

可積分幾何による美的形状の生成

Kajiwara, Kenji
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

<https://hdl.handle.net/2324/7178657>

出版情報 : 2024-03-20
バージョン :
権利関係 :

可積分幾何による美的形状の生成

梶原 健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*

1 はじめに

工業意匠設計分野ではデザイナーたちが「美しい」形状のデザインを追求している。例えば、図のような小刀の刃の形状や蝶の羽の上部の形状は多くの人が「美しい」と感じるだろう。もちろん、さまざまな場面での「美しさ」を統一的に測ったり定式化したりする



図 1: 美しい形状の例：刀と蝶の羽

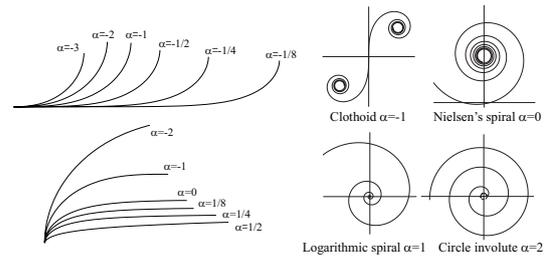


図 2: さまざまな LAC

ことは簡単にできることではないが、原田らは車のデザイナーたちが「美しい」とみなす数千の平面曲線を集め、共通の性質を抽出することを試みた [1, 2]. そこでは、与えられた曲線の曲率半径の所属区間を設定し、その区間に属する曲線片の弧長のヒストグラムを両対数グラフにプロットしたグラフ（曲率対数分布図）が考察され、「美しい」曲線は曲率対数分布図が直線になっていることを見出した。金谷らは曲率対数分布図は連続化して横軸が曲率半径 q 、縦軸が ds/dq の (s : 弧長) 両対数グラフである曲率対数グラフに同等であることを示し [3], 三浦はそれが傾き α の直線という方程式を解いて、曲率半径が

$$q(s)^\alpha = \begin{cases} \xi s + \eta & (\alpha \neq 0), \\ \exp(\xi s + \eta) & (\alpha = 0) \end{cases} \quad \xi, \eta : \text{const.} \quad (1)$$

で与えられる曲線に対数型美的曲線 (log-aesthetic curve, LAC) と定義した [4]. LAC は形状パラメータ α をもつらせん形をした曲線で、 α の値によって著名な曲線を含んでいる。LAC については [8] も参照されたい。

私が LAC を知った契機は、企業の CAD の実務家の方から私の共同研究者を通じて、LAC を空間曲線や曲面に拡張したいが指導原理がない、何かよい数学的基盤ができないか、という相談があったことである。その際に LAC を相似幾何で扱うという基本的なアイデアが生まれ、そこから生まれた成果の一部を報告するのが本稿の目的である。

その後、マス・フォア・インダストリ研究所の短期共同研究や短期共同研究などを通じて数学研究者と工業意匠設計研究者で議論を続け、その後、建築と計算幾何学の研究者

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744

e-mail: kajimi@imi.kyushu-u.ac.jp

本研究は JST CREST JPMJCR1911, 科学研究費 16H03941, JP21K03329 の助成を受けた。

を加えて1つの研究プロジェクトを構想し、JST CREST [数理工学情報活用基盤]「設計の新パラダイムを拓く新しい離散的な曲面の幾何学」として採択され、共同研究を続けてきた。本研究はその中の課題として、数学研究者の井ノ口順一、軸丸芳揮、Wolfgang K. Schief, Sebastián E. Graiff-Zurita, 工業意匠設計研究者の三浦憲二郎、企業の実務家の清水保弘、佐藤雅之の諸氏と行ってきた共同研究の一部である [6, 7].

2 相似幾何による対数型美的曲線の定式化

2.1 ユークリッド幾何における平面曲線の可積分変形と Euler の弾性曲線

最初に、基本的なユークリッド幾何における平面曲線とその可積分変形の復習をしておく。 $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示された平面曲線、 s を弧長とする。 J を正の方向の $\pi/2$ 回転とし、 $d\gamma(s)/ds = T^E(s)$, $N^E(s) = JT^E(s)$ をそれぞれ接ベクトル場、法線ベクトル場とする。なお、添字 E はユークリッド幾何に対応するものであることを示す。 s が弧長であるので、 $\|T^E(s)\| = \|N^E(s)\| = 1$ である。Frenet 枠を $\Phi^E(s) = [T^E(s), N^E(s)] \in \text{SO}(2)$ で導入する。このとき、Frenet 枠は Frenet の公式

$$\frac{d\Phi^E(s)}{ds} = \Phi^E(s)L^E(s), \quad L^E(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

