

力学系における不動点

新居, 俊作
九州大学大学院数理学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/7341489>

出版情報 : 数理科学. 62 (8), pp.22-28, 2024-08-01. SAIENSU - SHA Co., Ltd.
バージョン :
権利関係 :



力学系における不動点

新居 俊作

1. 微分方程式の平衡点、ベクトル場の特異点と写像の反復の不動点

力学系とは大雑把には相空間と呼ばれる位相空間とその上で定義された時間発展規則のことを指す。但し、時間とは必ずしも実数全体とは限らず、0以上の実数であったり、整数又は0以上の整数である場合もある。時間が実数又は0以上の実数である場合は連続力学系とよばれ、整数又は0以上の整数の場合は離散力学系とよばれる。

具体的な対象としては、以下の様な場合がある：

- 有限次元多様体 M 上にベクトル場 $v(x)$ が定められているとする。 $v(x)$ が定める常微分方程式の時刻 $t = 0$ において x を初期値とする解を $\varphi(t; x)$ とするとき、各 t に対し $\varphi^t: M \rightarrow M: x \mapsto \varphi(t; x)$ で定められる写像は M 上の微分同相写像になり、更に、 $\varphi^0 = \text{id}_M$ 、 $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$ を満たす。

この φ^t を M 上の時間発展規則と考えると (M, φ^t) は力学系である。

M が無限次元 (適切な関数空間の部分集合) で $\varphi(t; x)$ が $t \geq 0$ でしか定義されない場合は φ^t は $t \geq 0$ に対してのみ定義され、一般には同相写像ではない。

- 有限次元多様体 M に対し、微分同相写像 $\varphi: M \rightarrow M$ が定められている時、 $\varphi^0 := \text{id}_M$ とし、 n が正の整数のとき $\varphi^n := \overbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}^{n \text{ 回合成}}$

負の整数のとき $\varphi^n := \overbrace{\varphi^{-1} \circ \dots \circ \varphi^{-1}}^{-n \text{ 回合成}}$ と定める。このとき $\varphi^{m+n} = \varphi^m \circ \varphi^n$ が成り立つ。この φ^n を M 上の (離散) 時間発展規則と考えると (M, φ^n) は力学系である。

φ が同相写像ではない時は n は 0 以上の整数のみを考える。

その他、記号列の空間とその上のシフト写像の組等もあるがここでは割愛する。

多様体 M 上のベクトル場 $v(x)$ の特異点、すなわち $v(x_0) = 0$ となる x_0 は $v(x)$ が定める常微分方程式の平衡点であり、更に φ^t の不動点、すなわち、任意の t について $\varphi^t(x_0) = x_0$ となる点である。

また、 φ が多様体 M の微分同相写像のとき、 x_0 が φ の不動点であれば、この点は当然 φ^n の不動点、すなわち、任意の n について $\varphi^n(x_0) = x_0$ となる点である。

ベクトル場が定める力学系に対し、固定した $t_0 > 0$ について φ^{nt_0} ($n \in \mathbb{Z}$) を考えると微分同相写像 φ^{t_0} の反復合成の力学系が得られるが、ベクトル場が定める力学系の文脈では他にも写像の反復合成が定める力学系が登場する場面がある。

多様体 M 上のベクトル場 $v(x)$ が定める力学系について、 $x \in M$ の軌道をも

$$\Gamma(x) := \{\varphi^t(x) \mid -\infty < t < +\infty\}$$

で定義する。

多様体 M の次元は n であるとし、 φ^t の不動点ではない $x_0 \in M$ の軌道 $\Gamma(x_0)$ に横断的な x_0 を通る $n-1$ 次元超平面 Σ を考える。今、ある $t_0 > 0$ で $\varphi^{t_0}(x_0)$ が再び Σ 上の x_0 の近傍にあり、その点でも $\Gamma(x_0)$ が Σ と横断的に交わるとする。 $v(x)$ が連続であれば、 x_0 の近傍に属する Σ 上の点 x について t_0 に近い t で $\varphi^t(x)$ は Σ 上にあり $\Gamma(x)$ はそこで Σ とやはり横断的に交わる。この対応によって Σ 上の x_0 の近傍で定義された微分同相写像 Φ が定義できる (図1)。

