

葉廣級数と偽テータ関数に関する余録

松坂, 俊輝
九州大学大学院数理学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/7325061>

出版情報 : 2023早稲田大学整数論研究集会報告集, pp.166-172, 2023-03. 早稲田大学整数論研究集会
バージョン :
権利関係 :



葉廣級数と偽テータ関数に関する余録

松坂俊輝

九州大学大学院数理学研究院
matsusaka@math.kyushu-u.ac.jp

はじめに

2023 早稲田整数論研究集会にて行った講演で、次の図を紹介した．ここで $(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k)$ は q -Pochhammer 記号である．

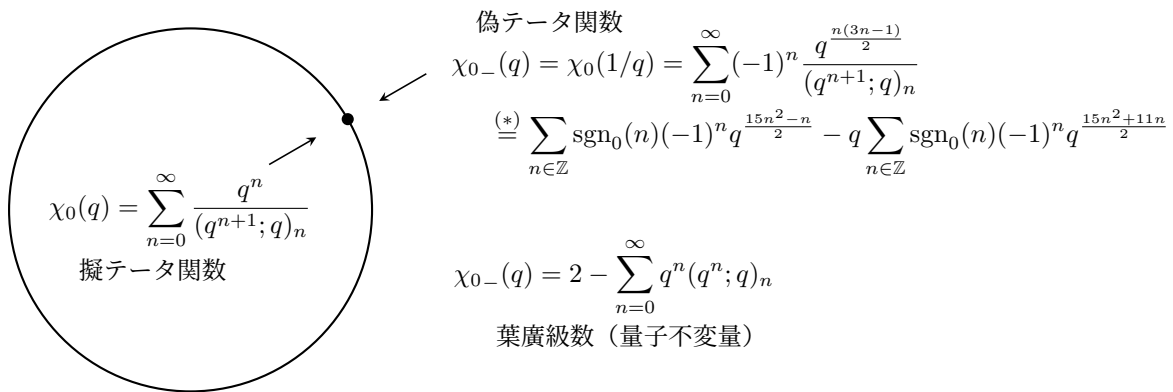


Figure1 擬テータ関数 $\chi_0(q)$ の3種の表示

Ramanujan の最後の手紙 [4, Section 14] に登場する擬 (mock) テータ関数 $\chi_0(q)$ は上記の Eulerian 級数と呼ばれる表示で定義され、 $|q| < 1$ において正則関数を定める．また、 $\chi_0(q)$ の表示が持つ特別な性質ではあるが、実は $|q| > 1$ の範囲においても和が収束し、正則関数を定めることも知られている．これを $\chi_{0-}(q) = \chi_0(1/q)$ ($|q| < 1$) と表すことにしよう．このとき Rogers [16, A(5)] によれば、この $\chi_{0-}(q)$ は「order 15/2 の偽 (false) テータ関数」と呼ぶべき、テータ関数に似た級数表示を持つのだそうだ．ここで「テータ関数に似た」というのは、級数表示に現れる $\text{sgn}_0(n)$ という項（これは通常の符号関数で、 $\text{sgn}_0(0) = 1$ と定義したもの）がなければ古典的なテータ関数そのものである、という意味で言っている．さらに時を経て樋上 [9, Proposition 2] は、 $|q| < 1$ の範囲において、後に葉廣級数と呼ばれるようになる級数表示 $\chi_{0-}(q) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n; q)_n$ を与えた．擬/偽テータ関数の表示が持ちえなかった葉廣級数表示の特徴の一つは、 q が 1 の冪根の場合に無限和が途中で打ち切れ、 $\chi_{0-}(q)$ が有限値を定めることである．

以上、三種の表示を通して、Ramanujan の擬テータ関数 $\chi_0(q)$ は単位円盤内、外、そして境界にある 1 の冪根上で値を定めることが分かった．複素解析を勉強したことのある方であれば、この状況から解析接続を連想することは自然であろうが、実際には「1 の冪根を通して単位円盤の内と外の世界が連続的に繋がっている」なんてことは起こっていないのである．というのも Ramanujan によれば、 q を 1 の冪根に近づけると擬テータ関数の値が無限大に発散するからである．

