値解には状態変数方向の量子化を行ったことによる量子化誤差が含まれ、本手法による近似の誤差を評価するためには離散系における厳密解とDPによる数値解を比較するのが適当である。また、電子計算機を用いた数値計算では必ず生じる離散化誤差と本手法によって生じる量子化誤差とを比較することで、本手法による近似の誤差が許容できるものであるか検討する。

第1表 初期値

|       |           |                  |
|-------|-----------|------------------|
| Case1 | $y_0 = 5$ | $\dot{y}_0 = 0$  |
| Case2 | $y_0 = 1$ | $\dot{y}_0 = -2$ |
| Case3 | $y_0 = 3$ | $\dot{y}_0 = 2$  |
| Case4 | $y_0 = 0$ | $\dot{y}_0 = -2$ |

第2表 計算パラメタ

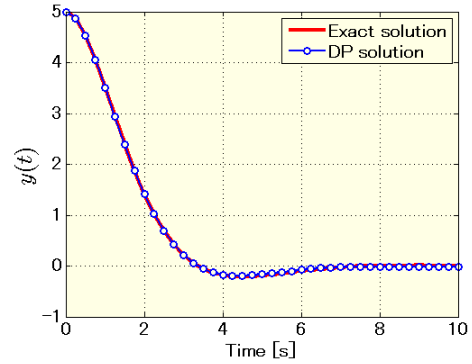
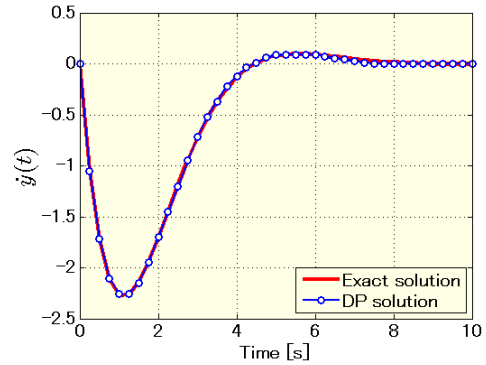
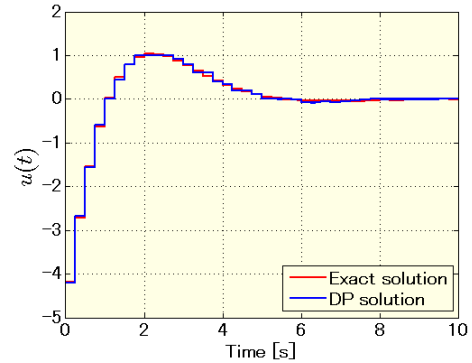
|          |            |      |
|----------|------------|------|
| 重み       | $r$        | 1    |
| サンプリング周期 | $\Delta t$ | 0.25 |
| 独立変数の分割数 | $N$        | 40   |

第3表 格子の設定

| 格子間隔 (分解能) |           |      |
|------------|-----------|------|
| 状態量        | $y$       | 0.05 |
| 状態量        | $\dot{y}$ | 0.05 |

第4表 評価区間全体の最適コスト関数

|       | 解析解 (連続系) | 厳密解 (離散系) | DPによる数値解 |
|-------|-----------|-----------|----------|
| Case1 | 17.6777   | 17.7467   | 17.7527  |
| Case2 | 1.5355    | 1.5389    | 1.5480   |
| Case3 | 15.1924   | 15.2597   | 15.2692  |
| Case4 | 2.8284    | 2.8395    | 2.8492   |


 第5図 状態変数 $y$ の最適な推移(Case1)

 第6図 状態変数 $\dot{y}$ の最適な推移(Case1)

 第7図 最適制御入力 $u$ (Case1)

第4表より、いずれのケースにおいても連続系における解析解、離散系における厳密解、DPによる数値解がほぼ同等の評価関数値を取っており、この順で値が大きくなっていることがわかる。さらに量子化誤差は離散化誤差と同等程度であり、本手法による近似の誤差は許容できるものであると言える。また、DPによる数値解は評価関数値を悪くする方向、すなわち安全側の解を得ることができている。これは、格子点に割り当てられていない状態も選択できるようにしたこと、支配方程式を満足する遷移可能な状態の組み合わせとして軌道を得ているからである。遷移可能性を度外視すればいくらでも評価関数を良くする軌道は作り出せるが、遷移可能な状態から得られる軌道で最も良いものは解析解となるはずである。したがってこの手法では解析解以上の軌道を解として得る危険性がない。また、結果の図より、どのケースでも数値解は厳密解の特徴をよく捉えた軌跡を示していることがわかる。