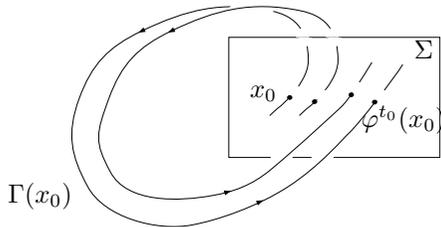


図1 Poincaré 写像

この様な写像は Poincaré によって最初に考えられたことにちなみ Poincaré 写像と呼ばれる。

特に、 $v(x)$ が定める微分方程式の x_0 を初期値とする解が周期解である場合は、この点は Φ の不動点になる。

逆に、写像の反復合成からベクトル場の力学系を定めることもできる。

M を多様体とし、 $\varphi: M \rightarrow M$ を微分同相写像とする。 $M \times [0, 1]$ に $v(x) = (0, 1)$ でベクトル場を定義し、 $(x_1, 0) \sim (x_2, 1) \iff \varphi(x_2) = x_1$ で $M \times [0, 1]$ 上の同値関係を定義して $\tilde{M} := (M \times [0, 1]) / \sim$ とすると $v(x)$ は \tilde{M} 上のベクトル場 $\tilde{v}(x)$ を誘導する (図2)。

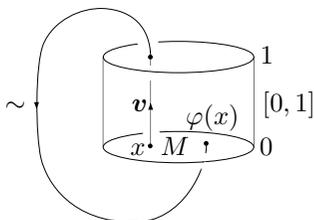


図2 φ の懸垂

$\tilde{v}(x)$ が \tilde{M} 上に定める力学系 (\tilde{M}, φ^t) は写像 φ の懸垂とよばれ、 φ^t について $\varphi^1|_{(M \times \{0\})/\sim}$ は

φ と同一視できる。

特に φ の不動点は φ^t の周期 1 の周期解に対応している。

以上を念頭に、次節以降では基本的に常微分方程式の平衡点 (ベクトル場の特異点) について解説するが、多くの概念や結論は写像の不動点に対しても同様である。

2. 平衡点の局所線形化

多様体 M 上で定義されたベクトル場 $v(x)$ が $x_0 \in M$ を孤立した特異点とする、すなわち $v(x_0) = 0$ で x_0 近傍内の x_0 以外の点では $v(x) \neq 0$ とする。

2.1 解析的な線形化

表記を単純にする為に x_0 を原点とする局所座標を取り、 $v(x)$ を Taylor 展開すると、対応する微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Dv(0)x + \dots \quad (1)$$

となるが、もし適切な座標変換で

$$\frac{dy}{dt} = Dv(0)y \quad (2)$$

と線形微分方程式に変換できれば、平衡点 0 の周りの解の様子は完全に分かることになる。そこで、 $v(x)$ が解析的な時にこの様な変換が存在する条件を考える。

\mathbb{R}^2 の原点近傍で定義された解析的ベクトル場 $v(x)$ は原点を特異点とし、更に $v(x)$ の線形部分は対角化されているとする。このとき $v(x)$ が定める常微分方程式は

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \sum_{l+m \geq 2} f_1^{l,m} x_1^l x_2^m \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 + \sum_{l+m \geq 2} f_2^{l,m} x_1^l x_2^m \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ 、 $x = (x_1, x_2)$ とする。

これを次の形の変換で線形化することを考える：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \sum_{l+m \geq 2} u_1^{l,m} y_1^l y_2^m \\ x_2 = y_2 + \sum_{l+m \geq 2} u_2^{l,m} y_1^l y_2^m \end{cases} \quad (4)$$

この逆変換の2次までの項は次の様になる：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \sum_{l+m=2} u_1^{l,m} x_1^l x_2^m + \dots \\ y_2 = x_2 - \sum_{l+m=2} u_2^{l,m} x_1^l x_2^m + \dots \end{cases} \quad (5)$$