タ関数 $\chi_0(q)$ は一般には指数関数的に発散するし、Lawrence–Zagier [11] と葉廣 [8] の結果を合わせれば、

$$\lim_{q \rightarrow \zeta_N} \chi_0(q) = 2\chi_0(\zeta_N) - 2$$

が分かるためである。ここで $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ とおいている。

3月に行なった講演では、ある葉廣級数の無限族に対し同様の不連続性を考察したのであった。本来であれば講演の内容について執筆すべきであろうが、この内容は既に論文 [12] として発表しており、また講演の大部分について既に別の報告記事 [13] においても日本語で解説を行なっているため、ここでは重複を避けて、関連する観察・問題について書き連ねることにする。

本稿および集会における講演の機会を与えてくださいました世話人の皆様に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP20K14292 および JP21K18141 の助成を受けたものである。

1 Bailey の補題と Umbral Calculus

1.1 Bailey の補題

Figure 1 における式変形 (*) の鍵となるのは、次の Bailey の補題である。

Theorem 1.1 (Bailey の補題の特別な場合). 複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対し、複素数列 $\alpha = (\alpha_n)_n, \beta = (\beta_n)_n$ が次の等式を満たすとき、 (α, β) を a に関する **Bailey 対** という：

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(q; q)_{n-k}(aq; q)_{n+k}} \quad (n \geq 0).$$

(α, β) が a に関する Bailey 対のとき、

$$\alpha'_n = a^n q^{n^2} \alpha_n, \quad \beta'_n = \sum_{j=0}^n \frac{a^j q^{j^2}}{(q; q)_{n-j}} \beta_j$$

で定まる数列の組 (α', β') もまた、 a に関する Bailey 対となる。

証明は Andrews のモノグラフ [2, Section 3] を参照（日本語の書籍であれば、[18, Section 2.3] を参照）。 (α', β') が a に関する Bailey 対であることから、次の等式を得ることもできる。

Corollary 1.2. (α, β) が a に関する Bailey 対であるとき、次が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n q^{n^2} \beta_n = \frac{1}{(aq; q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} a^n q^{n^2} \alpha_n.$$

Example 1.3. 次で定まる数列 $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ は a に関する Bailey 対であり、**単位 Bailey 対** と呼ばれる (Andrews [1, (2.12), (2.13)] を参照)。

$$\alpha_n^{(0)} = \frac{(1 - aq^{2n})(a; q)_n (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-a)(q; q)_n}, \quad \beta_n^{(0)} = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

Example 1.4. 単位 Bailey 対に Bailey の補題を適用することで、新たな a に関する Bailey 対

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{(1 - aq^{2n})(a; q)_n (-1)^n a^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}}{(1-a)(q; q)_n}, \quad \beta_n^{(1)} = \frac{1}{(q; q)_n}$$

を得る．または，単位 Bailey 対 $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ に [Corollary 1.2](#) を適用することで，

$$(aq; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - aq^{2n})(a; q)_n (-1)^n a^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}}{(1 - a)(q; q)_n}$$

を得る．特に $a = 1$ のとき，

$$(q; q)_\infty = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

を得るが，これはいわゆる **Euler の五角数定理** である．さらに Bailey 対 $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ に [Corollary 1.2](#) を適用すれば，Rogers–Ramanujan 恒等式を得る．

1.2 Umbral Calculus

Umbral Calculus とは，大雑把に言えば「数列 a_n の添字をあたかも冪指数のように扱うことで，数列 a_n が満たす関係式を導出する」という手法である．有名な例の一つを紹介しよう．