**3.3 考察** 本章では、提案した区分線形近似動的計画法について、次元差が1であるシステムを対象に評価を行った。この手法では、制御変数が足りないという課題に対し、状態変数の次元、すなわち自由度を低減させるというアプローチを行っている。結果として示したとおり、この手法で得られた解の精度は良好であり、区分線形近似動的計画法は次元差の制約に対する有効な手法の候補であると考えられる。

#### 4. 無推力機の最良滑空問題

**4.1 滑空飛行への応用** 本章では無推力機の最良滑空問題を取り扱う。無推力機は推力を制御入力とすることができないため、状態変数の次元に対して制御変数の次元が不足する問題となり、本論文にて提案する手法の有効性を評価する例題として適当である。無推力機としては、全エンジン停止状態の小型旅客機を想定している。

航行中に動力を失った無推力状態の航空機が滑空飛行によって到達し得る最大の範囲を、最適制御問題として解くことが本章の目的である。また、その過程で状態変数と制御変数の次元差の問題に対して本論文にて提案した手法を適用し、その有用性を工学的に有意な解が得られるかという観点で評価する。

**4.2 機体モデル** 本論文では、無推力機として全エンジン停止状態の標準重量が64 ton程度の小型旅客機を想定している。この機体モデルとして、EUROCONTROL（欧州航空航法安全機構）より提供を受けたBADA (=Base of Aircraft Data) モデルを使用した<sup>12)</sup>。本論文では推力を用いない状態での滑空飛行を想定しているので、重量や翼面積などの機体パラメータ、空力モデル、速度に関する条件のみを用いる。重量は標準重量とし、空力モデルと失速条件はクリーン状態における巡航時の値を使用している。使用するパラメータは第5表のとおりである。なお、気象の影響を考慮せず、さらに空気密度一定と仮定しているため、較正対気速度CASと真対気速度TASを等価なものとして取り扱う。

第5表 機体諸元

|      |                    |          |                |
|------|--------------------|----------|----------------|
| 機体重量 | $m$                | 64,000   | kg             |
| 翼面積  | $S$                | 122.6    | m <sup>2</sup> |
| 失速速度 | $V_{\text{stall}}$ | 140.5    | kt             |
| 空力係数 | $C_{D0}$           | 0.026659 |                |
|      | $K$                | 0.038762 |                |

**4.3 運動方程式** 本論文では質点近似運動方程式を使用する。また、最良滑空問題では速度、経路角が十分小さいと考えられるため、空気密度は一定であると仮定し、地球の曲率は無視する。

最適制御の議論をするときは、変数を無次元化すると結果を理解しやすい。また、無次元化によって変数の値のオーダーをある範囲内に収めることができる。これは桁落ちなどの計算誤差による誤りを起こりにくくする。そこで、以下の物理量を用いて変数を無次元化する。すなわち、最良滑空速度 $V_0$ を基本の速度と定め、その速度から基本物理量を定義する。第6表に無次元化に使用したパラメータを示す。これを用いて無次元化した運動方程式を(30)式から(33)式に示す。

$$v \frac{dy}{dt} = S_w v^2 C_L - \cos \gamma \quad (30)$$

$$\frac{dv}{dt} = -S_w v^2 C_D - \sin \gamma \quad (31)$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \gamma \quad (32)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \gamma \quad (33)$$

ここで、

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2 \quad (34)$$

変数の定義は以下のとおりである。

|          |          |           |             |
|----------|----------|-----------|-------------|
| $v$      | : 無次元速度  | $\gamma$  | : 経路角       |
| $h$      | : 無次元高度  | $x$       | : 進行方向無次元距離 |
| $C_L$    | : 揚力係数   | $C_D$     | : 抗力係数      |
| $C_{D0}$ | : 有害抗力係数 | $K C_L^2$ | : 誘導抗力係数    |
| $g$      | : 重力加速度  | $\rho$    | : 空気密度      |

第6表 無次元化パラメータの定義

|           |                            |                      |     |
|-----------|----------------------------|----------------------|-----|
| 速度の基準     | $V_0$                      | $1.0026 \times 10^2$ | m/s |
| 長さの基準     | $V_0^2/g$                  | $1.0251 \times 10^3$ | m   |
| 時間の基準     | $V_0/g$                    | 10.2241              | s   |
| 空気を表す無次元量 | $S_w = \rho V_0^2 S / 2mg$ | 1.2028               |     |