よって(3)は y 座標では

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha_1 y_1 \\ \quad + \sum_{l+m=2} \left\{ f_1^{l,m} - [\alpha_1 - (i\alpha_1 + j\alpha_2)] u_1^{l,m} \right\} x_1^l x_2^m \\ \quad + \dots \\ \frac{dy_2}{dt} = \alpha_2 y_2 \\ \quad + \sum_{l+m=2} \left\{ f_2^{l,m} - [\alpha_2 - (i\alpha_1 + j\alpha_2)] u_2^{l,m} \right\} x_1^l x_2^m \\ \quad + \dots \end{cases} \quad (6)$$

従って、 $\alpha_k - (l\alpha_1 + m\alpha_2) \neq 0$, ($k = 1, 2$) が全ての (l, m) について成り立てば

$$u_k^{l,m} = \frac{f_k^{l,m}}{\alpha_k - (l\alpha_1 + m\alpha_2)} \quad (7)$$

とおくと、二次以上の項は消去できる。このとき (α_1, α_2) は非共鳴であるという。

こうして二次以上のすべての項が消去できる為には、(4)の右辺が収束する必要がある。しかし、係数 $u_k^{l,m}$ が $l+m$ に伴って非常に大きくなる、すなわち(7)の分母が非常に小さくなるならば収束半径は0になってしまう。これは「小さな分母の困難」と呼ばれ、この問題については多くの研究がある。

2.2 位相的な線形化

前節で見た様な微分同相写像による線形化は、 $v(x)$ がかなりよい条件を満たす場合以外可能ではない。しかし、ほとんどの場合以下の意味で位相的に線形化できる：

定理 1 (Hartman-Grobman の定理) (1)において $Dv(0)$ は実部が0である固有値を持たないとする。この時、原点近傍で(1)の定める力学系 φ^t と(2)の定める力学系 $e^{tDv(0)}$ について

$$h \circ \varphi^t = e^{tDv(0)} \circ h \quad (8)$$

が成り立つような、原点近傍から原点近傍への局所同相写像 h が存在する。

「微分方程式の同相写像による線形化」というのは一見奇異な印象を与えるが、後述する「構造安定性」の観点からは自然な考え方である。

このことから、このような平衡点は性質がよいとみなされ、特別に区別されている：

定義 1 ベクトル場 $v(x)$ の特異点 x_0 は、そこでの線形化 $Dv(x_0)$ が実部0の固有値を持たないとき双曲型特異点、あるいは、対応する微分方程式の平衡点を双曲型平衡点とよぶ。

更に線形化 $Dv(x_0)$ の実部負の固有値の固有空間に対応する不変多様体(安定多様体)と実部正の固有値の固有空間に対応する不変多様体(不安定多様体)が存在するが、詳細は本特集内の松江氏の記事にゆずる。

3. 平衡点の2種類の安定性

歴史的には、力学系理論は Poincaré による天体力学の研究を一つの起源とし、力学の問題や生物学等の数理モデルの解析を通して発展してきた。その様な文脈では、系の何らかの意味での安定性が要請されるが、研究対象や文脈により、「安定性」という言葉が表すものが異なる。ここでは、それらのうち代表的な二種類を紹介する。

3.1 漸近安定性と Lyapunov 安定性

3.1.1 漸近安定性

数理モデルにおいて、多くの場合平衡点は考えている対象の時間的に変化しない定常状態に対応すると考えられる。

例として以下の Lotka-Volterra 競争系を考

える：

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_{1,2} N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_{2,1} N_1}{K_2}\right) \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 N_1 、 N_2 はある地域に住む同じ資源（棲家、餌等）を争う生物種の個体数を表し、 r_1 、 r_2 はそれぞれの自然増加率（他の種がない場合の増加率）、 K_1 、 K_2 はそれぞれの環境収容力と呼ばれる正の定数、 $\alpha_{1,2}$ 、 $\alpha_{2,1}$ はそれぞれの種が他の種の増加に与える影響を表す正の定数である。