を満たす。ただし $\kappa(s)$ は曲率であり、(符号付き)曲率半径 $q(s)$ とは $\kappa(s) = 1/q(s)$ の関係があり、また、 $\|T^E(s)\| = 1$ より $T^E(s)$ を角関数 $\theta(s)$ を用いて $T^E(s) = {}^t[\cos \theta(s), \sin \theta(s)]$ とパラメトライズするとき、 $d\theta(s)/ds = \kappa(s) = 1/q(s)$ という関係がある。

$\gamma(s)$ の等周変形 (弧長 s を保つ変形) を考えよう。変形パラメータを t とし、曲線の変形を $\partial\gamma/\partial t = f(s, t)T^E + g(s, t)N^E$ と置いて両立条件 $(\gamma_s)_t = (\gamma_t)_s$, $(\Phi_s^E)_t = (\Phi_t^E)_s$ を課すと $f(s, t), g(s, t)$ に関する条件式が得られ、もっとも簡単な場合として以下を得る。

$$\begin{aligned} \text{曲線の変形: } & \frac{\partial\gamma}{\partial s} = T^E, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2}T^E - \frac{\partial\kappa}{\partial s}N^E, \\ \text{Frenet 枠の変形: } & \frac{\partial\Phi^E}{\partial s} = \Phi^E \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi^E}{\partial t} = \Phi^E \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{ss} + \frac{\kappa^3}{2} \\ -\kappa_{ss} - \frac{\kappa^3}{2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Φ^E に対する両立条件から、 κ に対する modified KdV 方程式

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \frac{3}{2}\kappa^2\frac{\partial\kappa}{\partial s} + \frac{\partial^3\kappa}{\partial s^3} = 0, \quad (4)$$

が得られる。さらに、(28) に対して進行波解の仮設 $\kappa(s, t) = \kappa(X)$, $X = s - \lambda t$ を置くと (λ : 定数), κ は Euler の弾性曲線の方程式 ($' = d/dX$)

$$\kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} - \lambda\kappa = 0, \quad (5)$$

を満たす。平面曲線の基本定理より、曲率が与えられれば曲線はユークリッド幾何の合同変換 (回転, 平行移動) を除き一意的に定まる。 t の変化は s のシフトで吸収できるか

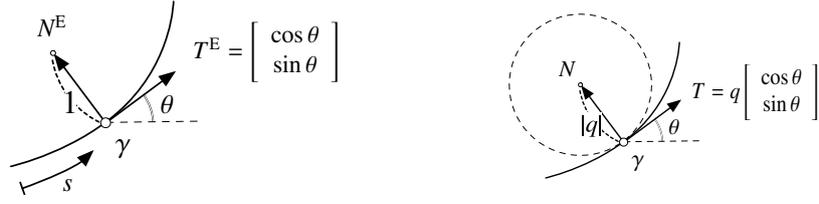


図 3: ユークリッド幾何 (左) と相似幾何 (右) の Frenet Frame.

ら, t によって曲線の形状は変わらない. すなわち, Euler の弾性曲線は, mKdV 方程式による平面曲線の可積分変形に対する形状不変曲線であることがわかる.

2.2 相似幾何における平面曲線の可積分変形と対数型美的曲線

LAC を相似幾何で定式化するというアイデアは [5] で示された. 相似幾何は相似変換群 (スケール変換, 回転, 平行移動) に関するクライン幾何である. 相似幾何における平面曲線の変形理論を記述するには, 弧長 s がスケール変換について不変ではないので, 不変パラメータとして角関数 θ を取り, 相似弧長と呼ぶことにする. 接ベクトル場 $T(\theta)$, 法線ベクトル場 $N(\theta)$ と相似 Frenet 枠 $F(\theta)$ を

$$F = [T, N] \in \text{CO}^+(2) = \{rA \mid r \in \mathbb{R}_+, A \in \text{SO}(2)\}, T = \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{1}{\kappa} T^E = q T^E, N = J T, \quad (6)$$