**4.4 定式化** 動的計画法では、時間とともに単調に変化する状態変数を時間 $t$ の代わりに独立変数とすることで、最適化すべき状態変数から除外することができる。無推力機の滑空飛行では、抵抗により常に力学的エネルギーが減少していくと考えられるので、力学的エネルギーは独立変数の候補となる。次の無次元化された力学的エネルギーを用いて、独立変数の変換による次元の縮減を行う。

$$E = \frac{1}{2} v^2 + h \quad (35)$$

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{dv}{dt} + \frac{dh}{dt} = -S_w v^3 C_D \quad (36)$$

力学的エネルギーを独立変数としたことにより、速度が与えられれば高度が一意に定まるので、高度を最適化すべき状態変数から除外することができる。よって最適化すべき状態変数を経路角 $\gamma$ 、速度 $v$ とし、制御変数を揚力係数 $C_L$  ( $C_D$ は $C_L$ の関数)とする。

$$\frac{dy}{dE} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{S_w v^2 C_L - \cos \gamma}{-S_w v^4 C_D} \quad (37)$$

$$\frac{dv}{dE} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{1}{v} + \frac{\sin \gamma}{S_w v^3 C_D} \quad (38)$$

また、

$$\frac{dx}{dE} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{\cos \gamma}{-S_w v^2 C_D} \quad (39)$$

より、評価関数（無次元化された飛行距離）は次式で与えられる。

$$J = \int_{E_0}^{E_f} \frac{\cos \gamma}{-S_w v^2 C_D} dE \quad (40)$$

変数を整理すると、第7表のようになる。状態変数が2つであるのに対して、制御変数が1つであり、次元差が存在することがわかる。

動的計画法を適用するために、状態空間上の点 $P_i(E_i, v_i, \gamma_i)$ から点 $P_{i+1}(E_{i+1}, v_{i+1}, \gamma_{i+1})$ へ遷移する際の離散系の運動方程式を示す。状態量の積分は中間値で近似し、制御入力はず

口次ホールドとする。

$$\frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{E_{i+1} - E_i} = \frac{4S_w(v_i + v_{i+1})^2 C_L - 16 \cos\left(\frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2}\right)}{-S_w(v_i + v_{i+1})^4 C_D} \quad (41)$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{E_{i+1} - E_i} = \frac{2}{v_i + v_{i+1}} + \frac{\sin\left(\frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2}\right)}{S_w(v_i + v_{i+1})^3 C_D} \quad (42)$$

(41)式を $C_L$ について解くと、

$$C_L = \frac{4 \cos\left(\frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2}\right)}{S_w(v_i + v_{i+1})^2} - \frac{(\gamma_{i+1} - \gamma_i)(v_i + v_{i+1})^2 C_D}{4(E_{i+1} - E_i)} \quad (43)$$

(42)式を $C_D$ について解くと、

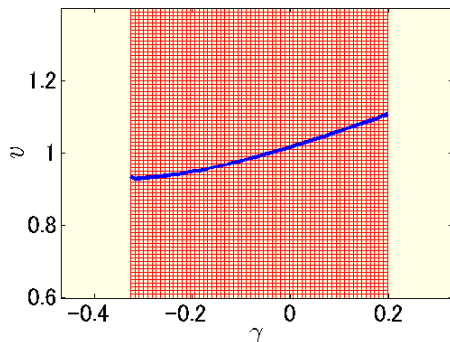
$$C_D = \frac{(E_{i+1} - E_i) \sin\left(\frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2}\right)}{S_w(v_i + v_{i+1})^2 \{v_{i+1}^2 - v_i^2 - 2(E_{i+1} - E_i)\}} \quad (44)$$

状態空間上の点 $P_i(E_i, v_i, \gamma_i)$ から点 $P_{i+1}(E_{i+1}, v_{i+1}, \gamma_{i+1})$ への遷移において、(44)式の右辺の状態量は全て与えられるので、 $C_D$ を求めることができる。これを用いて(43)式の右辺を計算すると $C_L$ を得る。しかし、(34)式の関係より、 $C_L$ が与えられれば $C_D$ が一意に定まり、その $C_D$ が(44)式から求めた $C_D$ と一致するとは限らない。すなわち、自由度が不足しており、動的計画法を適用しようとするとき全ての格子点間の遷移を考慮することができない。この問題に対し、本論文にて提案する区分線形近似動的計画法を用いたアプローチを検討する。なお、便宜的に、(43)式から得られる $C_L$ によって定まる $C_D$ を真の抗力係数とし、これと区別して(44)式から得られる抗力係数を $C_D^*$ と表記することとする。