N_1 - N_2 平面上で次の4点は、方程式 (9) の右辺がともに 0 となるので平衡点である：

1. $(0, 0)$,
2. $(K_1, 0)$,
3. $(0, K_2)$,
4. $\left(\frac{K_1 - \alpha_{1,2} K_2}{1 - \alpha_{1,2} \alpha_{2,1}}, \frac{K_2 - \alpha_{1,2} K_1}{1 - \alpha_{1,2} \alpha_{2,1}}\right)$

このうち、平衡点 1 はどちらの個体数も 0 でどちらも全滅してしまっている状態、また平衡点 2 と 3 は片方の種が全滅してしまっている状態を表す。それに対し、平衡点 4 は両種が共存している状態に対応している。但し、 N_1 、 N_2 は生物の個体数を表すので、共に 0 以上の範囲で考える。

二種の共存状態を表す平衡点が $N_1, N_2 \geq 0$ の範囲に存在するのは、

$$\begin{aligned} \text{(安定)} \quad & K_1 < \frac{K_2}{\alpha_{2,1}}, K_2 < \frac{K_1}{\alpha_{1,2}} \\ \text{(不安定)} \quad & K_1 > \frac{K_2}{\alpha_{2,1}}, K_2 > \frac{K_1}{\alpha_{1,2}} \end{aligned}$$

の二つの場合だが、この平衡点が生物学的に意味を持つためには、この平衡点が以下の意味で安定であることが望ましい：

定義 2 平衡点は次が成り立つとき漸近安定であると言われる：

平衡点のある近傍について、その近傍内の点を初期値とするすべての解は $t \rightarrow +\infty$ でその平衡点に漸近する。

K_1, K_2 が (安定) と書かれた範囲にある場合は二種の共存状態を表す平衡点 4 は漸近安定であり、生物学的にもこの平衡点に対応する状態は実現し易いと考えられるが、(不安定) と書かれた範囲の

場合は、この平衡点のいかに近く初期値をとってもこの点から離れてしまう場合がある、という意味で不安定であり、生物学的にこの平衡点に対応する状態は実現しにくいと考えられる。

この安定性は (9) の右辺を各平衡点の周りで線形化して係数行列の固有値の実部の正負を判定し、定理 1 を用いることで得られる。しかし、線形化の係数行列の固有値の実部が負である場合は適切な座標変換の後 $V(\mathbf{x}) = \sum x_i^2$ と置くと、原点近傍内で原点以外では

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) < 0 \quad (10)$$

が示せ、その結果として、すべての軌道は原点に漸近することが示せる。この V の様に、

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \quad (11)$$

かつ、平衡点以外では

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) < 0 \quad (12)$$

となる関数を Lyapunov 関数とよぶ。

3.1.2 Lyapunov 安定性

上述の様な意味のある漸近安定性の概念だが、力学の問題に対しては必ずしも有効では無い。

三次元空間内の n 箇の質点の運動を記述する運動方程式は $3n$ 次元の二階の微分方程式だが、対応する Hamilton 方程式は $6n$ 次元の一階の方程式である。

平衡点が漸近安定であればある近傍内の点は全て $t \rightarrow +\infty$ でその平衡点に漸近するので、平衡点付近の集合の $6n$ 次元体積は縮小するが、Hamilton 方程式は体積を保存するのでこれは不可能である。しかし、平衡点が常に物理的に実現しにくい状態を表しているという訳ではない。

例として質点が糸で吊り下げられた振り子の運動を考えてみる。

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (13)$$

振り子が真下で静止している状態は Hamilton 方程式の平衡点に対応する。この状態にある振り子に振動や風などで外部から微小な力がかかると

振り子は微小な振動を始めるが、摩擦による減衰が無ければこの微小振動は永遠に続き、静止状態は漸近安定ではない。しかし、対応する振動は微小であり続け、遠目に見ると静止状態に見え、それに応じて対応する Hamilton 方程式の解は平衡点のごく近くに留まり続ける、という意味では安定とよんで差し支えないものと思われる。