Definition 1.5. 次の母関数で定義される多項式 $B_n(x)$ を **Bernoulli 多項式** という．

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

このとき，例えば次が成り立つことが知られている．

$$B_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k}. \quad (1.1)$$

これと，二項定理

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k x^{n-k}$$

は非常に似ているというのが，Umbral Calculus の言わんとしているところである．つまり， $B_n(x)$ をあたかも x^n かのように思うことで，(1.1) は二項定理から自然に類推されるというのである．この Umbral Calculus と呼ばれる「添字と指数の大胆な読み替え」は，Rota–Taylor [17] によって 1 つの定式化が与えられている．ここでその具体的な定式化を述べることはしないが，代わりに上の例を，Rota–Taylor [17] にならって Bernoulli 作用素 I を用いて説明しよう．詳しくは [5, Section 4.3] の Zagier による Bernoulli 多項式の定義も参照するとよい． $\mathbb{Q}$ -線型作用素 $I : \mathbb{Q}[y] \rightarrow \mathbb{Q}[y]$ を

$$I(f) = \int_y^{y+1} f(t) dt$$

によって定義するとき，この作用素は可逆になることが分かる．このとき，Bernoulli 多項式は $B_n(y) = I^{-1}(y^n)$ ，すなわち， $I(B_n(y)) = y^n$ を満たす唯一の多項式として特徴付けられる．このセッティングのもと，(1.1) は二項定理から直接示される．実際，任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$I(B_n(x + y)) = (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I(B_k(y)) x^{n-k} = I\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k}\right)$$

が成り立つという仕組みである．他にも Bernoulli 多項式の持つ Appell 性，すなわち， $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ という性質も，上の Bernoulli 作用素を用いれば $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ から従うことがわかる．

様々な等式が Umbral Calculus を通して再解釈される中で, Rota と Andrews は Bailey の補題も Umbral Calculus を用いて解釈できないか議論をしており, その結果が Andrews [3] によって発表されている. 以下, 簡単に紹介しよう.

Bailey の補題の基礎となるのは, Jacobi の三重積と Euler の恒等式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} z^n = (q; q)_\infty (-zq^{1/2}; q)_\infty (-z^{-1}q^{1/2}; q)_\infty, \quad (1.2)$$

$$(-zq^{1/2}; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2/2} z^n}{(q; q)_n} \quad (1.3)$$

である. これより直ちに

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} z^n = (-zq^{1/2}; q)_\infty (-z^{-1}q^{1/2}; q)_\infty = \sum_{r, s \geq 0} \frac{q^{\frac{r^2+s^2}{2}} z^{r-s}}{(q; q)_r (q; q)_s}$$

を得る. ここで, Umbral Calculus の精神に則って,

$$z^n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } n : \text{奇数}, \\ a_{n/2} & \text{if } n : \text{偶数} \end{cases}$$

のように置き換えれば,

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n^2} a_n = \sum_{\substack{r, s \geq 0 \\ r \equiv s \pmod{2}}} \frac{q^{\frac{r^2+s^2}{2}} a_{\frac{r-s}{2}}}{(q; q)_r (q; q)_s}$$

となる. 最後に, $r = m + j, s = m - j$ と変数変換を行なって, $a_n = q^{-n^2} \alpha_n$ と取り換えれば,

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \alpha_n = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |j| \leq m}} \frac{q^{m^2} \alpha_j}{(q; q)_{m+j} (q; q)_{m-j}}$$

を得る. これはまさに, $a = 1$ の場合の Bailey の補題 (Corollary 1.2) の Bilateral 版である. やや人工的な感じもするが, これも一種の Umbral Calculus であろう. Bilateral 版においては, $\alpha_n = (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ と取れば, 五角数定理が得られる.

Andrews はここから一步先へ進み, Bailey の補題の多重版, および五角数定理の二重・三重版を与えている. さらに論文 [3] の中で, そこから派生した幾つかの問題が提出されているが, 未解決なものも多数あるようなので, ここで簡単にまとめておく.

Question 1.6 ([3]). Bailey の補題が Jacobi の三重積に対する Umbral Calculus の結果と見るとき, Watson の五重積や Winquist 恒等式, Macdonald 恒等式などからは何が得られるか?

Question 1.7 ([3]). s 重五角数級数

$$\frac{1}{(q; q)_\infty^s} \sum_{n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}} (-1)^{n_1 + \dots + n_s} q^{n_1^2 + \dots + n_s^2 + \binom{n_1 + \dots + n_s}{2}}$$

の簡単な表示はあるか.

