Classifications of singularities of plane curves and geometric invariants of flat fronts in the unit 3-sphere

松下，尚生

https://hdl.handle.net/2324/7182312

出版情報：Kyushu University, 2023, 博士（機能数理学），課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	松下　尚生
論　文　名	Classifications of singularities of plane curves and geometric invariants of flat fronts in the unit 3-sphere （平面曲線の特異点の分類や 3 次元単位球面内の平坦波面の幾何学的不変量に関する研究）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　　鍛冶静雄 副　査　　九州大学　　教授　　佐伯修 副　査　　九州大学　　准教授　　大津幸男 副　査　　九州大学　　名誉教授　小磯深幸 副　査　　横浜国立大学　　准教授　　本田淳史

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

平面曲線において速度ベクトルが零ベクトルになる点、3 次元ユークリッド空間内の曲面においてはめ込みでない点を特異点という．特異点は平面曲線の平行曲線や縮閉線及び曲率に制限がある曲面に自然に現れるため、微分幾何学において避けることのできない重要な研究対象である．しかしながら、正則点において自然と定義される単位法ベクトル場が特異点にまで必ずしも滑らかに拡張できるわけではないことや特異点において曲率が発散する可能性があることがその扱いを困難にしている．さらに、写像の特異点論の局所的な考察として、ホイットニーの例など非常に簡単な場合でも非可算濃度の特異点の型が現れることが知られている．このように、扱いの難しい特異点であるが、近年では平面曲線に現れる特異点の分類や曲面の非退化特異点において様々な曲率が導入され、特異点における幾何学的意味だけでなく、ガウス曲率や平均曲率などとの関係が研究されている．

本学位論文では、3 次元単位球面内の平坦波面の特異点における幾何学的不変量の性質や平面曲線の特異点の分類について以下の成果がまとめられている．

第 1 章では、研究の背景及び概要が述べられている．

第 2 章では、3 次元単位球面内の平坦波面に関する研究が報告されている．3 次元球面内の内在的なガウス曲率が零な曲面である平坦曲面は、線形波動方程式の解に対応し、その解の値域は有限開区間であることが知られている．この値域を実数全体へ拡張すると、対応する平坦曲面は特異点を持つ可能性があるが、佐治-梅原-山田（2011）の研究結果より、平坦曲面の場合にはその単位法ベクトル場を特異点まで滑らかに拡張できることが分かる．よって、3 次元球面内の平坦波面を波動方程式の立場から考察できる．本論文ではこのような状況において、國分-Rossman-佐治-梅原-山田（2005）の研究結果を用いることで、カスプ辺やツバメの尾の判定条件を波動方程式の解の情報から得たことにより、平坦波面の特異点とその単位法ベクトル場の特異点においてある種の双対関係を明らかにしている．また、佐治-梅原-山田（2009）により導入された特異曲率、Martins-佐治-梅原-山田（2016）により導入されたカスプ的曲率、Martins-佐治（2016）により導入されたカスプ的捩率を、共にカスプ辺をもつ平坦波面とその単位法ベクトル場について、波動方程式の解を用いて具体的に計算し、いくつかの双対性を見出している．特にカスプ辺の形状に深く関係がある特異曲率が互いに異符号の関係になることから、平坦波面とその単位法ベクトル場の特異点における凹

凸の関係を明らかにしている．さらに、平坦波面の焦曲面（与えられた曲面の法指数写像の特異値集合や高さ関数族の分岐集合として定式化されるもの）の平均曲率においても類似の双対性を得ている．

第３章では、平面曲線の特異点と縮閉線に関する研究が報告されている．曲率が零となる変曲点を持たない正則曲線に対して、曲率円の中心の軌跡を縮閉線といい、包絡線、光学に関する応用や相対性理論との関係から古くより研究されている．曲線が特異点を持つと従来の手法通りに縮閉線は定義できないが、 福永-高橋（2014）の研究により、波面の特異点の近傍に対して縮閉線が定義され、その有用な表現公式が与えられた．さらに、波面の特異点が縮閉線を取る操作で重複度ｎの特異点（その点における（ｎ－１）階微分までは零ベクトルであり、ｎ階微分では零ベクトルではない点）が縮閉線において重複度（ｎ－１）の特異点になることが証明されており、その例として、(２,３)カスプや(３,４)カスプに関する縮閉線の様子が考察されている．実際、(２,３)カスプに対しては１回、(３,４)カスプに対しては２回縮閉線を考えると、その縮閉線は正則になる．このような先行研究から、波面の縮閉線はこれらの特異点の一般化である（ｎ,ｎ+１)カスプに対しても同様の性質が成り立つことが期待される．本論文では(ｎ,ｎ+１)カスプにおける座標不変量を導入し、その応用として同様の性質が一般の場合でも成立することを証明している．また、この不変量が(ｎ,ｎ+１)カスプの粗い判定条件に対応することも明らかにしている．さらにこの不変量の簡単な応用として、縮閉線を用いた右左同値の意味での(ｎ,ｎ+１)カスプに関する部分的な判定法を得ている．

第４章では、(４,５)カスプの判定条件に関する研究を行っている．カスプは平面曲線に現れる最も基本的な特異点の一つである．カスプに関する分類としては、Bruce-Gaffney (1982) により複素解析同値の意味でなされているが、特異点の型を定義から直接調べることは一般に困難である．従って、それらのより簡単な判定条件を調べることは重要な研究課題である．先行研究では、(２,３)カスプ、(２,５)カスプ、(２,７)カスプ、(３,４)カスプや(３,５)カスプに関する判定条件、ｎを９以上の奇数としたとき、(２,ｎ)カスプであるための十分条件が知られている．本論文においては、(ｎ,ｎ+１)カスプと縮閉線の関係性が与えられた．その中でも(４,５)カスプの判定条件を与えることは重要であるが、高次の項の影響を受けるという困難から、(４,５)カスプに関連した判定条件は長年与えられていなかった．本論文では(４,５ ；±７)カスプ的曲率と呼ばれる幾何学的不変量を導入し、その不変量の符号を調べることで(４,５)カスプに関連する特異点の判定条件を完全に与えている．

以上の結果は、幾何学の分野において価値ある業績と認められる．

よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．