この様な意味の安定性が Lyapunov 安定性である：

定義 3 平衡点は次が成り立つとき Lyapunov 安定であると言われる：

平衡点の任意の近傍について、その内部の別のある近傍内の点を初期値とするすべての解は $t \geq 0$ で最初の近傍内に留まる。

有名な例として、制限三体問題における正三角形解の Lyapunov 安定性は Kolmogorov-Arnol'd-Moser の理論によって示されている。¹⁾

3.2 構造安定性

本節では、ここまで数理モデルや力学の方程式の平衡点に対応する現象が現実に観察される為には、初期値の揺らぎに対する安定性、すなわち漸近安定性や Lyapunov 安定性が必要であることを述べた。しかし、ある意味ではこれは現実の現象と対応させて解釈するには不十分である。

現実の現象を数理モデルで表現すると、通常そこには無数の(必ずしも明示されない)パラメタが含まれることになる。その様なパラメタは周りの実験環境または観察環境の揺らぎによって当然揺らぐことになる。よって、パラメタの小さな揺らぎによって解が消滅したり、大きく性質を変える場合には、その解に対応する現象が現実に観察されることはあまり期待できない。

そこで、この様な方程式の揺らぎに対する安定性が Andronov と Pontryagin による構造安定性の概念である：

定義 4 C^r 多様体 M 上で定義された C^r ベクトル場 $v(x)$ が定める力学系 (M, φ^t) が C^r 構造安定であるとは、 C^r 位相で $v(x)$ に充分近い任意の

C^r ベクトル場 $v'(x)$ について、 M から M 自身への**同相**写像 h で φ^t の各軌道を $v'(x)$ が定める力学系 (M, φ'^t) の各軌道に向きを保って写すものが存在することとする。

すなわち、ベクトル場が C^r 位相で近ければ、そのベクトル場が定める微分方程式の軌道は見た目には変わらない、ということである。

この定義の性質を満たす h が存在する時、二つの力学系 (M, φ^t) と (M, φ'^t) は位相同値であるといい、 h を位相同値写像とよぶ。

微分同相写像の定める(離散)力学系の軌道は曲線ではなく離散的なので、この場合は「軌道を軌道に向きを保って写す」というのは結局次のことを意味する：

定義 5 C^r 多様体 M から M 自身への C^r 微分同相写像 φ が定める力学系 (M, φ^n) が C^r 構造安定であるとは C^r 位相で φ に充分近い任意の C^r 微分同相写像 φ' について、 M から M 自身への**同相**写像 h で以下を満たすものが存在することとする：

$$h \circ \varphi(x) = \varphi' \circ h(x) \quad (14)$$

この定義の (14) を満たす h を位相共役写像とよび、位相共役写像が存在するとき、力学系 φ と φ' は位相共役であるという。

この定義では、 h が M から M 自身への同相写像となっているものを C^r 微分同相写像とすることもできるが、その定義は以下の例で示される様に制限が強すぎると考えられている。

\mathbb{R}^2 の微分方程式を考える：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \mu x_2 \end{cases} \quad (15)$$

$\lambda, \mu < 0$ のとき、解 $(x_1(t), x_2(t))$ は $t \rightarrow +\infty$ で原点に漸近し、その軌道は

$$x_2 = x_1^{\frac{\mu}{\lambda}} \quad (16)$$

であり、 $\frac{\mu}{\lambda}$ が多少違っても、その軌道の様子はほ

とんど変わらない様に見える (図 3)。

しかし、 $\alpha \neq \beta$ ならば、原点で x_1 軸に接するオーダーが異なるので、曲線群 $\{x_2 = Cx_1^\alpha \mid C \in \mathbb{R}\}$ を曲線群 $\{x_2 = Cx_1^\beta \mid C \in \mathbb{R}\}$ に写す微分同相写像は存在しない。