第7表 変数の分類

|      |             |
|------|-------------|
| 独立変数 | $E$         |
| 状態変数 | $\gamma, v$ |
| 制御変数 | $C_L$       |

**4.5 区分線形近似動的計画法による数値計算** 本論文にて提案する区分線形近似動的計画法を用いた最適化を検討する。状態空間において、第 $i$ 段のある格子点 $P_i(E_i, v_i, \gamma_i)$ から第 $i+1$ 段への遷移を考える。(43)式から得られる $C_L$ によって定まる $C_D$ と(44)式から得られる $C_D^*$ が一致するような第 $i+1$ 段上の点の集合、すなわち実際に遷移可能な曲線について、この問題における遷移可能な曲線の一例を第8図に示す。動的計画法を適用する際の段を表しており、横軸に経路角 $\gamma$ 、縦軸に速度 $v$ をとっている。赤線が段の格子、青線が遷移可能な曲線である。遷移可能な曲線上では、第 $i$ 段の格子点 $P_i(E_i, v_i, \gamma_i)$ が与えられ、かつ、第 $i+1$ 段において $\gamma, v$ のどちらか一方を与えるともう一方が一意に定まる。遷移可能な点



第8図 遷移可能な曲線

が経路角 $\gamma$ 方向に広く分布しているのは、制御変数である揚力係数 $C_L$ によって $\gamma$ の変化率を直接制御することができるからだと考えられる。したがって、変化率を直接制御できない状態量である速度 $v$ は、任意の $\gamma$ に対して従属的に定まることになる。これは、どの段においても遷移可能な点が $\gamma$ 方向に広く分布していることを示している。区分線形近似動的計画法を適用する際は、ある段上で遷移可能な点がどの次元軸方向に広く分布しているかを明らかにすることが望ましい。この問題では遷移可能な点が $\gamma$ 方向に広く分布していることから、量子化した $\gamma$ の値それぞれについて評価し、最適化することとなる。すなわち、第 $i$ 段の格子点 $P_i(E_i, v_i, \gamma_i)$ から遷移可能な第 $i+1$ 段上の点は、第 $i+1$ 段の量子化された全ての $\gamma$ に対して、 $C_D = C_D^*$ となる $v$ の値を計算することで求めることができる。

LQRを用いた検討と同様に、無推力機の最良滑空問題に区分線形近似動的計画法を適用する。計算の条件を第8表に、格子の設定を第9表に示す。なお、この計算の条件は航空機が離陸上昇中に全エンジン停止状態に陥ったという状況を想定している。制約条件として、高度、速度、揚力係数に以下の不等式拘束を課す。

$$0 \leq h, \quad v_{\min} \leq v, \quad C_L \leq C_{L\max} \quad (45)$$

ここで、

$$v_{\min} = 1.2 \times \frac{V_{\text{stall}}}{V_0} = 0.8651 \quad (46)$$

$$C_{L\max} = 1.1109$$

ただし速度は無次元量であり、緊急事態を想定しているため下限の余裕を削減して失速速度の1.2倍とした。また、 $C_{L\max}$ は失速条件から算出した。

計算結果を以下に示す。第9図から第14図は最適制御入力やそれによって実現される軌道を表している。初期速度が最良滑空速度よりも大きいため、運動エネルギーを位置エネルギーに変換することで、減速しながら高度を得ている。その後最大の揚抗比で滑空を行い、終端で引き起こしを行っている。初期高度0.9515から解析的に求めることができる最良滑空角で滑空を行えば、最大の揚抗比が15.5613であることから飛行距離は約15となることが推算できる。最適制御ではこのように目安の値を計算しておくことで結果を理解しやすい。今回の最適化では飛行距離が21.6756となり、目安の値を大きく上回った。これは初期速度が最良滑空速度より大きいためだと考えられる。定常滑空の部分に着目すれば、高度と飛行距離の比がほぼ1:15になっており、妥当な結果であると言える。

**4.6 考察** 本章では、動的計画法を用いて無推力機の最良滑空問題を解いた。無推力機は推力を制御変数とすることができないため、次元差が1となる問題であるが、本論文にて提案した区分線形近似動的計画法を用いることで最適軌道を得ることができた。結果は先に述べたとおり、妥当な解であると言える。これにより、本論文にて提案した区分線形近似動的計画法の有用性が示された。本手法は遷移可能な状態量の組み合わせとして解を得ることができるため、得られた軌道は支配方程式を満足するという意味で実現可能である。また、この例題においてもLQRの例題と同様にして手