2 葉廣級数に関する問題

Example 1.4 で得た Bailey 対 $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ に対して, 繰り返し Bailey の補題を適用することで, 我々は次々と新たな Bailey 対を得ることができる. 例えば $a = 1$ のとき, 次のようになる.

Proposition 2.1. [12, Proposition 2.6] 正の整数 $p \geq 1$ に対し、数列の組 $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$ を次のように定めると、これは 1 に関する *Bailey* 対となる。

$$\alpha_n^{(p)} = (-1)^n q^{(p+\frac{1}{2})n^2 - \frac{1}{2}n} (1 + q^n) - \delta_{n,0},$$

$$\beta_n^{(p)} = \frac{1}{(q; q)_n} \sum_{n=s_p \geq \dots \geq s_1 \geq 0} \prod_{i=1}^{p-1} q^{s_i^2} \begin{bmatrix} s_{i+1} \\ s_i \end{bmatrix}_q.$$

ここで、 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$ は q -二項係数である。

この *Bailey* 対と、幾つかの q -級数変形を組み合わせることで、樋上 [10, (3.24b)] によって導入された葉廣級数 $M_2^{(2)}(q)$ を無限族に拡張した $H_p^{(2)}(q)$ の 2 次元偽テータ級数表示が得られる。

Theorem 2.2 ([12, Theorem 2.15]).

$$\begin{aligned} H_p^{(2)}(q) &:= \sum_{s_p \geq \dots \geq s_1 \geq 0} q^{s_p} (q^{s_p}; q)_{s_p} \prod_{i=1}^{p-1} q^{s_i^2} \begin{bmatrix} s_{i+1} \\ s_i \end{bmatrix}_q \\ &= \frac{1}{(q; q)_\infty} \left(\sum_{a, b \geq 0} - \sum_{a, b < 0} \right) (-1)^{a+b} q^{(p+\frac{1}{2})a^2 + 2ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b}. \end{aligned}$$

特に $p = 1$ のとき、

$$H_1^{(2)}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n; q)_n \quad (2.1)$$

であるので、これは Figure 1 の $\chi_{0-}(q)$ の一般化である。論文 [12] では、他に 4 つの葉廣級数の無限族 $H_p^{(1)}(q), \dots, H_p^{(5)}(q)$ を並行して考察していることにも注意しておく。さて、Theorem 2.2 を変形して

$$\begin{aligned} H_p^{(2)}(q) &= \frac{1}{2(q; q)_\infty} \sum_{a, b \in \mathbb{Z}} \text{sgn}_0(a) (-1)^{a+b} q^{(p+\frac{1}{2})a^2 + 2ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} \\ &\quad + \frac{1}{2(q; q)_\infty} \sum_{a, b \in \mathbb{Z}} \text{sgn}_0(b) (-1)^{a+b} q^{(p+\frac{1}{2})a^2 + 2ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} \\ &=: C_p^{(2)}(q) + D_p^{(2)}(q) \end{aligned}$$

と書き換えるとき、次が $H_p^{(2)}(q)$ に対する不連続性/連続性定理である。

Theorem 2.3 ([12, Theorem 3.21, Corollary 3.9]). 正の整数 $N \geq 1$ に対し、 $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ とおく。このとき、 $\lim_{q \rightarrow \zeta_N} D_p^{(2)}(q)$ は一般に発散する。一方で、 $C_p^{(2)}(q)$ は極限 $q \rightarrow \zeta_N$ において収束し、次が成り立つ。

$$\lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_p^{(2)}(q) = \frac{1}{24(6p-1)N} \sum_{n=1}^{12(6p-1)N} n \chi_{(2,3,6p-1)}^{(1,1,p)}(n) \zeta_N^{\frac{n^2-1}{24(6p-1)}}.$$