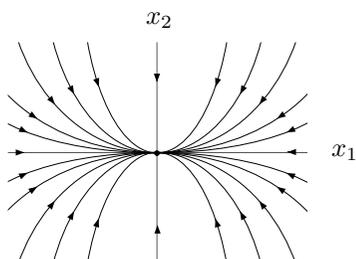


図 3 (15) の解の軌道

同様の理由で、定義 4 における「軌道を軌道に向きを保って写す」を位相共役

$$h \circ \varphi^t(x) = \varphi^{t'} \circ h(x) \quad (17)$$

で置き換えるのも条件が強くなりすぎると考えられる。

さて、定理 1 によると、双曲型平衡点の近傍に制限された力学系はその線形化と (局所) 位相共役であるが、実は (局所) 構造安定であることが以下のようにして分かる。

まず、 x_0 が $v(x)$ の双曲型の孤立特異点であれば $Dv(x_0)$ は 0 を固有値として持たないので、陰関数定理より $v(x)$ に近いベクトル場 $v'(x)$ は x_0 の近傍に孤立した特異点 x'_0 を持つ。

更に、 $Dv(x'_0)$ は $Dv(x_0)$ に近いので実部が 0 の固有値を持たない、すなわち、 x'_0 は $v'(x)$ の双曲型特異点である。更に、実部が正の固有値の (重複度を込めた) 数は一致する (従って実部が負の固有値の数も一致する)。

ここで、 \mathbb{R}^n の原点近傍で定義された二つの線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = By \quad (19)$$

について、 n 次行列 A と B が共に実部 0 の固有値を持たず、更に、実部正の固有値数が等しい

(従って実部負の固有値数も等しい) とする。このとき (18) の定める力学系と (19) の定める力学系は位相同値である。

このことは、 A 、 B の固有値がすべて負の実部を持つ場合を考えると分かりやすい。

この条件の下で、位相同値写像 h を以下の様に構成する。まず、原点は原点に移し、原点中心半径 1 の球面 S 上では恒等写像とする。その他の点は e^{tA} と e^{tB} が位相共役になる様に h を定める、すなわち、各 x に対し $e^{t_x A} x \in S$ となる t_x を取り (図 4)、

$$h(x) := e^{-t_x B} [h|_S(e^{t_x A} x)] \quad (20)$$

と定める (図 5)。この様にして定義された h は原点でも連続である。

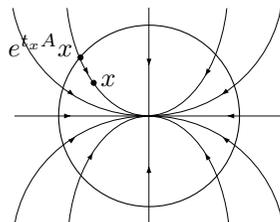


図 4

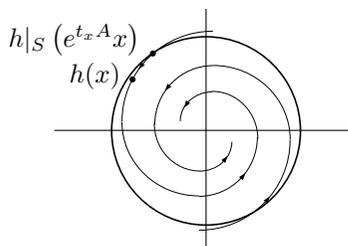


図 5

A 、 B の固有値がすべて正の実部を持つ場合も全く同様であり、一般の場合は、 A 、 B の固有値がすべて負の実部を持つ場合と A 、 B の固有値がすべて正の実部を持つ場合の直積である。

以上を組み合わせると、双曲型平衡点の近傍に制限された力学系は構造安定であることが分かる。

4. 平衡点の分岐

平衡点が双曲型ではないときは構造安定ではな

いため、少しでも方程式が揺らぐと平衡点が消滅したり、平衡点は消滅しない場合でも、その近傍での解の様子は大きく変わる。しかし、その場合も標準的な変化の仕方がある。

4.1 saddle node 分岐

パラメタ $\mu \in \mathbb{R}$ に依存した一次元の方程式を考える：

$$\frac{dx}{dt} = v(x; \mu), \quad x \in \mathbb{R} \quad (21)$$

但し、

$$v(0; 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0; 0) = 0 \quad (22)$$

かつ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0; 0) \neq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}(0; 0) \neq 0 \quad (23)$$