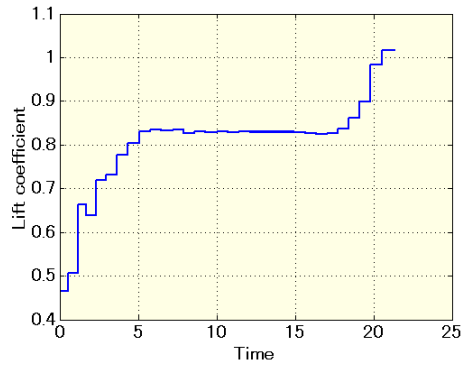
法の適用が可能であったことから, 本手法が問題の物理的性質や変数の選定によらず統一的に適用可能であることも確認できる。

第8表 計算条件 (最良滑空問題)

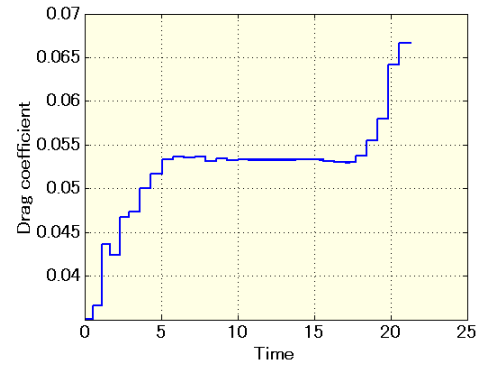
|    |       | 有次元                           | 無次元    |
|----|-------|-------------------------------|--------|
| 初期 | 速度    | 128.6141 m/s                  | 1.2828 |
|    | 高度    | 975.3719 m                    | 0.9515 |
|    | 経路角   | 5 deg                         | 5 deg  |
|    | エネルギー | -                             | 1.7742 |
| 終端 | 速度    | $1.2 \times V_{\text{stall}}$ | 0.8651 |
|    | 高度    | 0 m                           | 0      |
|    | 経路角   | -1 deg                        | -1 deg |
|    | エネルギー | -                             | 0.3742 |

第9表 格子の設定 (最良滑空問題)

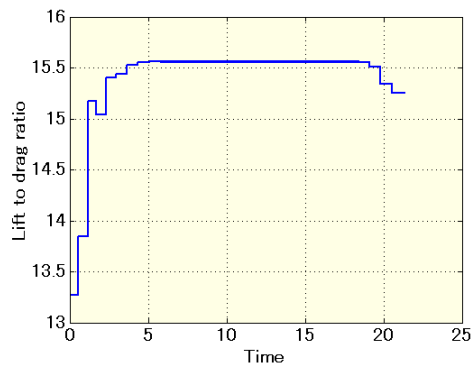
|       |  | 格子間隔      |
|-------|--|-----------|
| 速度    |  | 0.0023    |
| 経路角   |  | 0.025 deg |
| エネルギー |  | 0.0452    |



