

学部生のための「ミクロ・マクロ双対性」とその周辺の物理学講義：補講Q：InstrumentとEffectの双対関係

成清，修
九州大学理学部物理学科

<https://hdl.handle.net/2324/7239397>

出版情報：2024-10-30
バージョン：
権利関係：



学部生のための 「ミクロ・マクロ双対性」 とその周辺の物理学講義

九州大学理学部物理学科 成清 修

補講 Q：Instrument と Effect の双対関係

双対関係

量子測定理論に登場する Instrument と Effect の双対関係について、[小澤, Ozawa] で解説¹されている内容をまとめてみる。

物理量 A の期待値 $\text{Tr}[A\rho]$ を考える。ここでは ρ を状態と呼ぶ。簡単のため、純粋状態に話を限ることにすると、ベクトル状態 $|\psi\rangle$ を用いて $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ である。

状態 ρ が写像 T によって変換され、その結果を $T(\rho)$ とする。ベクトル状態がユニタリ行列 U によって $|\psi\rangle$ から $U|\psi\rangle$ に変換されるときには、 $T(\rho) = U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger = U\rho U^\dagger$ である。以下においても、写像 T が $T(\rho) = M\rho M^\dagger$ のように表現される場合²に話を限る。

ここで、次の式によって、写像 T の双対 T^* を導入する。

$$\text{Tr}[AT(\rho)] = \text{Tr}[T^*(A)\rho] \quad (1)$$

トレースの巡回性³から、 $T^*(A) = M^\dagger AM$ である。 $T(\rho)$ では状態の変換を考えており、Schrödinger 描像と言える。 $T^*(A)$ では物理量の変換を考えており、Heisenberg 描像と言える。この点に関しては、最後の節（3つの方程式）でユニタリ行列の場合について述べる。

Instrument と Effect

¹有限自由度の量子系に話が限られている。本補講も同様である。

²ただし、 M はユニタリ行列でなくてもよい。測定理論においては測定演算子とか Kraus 演算子と呼ばれるものにあたる。

³ $\text{Tr}[AM\rho M^\dagger] = \text{Tr}[M^\dagger AM\rho]$

双対関係の式 (1) において、 $A = I$ とした場合⁴を考える。Instrument については、測定理論を議論する際に考えることにして、ここではとりあえず、写像 T を Instrument $\mathcal{I}$ としてみると

$$\text{Tr}[\mathcal{I}\rho] = \text{Tr}[\mathcal{I}^*(I)\rho] \quad (2)$$

となる。ここで、 $\mathcal{E} \equiv \mathcal{I}^*(I)$ において、 $\mathcal{E}$ を Effect と呼ぶ。

M を用いてあらわすと、 $\mathcal{I}(\rho) = M\rho M^\dagger$ および $\mathcal{E} = M^\dagger M$ である。

3つの方程式

ユニタリ行列 U が、エルミート行列 H によって $U = \exp(-iHt/\hbar)$ と表現される場合を考える (H はパラメタ t には依らない)。 $|\psi(t)\rangle \equiv U|\psi\rangle$ とすると、これは Schrödinger 方程式 $i\hbar(d/dt)|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ を満たす。

$\rho(t) \equiv |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ とすると、 $\langle\psi(t)| = \langle\psi|U^\dagger$ より、 $\rho(t) = U\rho U^\dagger \equiv T(\rho)$ である。これは von Neumann 方程式 $i\hbar(d/dt)\rho(t) = [H, \rho(t)]$ を満たす。

双対として、物理量 A は $T^*(A) = U^\dagger A U \equiv A(t)$ のように変換する。これは Heisenberg 方程式 $i\hbar(d/dt)A(t) = [A(t), H]$ を満たす。

ここに、 $[A, B] \equiv AB - BA$ である。

参考文献

[小澤]

小澤「量子測定理論入門」：物性研究 97-5 (2012) 1031.

[Ozawa]

Ozawa 「Quantum Measurement Theory for Systems with Finite Dimensional State Spaces」：arXiv:2110.03219v2.

(2024-10-30)

⁴ I は単位行列。