とする。

(23) の二つ目の条件より μ の代わりに $v(0; \mu)$ をパラメタとして取ることができ、そのうえで (21) を x で Taylor 展開したものは

$$\frac{dv}{dt} = \mu + v_1(\mu)x + v_2(\mu)x^2 + \dots \quad (24)$$

であり、更に $x \mapsto x + \frac{v_1(\mu)}{2v_2(\mu)}$ と座標変換すると

$$\frac{dx}{dt} = \mu + v_2(\mu)x^2 + \dots \quad (25)$$

である。以下 $v_2(0) > 0$ とする。

この時 $\mu > 0$ では原点近傍には平衡点は存在せず、 $\mu < 0$ では二つの平衡点 $x_{\pm} \approx \pm \sqrt{\frac{-\mu}{v_2(0)}}$ が存在する。更に、 x_+ は不安定 (線形化の固有値が正) で x_- は漸近安定 (線形化の固有値が負) である (図 6)。

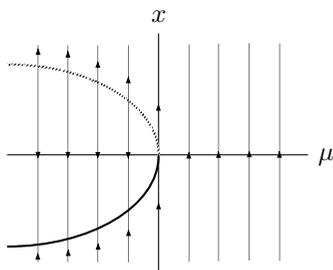


図 6 saddle node 分岐

実線/破線はそれぞれ安定/不安定平衡点を示す

二次元以上でも $v(0) = 0$ かつ $Dv(0)$ が 0 を固有値とする ((22) に対応) ときは、(23) に対応する条件が満たされるならば、同様のことが成り立つ。これを saddle-node 分岐とよぶ。

4.2 pitchfork 分岐

(21) が条件 (22) に加えて更に対称性

$$v(-x; \mu) = -v(x; \mu) \quad (26)$$

を満たす場合 μ に関わらず $v(0; \mu) = 0$ となる。よって (23) は成り立たないが、代わりに

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \mu \partial x}(0; 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0; 0) \neq 0 \quad (27)$$

を仮定する。

このとき (21) において μ の代わりに $\frac{\partial v}{\partial x}$ をパラメタに取り x で Taylor 展開したものは

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + v_3(\mu)x^3 + \dots \quad (28)$$

となる。

$x = 0$ は常に平衡点だが、それ以外に $v_3(0) > 0$ であれば $\mu < 0$ で二つの平衡点 $x_{\pm} \approx \pm \sqrt{\frac{-\mu}{v_3(0)}}$ が存在し、 $v_3(0) < 0$ であれば $\mu > 0$ で二つの平衡点 $x_{\pm} \approx \pm \sqrt{\frac{\mu}{v_3(0)}}$ が存在する。

$x = 0$ は $\mu < 0$ で漸近安定 (線形化の固有値が負) で $\mu > 0$ で不安定 (線形化の固有値が正) だが、 $v_3(0) > 0$ の場合に $\mu < 0$ で存在する平衡点は不安定 (線形化の固有値が正) であり、 $v_3(0) < 0$ の場合に $\mu > 0$ で存在する平衡点は漸近安定 (線形化の固有値が負) である (図 7)。前者を subcritical な pitchfork 分岐、後者を supercritical な pitchfork 分岐とよぶ。

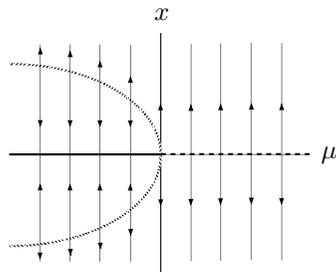


図 7 pitchfork 分岐

実線/破線はそれぞれ安定/不安定平衡点を示す

二次元以上でも $v(0) = 0$ かつ 0 が $Dv(0)$ の

な Hopf 分岐とよぶ。

三次元以上でも $Dv(0)$ が純虚固有値を持つときは同様のことが成り立つ。

参考文献

- 1) E.Diacu, P.Holmes 著, 吉田春夫 訳
「天体力学のパイオニアたち 上・下」
丸善出版, 2012 年
- 2) C.Robinson 著, 國府寛司, 柴山健伸, 岡宏枝 訳
「力学系 上・下」
シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年
- 3) 三波篤郎先生集中講義録
<https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/seminar.html>

(にい しゅんさく, 九州大学数理学研究院)