ここで $\chi_{(2,3,6p-1)}^{(1,1,p)} : \mathbb{Z}/12(6p-1)\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は一般に

$$\chi_{(p_1, p_2, p_3)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}(n) = \begin{cases} -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 & \text{if } n \equiv p_1 p_2 p_3 \left(1 + \sum_{j=1}^3 \frac{\varepsilon_j \ell_j}{p_j}\right) \pmod{2p_1 p_2 p_3}, \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

(但し $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$) で定まる周期関数である。

$p = 1$ の場合により詳しく見てみよう．まず，この場合に限った話ではあるが，定義より $C_1^{(2)}(q) = D_1^{(2)}(q) = \frac{1}{2}H_1^{(2)}(q)$ が成り立つ．したがって上の定理から，

$$\frac{1}{2} \lim_{q \rightarrow \zeta_N} H_1^{(2)}(q) = \lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_1^{(2)}(q) = \frac{1}{120N} \sum_{n=1}^{60N} n \chi_{(2,3,5)}^{(1,1,1)}(n) \zeta_N^{\frac{n^2-1}{120}}$$

が成り立つ．ここで，

$$\chi_{(2,3,5)}^{(1,1,1)}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 31, 41, 49, 59 \pmod{60}, \\ -1 & \text{if } n \equiv 1, 11, 19, 29 \pmod{60}, \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

である． $N = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ に対して収束値を計算すると，

$$\left(\lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_1^{(2)}(q) \right)_{N \geq 1} = (1, -1, -2\zeta_3^2, -i, \zeta_5 + \zeta_5^2 - \zeta_5^{-1}, \dots)$$

となる．一方で，(2.1) で与えた $H_1^{(2)}(q)$ の $q = \zeta_N$ における値を計算すると，

$$\left(H_1^{(2)}(\zeta_N) \right)_{N \geq 1} = (1, -1, -2\zeta_3^2, -i, \zeta_5 + \zeta_5^2 - \zeta_5^{-1}, \dots)$$

となり，一致しているように見える．実際，Lawrence–Zagier [11, Theorem 1] によって前者が Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2, 3, 5)$ に対する WRT 不変量と等しいことが示されており，葉廣 [8, Section 16] によって後者が同じく $\Sigma(2, 3, 5)$ の WRT 不変量と等しいことが示されているので，これらの値はたしかに一致する．

Theorem 2.4 ($H_1^{(2)}(q)$ の $q = \zeta_N$ における不連続性)．任意の正の整数 $N \geq 1$ に対し，

$$\frac{1}{2} \lim_{q \rightarrow \zeta_N} H_1^{(2)}(q) = \lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_1^{(2)}(q) = H_1^{(2)}(\zeta_N).$$

では，WRT 不変量との関係を用いることなくこれらの一致を示すことは出来るだろうか．

Question 2.5 ([10, 12])．正の整数 $N \geq 1$ に対し，次を直接示せ．

$$\left(\lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_1^{(2)}(q) \right) = \frac{1}{120N} \sum_{n=1}^{60N} n \chi_{(2,3,5)}^{(1,1,1)}(n) \zeta_N^{\frac{n^2-1}{120}} = \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^n (\zeta_N^n; \zeta_N)_n \left(= H_1^{(2)}(\zeta_N) \right).$$

同様に，数値計算によると次も成り立ちそうであるが，やはり証明はできていない．

Question 2.6 ([10, 12])．正の整数 $p, N \geq 1$ に対し，次は成り立つか．

$$\lim_{q \rightarrow \zeta_N} C_p^{(2)}(q) = H_p^{(2)}(\zeta_N).$$

成り立つ場合， $H_1^{(2)}(q)$ と同様に WRT 不変量などを用いた解釈は可能か．また，他の 4 つの無限族 $H_p^{(1)}(q), \dots, H_p^{(5)}(q)$ についても同様のことが成り立つか．

Question 2.7. Figure 1 で説明したように， $H_1^{(2)}(q)$ は Eulerian 級数表示

$$H_1^{(2)}(q) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{n(3n-1)}{2}}}{(q^{n+1}; q)_n}$$

を持ち， q を $1/q$ に取り替えても収束する q 級数を与える．またそれは Ramanujan の擬テータ関数 $\chi_0(q)$ に等しいということであった． $H_p^{(2)}(q)$ に対しても同様に， q を $1/q$ に取り替えても収束するような Eulerian 級数表示があるだろうか．また存在するなら，それはどのような保型形式を与えるだろうか．

さらに関連する幾つかの問題を記しておく.

