

Integrable Structure of the Overlaps for Integrable Non-Hermitian Random Matrices and Zeros of Random Power Series with Finitely Dependent Gaussian Coefficients

野田, 航平

<https://hdl.handle.net/2324/7182550>

出版情報 : Kyushu University, 2023, 博士 (数理学) , 課程博士
バージョン :
権利関係 :



氏 名 : 野田 航平

論 文 名 : Integrable Structure of the Overlaps for Integrable Non-Hermitian Random Matrices and Zeros of Random Power Series with Finitely Dependent Gaussian Coefficients

(可積分な非エルミートランダム行列のオーバーラップの可積分構造と有限従属なガウス確率変数を係数にもつランダム冪級数の零点)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本学位論文では可積分な非エルミートランダム行列の **overlap** の多点相関関数の行列式構造と Pfaffian 構造を研究, 及び定常複素ガウス過程の一種である有限従属な複素ガウス確率変数を係数にもつランダム冪級数の零点の個数の期待値の漸近挙動を詳細に調べる.

overlap とは非正規行列の左右固有ベクトルによって定義される量であり, **diagonal overlap** は **condition number** としても理解でき, 行列の固有値の不安定性の解析において本質的な役割を果たす. Chalker と Mehlig は Ginibre unitary ensemble (GinUE) と呼ばれるサイズ N の標準複素ガウス確率変数を要素に持つ典型的な非正規ランダム行列に対して **overlap** を導入し, 1 点, 2 点相関関数の系統的な研究を行った. 後に, Bourgade と Dubach は確率論的な方法で **overlap** を解析し, Akemann, Tribe, Tsareas, Zaboronski は **overlap** の多点相関関数を直交多項式の方法によって解析し, 有限の N に関して成り立つ行列式構造とその帰結として 1 点及び 2 点相関の明示式を与え, スケーリング極限を計算した.

Peres と Virág は独立同分布な標準複素ガウス確率変数を係数にもつランダム冪級数の零点過程が行列式点過程となることを示した. その結果として, 零点の個数の期待値や分散といった統計量の計算を容易に実行できる. Peres と Virág による仕事以降, ガウス確率変数を係数にもつランダム級数の様々な拡張が知られているが, いずれの拡張も係数のガウス確率変数の独立同分布性を仮定し, この仮定を除いたモデルは限られたものであった. また, 零点の個数の期待値のような基本的な統計量でさえ正確な計算もこれまでなされていなかった.

本学位論文の概要は以下の通りである.

1. Determinantal structure of the overlaps for the induced Ginibre/spherical unitary ensemble
Akemann らによる結果を induced Ginibre/spherical unitary ensemble (IGinUE/ISUE) に拡張した. IGINUE は GinUE の 1 パラメーター拡張であり, GinUE のマクロな固有値分布が単位円板上の一様分布であるの対し, IGINUE のマクロな固有値分布は円環上の一様分布である. このような幾何的構造の違いにより, IGINUE の **overlap** の条件付き期待値の漸近挙動は円環の境界からの影響を強く受けることを示し, GinUE との違いを示した. また, 多点相関関数における項はモデルの違いに依らずに普遍的であることを示した. さらに, パラメータの取り方によっては, IGINUE のマクロな固有値分布が単位円周に集積する場合と原点で特異性を持つ場合

があり、そのような場合に関しても **overlap** の条件付き期待値と多点相関関数のスケーリング極限を計算した。ISUE は I GinUE と同様の構造を持つが、非ガウス型の可積分な非エルミートランダム行列模型であり、マクロな固有値分布は円環ではあるが、一様ではない。この模型に関しても I GinUE と同様の計算を実行し、**overlap** の条件付き期待値が円環の境界から強く影響を受けること及び多点相関関数の普遍性を示した。

2. Pfaffian structure of the diagonal overlap for the Ginibre symplectic ensemble (GinSE)

GinSE は symplectic 構造を備えた複素正規分布を要素に持つサイズ $2N$ の非エルミートランダム行列である。その固有値分布は複素共役とペアをなし、実軸に関して対称的に反発する対数クーロンガス模型である。Gernot Akemann (Bielefeld University) と Sung-Soo Byun (Seoul National University) との共同研究で、実軸上の点で条件付けた **diagonal overlap** に関する多点相関関数を計算した。その結果として、実軸上の点で条件付けた **diagonal overlap** の期待値のバルクとエッジでのスケーリング極限とバルクに関する歪対称核関数のスケーリング極限を計算した。この歪対称核関数を明示的に与えるためには、**overlap** に付随した重み関数に関する歪直交多項式を構成する必要があるが、従来知られていた枠組みでは所望の歪直交多項式を構成することができず、新しい枠組みを作る必要があった。その構成法を与えたことが本研究の核心である。また、たとえ歪対称核関数を明示的に計算することができたとしても、そのスケーリング極限を計算することは容易ではない。その難点を克服するために、ある二階の微分作用素を導入し、有限の N に対して歪対称核関数に関する二階の非斉次微分方程式を導出した。その微分方程式の非斉次項の極限の計算は元の歪対称核関数に比べて依然として多くの計算を必要とするが実行可能であり、極限で現れる微分方程式を解くことにより、極限の歪対称核関数を計算した。この種の二階の微分方程式はこれまで知られている **planar symplectic ensemble** の歪対称核関数の計算で現れなかったものであり、この解析自身新しい。

3. 有限従属な複素ガウス確率変数を係数にもつランダム冪級数の零点の個数の期待値の漸近挙動
白井朋之教授との共同研究で定常複素ガウス過程を係数にもつランダム冪級数の零点過程に関して、Peres と Virág のランダム冪級数の零点の個数の期待値は定常複素ガウス過程を係数にもつランダム冪級数のものよりも常に大きいという定性的な性質を示した。また、有限従属な定常複素ガウス過程を係数にもつランダム冪級数を考えたときには、その漸近挙動の **sub-leading order** を計算し、そのオーダーは係数のガウス過程に付随するスペクトル関数の決定論的な零点の多重度によって決まることを示した。さらに特定の場合には定数項まで正確に計算し、**sub-sub-leading order** まで決定した。