で導入する. つまり, 相似幾何における接ベクトルの長さは曲率半径である. 相似 Frenet 枠の満たす相似 Frenet の公式は (2), (6) から $d/ds = \kappa d/d\theta = (1/q) d/d\theta$ を用いて

$$\frac{dF}{d\theta} = F \begin{bmatrix} u & -1 \\ 1 & u \end{bmatrix}, \quad u = \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} = -\frac{1}{q} \frac{dq}{d\theta}, \quad (7)$$

となる. u は相似曲率と呼ばれる. この枠組みで LAC がどのように記述されるかを考えよう. (1) から q は $d^2(q^a)/ds^2 = 0$ を満たすから, 独立変数を s から θ に書き換えると

$$\frac{d^2(q^a)}{d\theta^2} = 0, \quad a = \alpha - 1 \quad \longrightarrow \quad q^a = \xi\theta + \eta \quad (\xi, \eta : \text{const.}) \quad (8)$$

となり, ユークリッド幾何と同じ形で与えられる. 相似曲率とその微分方程式は (7) より

$$u = -\frac{\lambda}{a\lambda\theta + 1}, \quad \frac{du}{d\theta} = au^2 + c \quad (\lambda, c : \text{const.}) \quad (9)$$

でそれぞれ与えられる. $c = 0$ の場合が LAC で, $c \neq 0$ の場合は準美的曲線 (quasi aesthetic curve, qAC) と呼ぶ. (9) の u に対する微分方程式は単なる Riccati 方程式に過ぎないが, これを変形理論の立場から見るとというのが鍵である.

変形パラメータを t とし, 不変パラメータ θ を保つ平面曲線の変形を考える. ユークリッド幾何と同様に曲線の変形を T と N の線形結合で表示して両立条件を要請すると,

もっとも簡単な場合に以下を得る.

$$\begin{aligned} \text{曲線の変形: } \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = T, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (b-u)T - N, \quad (b: \text{const.}) \\ \text{枠の変形: } \frac{\partial F}{\partial \theta} = F \begin{bmatrix} u & -1 \\ 1 & u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = F \begin{bmatrix} -u_\theta + u^2 + 1 - bu & b \\ -b & -u_\theta + u^2 + 1 - bu \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

F に対する両立条件から相似曲率 u に対する Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - u^2 + bu \right), \quad (11)$$

が得られる. (11) に進行波解の仮設 $u(\theta, t) = u(X)$, $X = \theta + bt$ を置くと, Riccati 方程式 $u' = u^2 + c$ ($' = d/dX$) を得る. ここで, これは「手で入れる」ことになるが, $u \rightarrow au$ と置き換えると LAC の満たす Riccati 方程式 $u' = au^2 + c$ を得る. このような意味で, LAC は相似幾何における可積分変形に対する形状不変曲線と見なすことができ, LAC を Euler の弾性曲線の相似幾何類似と見なすことができる. これを足がかりに LAC の拡張を行おうというのが 1 つのアイデアである.

2.3 相似幾何による対数型美的曲線の可積分離散化

$\gamma_n \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{Z}$ を離散平面曲線とする. ユークリッド幾何では接ベクトル場, 法線ベクトル場の 1 つの選び方として, $(\gamma_{n+1} - \gamma_n) / \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| = T_n^E, N_n^E = JT_n^E$ として, 離散曲線の辺の方向の単位ベクトルとそれを $\pi/2$ 回転したベクトルとする流儀がある. 特に, 辺の長さが等しい離散曲線は弧長パラメータ表示された連続曲線と同様に取り扱いやすく, 「弧長パラメータ表示された」離散曲線と呼ぶ. このとき, 離散 Frenet 枠と離散 Frenet の公式は, それぞれ

$$\begin{aligned} \Phi_n^E = [T_n^E, N_n^E] \in \text{SO}(2), \quad T_n^E = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{q}, \quad N_n^E = JT_n^E, \quad q = \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| (\text{const.}), \\ \Phi_{n+1}^E = \Phi_n^E \begin{bmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \kappa_n = \angle(T_{n-1}^E, T_n^E), \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる. 一方, 相似幾何では, $\kappa_n = \kappa$ (定数) とし, 辺の長さを $\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| = q_n$ として, 相似離散 Frenet 枠と相似離散 Frenet の公式を

$$\begin{aligned} F_n = [T_n, N_n] \in \text{CO}^+(2), \quad T_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n, \quad N_n^E = JT_n^E, \quad q_n = \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\|, \\ F_{n+1} = F_n u_n \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix}, \quad u_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}, \end{aligned} \quad (13)$$