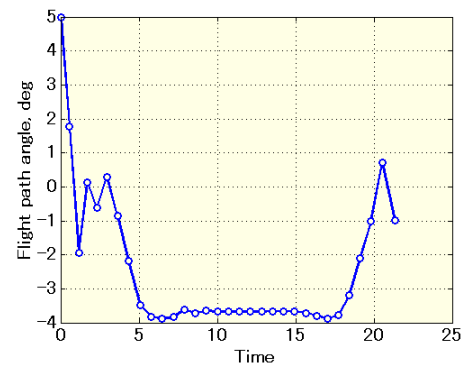
第9図 揚力係数の時間履歴



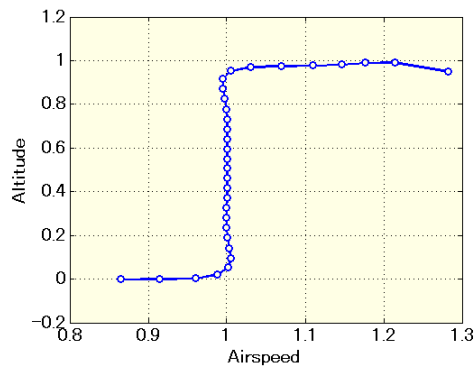
第10図 抗力係数の時間履歴



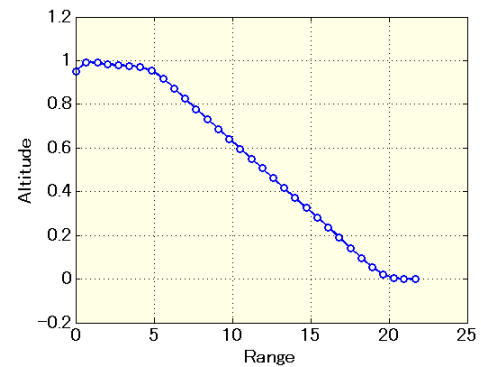
第11図 揚抗比の時間履歴



第12図 経路角の時間履歴



第13図 速度 - 高度



第14図 水平距離 - 高度

## 5. ま と め

本論文では、動的計画法が最適化手法として開発現場に歓迎されるよう、その実用範囲を拡大することを目的とし、動的計画法の持つ制約を緩和するような手法として、区分線形近似動的計画法を提案した。また、厳密解のある問題で手法の信頼性を確認し、より実際に近い問題へ適用することで手法の有用性を示した。

本論文で行った幾つかの検討から得られた知見として、区分線形近似動的計画法は非常に汎用性に優れ、問題の物理的性質や変数の選定によらず統一的に適用可能であるということが挙げられる。多様で複雑な問題に統一的なアプローチが可能であるという動的計画法本来の利点を崩すことなく、次元差の制約緩和に成功している点で価値が大きいと言える。

動的計画法は最適化手法として、他の方法には見られない利点が多数存在する。その中でも、変数の量子化が確立すれば反復計算をする必要がなく、しかもその1回の計算で大域的最適解が得られるという点は、他の手法ではあり得ない動的計画法固有の魅力である。開発現場において、限られた期間の中で正確な解に辿り着かなければならない状況下では、動的計画法がその威力を発揮し、設計者を助けることは間違いないであろう。動的計画法はその他にも、拘束条件の取り扱いが容易であることや、条件の変更に手間を要しない点など、他の数値計画法に劣らぬ利便性を併せ持っている。このように優れた利点を持つ動的計画法が開発現場に広く受け入れられるためには、これが内包する技術的な課題を克服しなければならない。本論文では、その中の1つである状態変数と制御変数の次元差に起因する量子化誤差の影響を軽減するために、区分線形近似動的計画法を提案した。また、無推力機の最良滑空問題においても同手法によって工学的に有意な解が得られることを確認した。動的計画法の適用に際

して次元差の制約が緩和されれば、その実用性は飛躍的に向上する。次元差の問題の完全な解決は困難であるが、本論文にて次元差の制約緩和に有効な手法を提案し、また、無推力機の最良滑空問題を通して動的計画法の実用範囲拡大の可能性を示すことができた。

## 参 考 文 献

- 1) Bellman, R. E.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957, pp. 183-221.
- 2) Betts, J. T.: Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **21**, 2 (1998), pp. 193-207.
- 3) Sobieszczanski-Sobieski, J.: Overcoming the Bellman's "Curse of Dimensionality" in Large Optimization Problems, NASA Technical Memorandum 102662, April, 1990.
- 4) Whitt, W.: Approximations of Dynamic Programs, Mathematics of Operations Research, **3**, 3 (1978), pp. 231-243.
- 5) 花岡照明: エネルギー近似を用いた下界値計算法と超音速航空機最短経路問題への応用, 日本オペレーションズリサーチ学会論文誌, **41**, 2, (1998), pp. 289-310.
- 6) 原田明徳, 宮沢与和: 動的計画法による再突入飛行の最適軌道設計, 航空宇宙技術, **11** (2012), pp. 131-138.
- 7) Luus, R.: Iterative Dynamic Programming, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Boca Raton, Florida, **110** (2000), pp. 81-90.
- 8) Bousson, K.: Trajectory Optimization by Canonical Dynamic Programming, 55th International Astronautical Congress 2004 – Vancouver, Canada.
- 9) Bousson, K.: Single Gridpoint Dynamic Programming for Trajectory Optimization, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, 2005, San Francisco, California.
- 10) Lapidus, L. and Luus, R.: Optimal Control of Engineering Processes, Braisdell, Waltham, Massachusetts, 1967, pp. 84-86.
- 11) 宮沢与和, 松田治樹, 原田明徳: 可制御正準形表現と動的計画法による軌道最適化, 第52回飛行機シンポジウム, 長崎, 2014.
- 12) Eurocontrol Experiment Center: User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA), Revision 3.11, EEC Technical/Scientific Report, No.13/04/16-01, 2013.