Question 2.8. 樋上 [10, (3.5)] はさらに, *Brieskorn* ホモロジー球面 $\Sigma(2, 3, 6p+1)$ の場合の *unified WRT* 不変量として $(H_p^{(1)}(q), \dots, H_p^{(5)}(q))$ とは異なる) 葉廣級数

$$\sum_{s_p \geq \dots \geq s_1 \geq 0} q^{-s_p(s_p+2)} (q^{s_p+1}; q)_{s_p+1} \prod_{i=1}^{p-1} q^{s_i(s_i+1)} \begin{bmatrix} s_{i+1} \\ s_i \end{bmatrix}_q$$

を考察している. この場合にも [Theorem 2.3](#) と同様の結果を得ることは出来るか.

Question 2.9. 一般の *Seifert* ホモロジー球面に対しても [6, 7, 14] はホモロジカル・ブロックという q -級数

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-3}{n-3} q^{\frac{p_1 \cdots p_n}{4} (2m+n-2 + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j}{p_j})^2}$$

を考察している (より一般の場合のホモロジカル・ブロックについては [15] も参照). これは偽テータ関数 (部分テータ関数) の形で与えられているが, $q = \zeta_N$ を直接代入できるような葉廣級数表示は持つだろうか.

また, [Figure 1](#) で説明した擬テータ関数と偽テータ関数の不思議な対応関係については, 報告記事 [13] でも触れており, そこでも幾つかの問題をまとめている.

References

- [1] G. E. Andrews, *Multiple series Rogers-Ramanujan type identities*, Pacific J. Math. **114** (1984), no. 2, 267–283.
- [2] ———, *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 66, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [3] ———, *Umbral calculus, Bailey chains, and pentagonal number theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **91** (2000), no. 1-2, 464–475. In memory of Gian-Carlo Rota.
- [4] G. E. Andrews and B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook. Part V*, Springer, Cham, 2018.
- [5] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko, ベルヌーイ数とゼータ関数 (新装版) 整数論の風景, 共立出版, 2022.
- [6] H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami, and Y. Terashima, *Witten-Reshetikhin-Turaev function for a knot in Seifert manifolds*, Comm. Math. Phys. **386** (2021), no. 1, 225–251.
- [7] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa, *BPS spectra and 3-manifold invariants*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 2, 2040003, 85.
- [8] K. Habiro, *A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 1–81.
- [9] K. Hikami, *Mock (false) theta functions as quantum invariants*, Regul. Chaotic Dyn. **10** (2005), no. 4, 509–530.
- [10] ———, *Hecke type formula for unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants as higher-order mock theta functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN **7** (2007), Art. ID rnm 022, 32.
- [11] R. Lawrence and D. Zagier, *Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds*, 1999, pp. 93–107. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.
- [12] T. Matsusaka, *Hikami's observations on unified WRT invariants and false theta functions*. arXiv:2212.06337, accepted, “Low Dimensional Topology and Number Theory” Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.
- [13] ———, テータ関数の 2 つの様式「擬テータ」と「偽テータ」. 第 6 回数理新人セミナー報告集.
- [14] T. Matsusaka and Y. Terashima, *Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres*. arXiv:2112.06210.
- [15] Y. Murakami, *A proof of a conjecture of Gukov–Pei–Putrov–Vafa*. arXiv:2302.13526.
- [16] L. J. Rogers, *On two theorems of combinatory analysis and some allied identities*, Proc. Lond. Math. Soc. **16** (1917), no. 2, 315–336.
- [17] G.-C. Rota and B. D. Taylor, *The classical umbral calculus*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), no. 2, 694–711.
- [18] A. V. Sills, 魅惑のロジャーズ・ラマヌジャン恒等式, 共立出版, 2021. 高瀬幸一 (訳).