で与える. u_n は相似曲率の離散類似の役割を果たす. ユークリッド幾何では辺の長さを一定に取り, 離散曲線の形状は辺の間の角度でコントロールする. 一方, 相似幾何では辺の間の角度を一定に取り, 離散曲線の形状は辺の長さでコントロールする. なお, 離散曲線では辺の長さの比が相似曲率の役割を果たしているが, これは次のように理解される. ユークリッド幾何の弧長パラメータ表示された離散曲線では, 隣接する 2 辺に

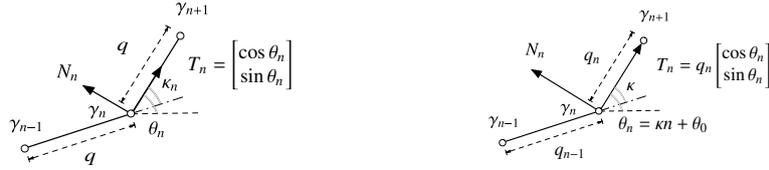


図 4: ユークリッド幾何 (左) と相似幾何 (右) の離散 Frenet 枠.

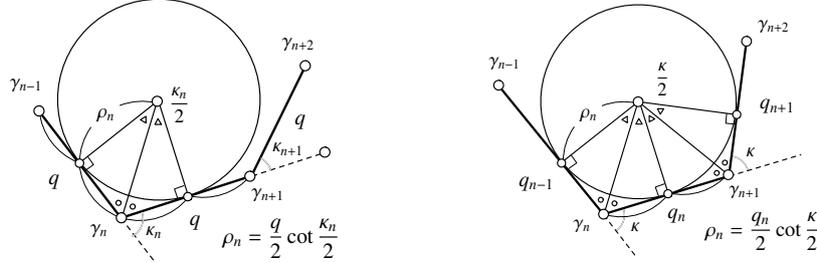


図 5: ユークリッド幾何 (左) と相似幾何 (右) における曲率円の離散類似.

それぞれの中点で接する円が 1 つ定まる. 同様に, 相似幾何における弧長パラメータ表示された離散曲線では, 隣接する 3 辺に接し, 中央の辺ではその中点で接している円が 1 つ定まる. それらの円は半径を与える表式が共通であるという著しい性質をもち, 曲率円の離散類似と見なすことができる. 相似幾何では κ が定数であるので, u_n は実は $u_n = q_{n+1}/q_n = \rho_{n+1}/\rho_n$ と曲率円の半径の比と見なすことができる.

LAC の可積分離散化は, 連続曲線の場合と同様に離散曲線の可積分変形に関する形状不変曲線を考えることによって得られる. もっとも簡単な可積分離散変形は, 変形された曲線や量に $\hat{\cdot}$ をつけて表すと, δ を時間に関する差分間隔に相当するパラメータとして

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_n + T_n, & \hat{\gamma}_n &= \gamma_n + \frac{\delta}{\kappa^2} \left[\left(\cos \kappa - \frac{1}{u_{n-1}} \right) T_n - \sin \kappa N_n \right], \\ F_{n+1} &= F_n u_n \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix}, & \hat{F}_n &= F_n \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_n - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_{n-1}} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_n - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_{n-1}} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

となり, F に対する両立条件から離散 Burgers 方程式

$$\frac{\hat{u}_n}{u_n} = \frac{1 + \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_{n+1} - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_n} \right)}{1 + \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_n - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_{n-1}} \right)}, \quad (14)$$

および q_n に関する線形拡散方程式

$$\frac{\hat{q}_n - q_n}{\delta} = \frac{q_{n+1} - 2(\cos \kappa) q_n + q_{n-1}}{\kappa^2} \quad (15)$$

が得られる. 定常解 $\hat{u}_n = u_n$, $\hat{q}_n = q_n$ を考え, 連続曲線の場合と同様に手で $q_n \rightarrow q_n^a$, $u_n \rightarrow u_n^a$ という置き換えをすると, $u_{n+1}^a + \frac{1}{u_n^a} = u_n^a + \frac{1}{u_{n-1}^a}$ が得られ, これを積分すると, 積

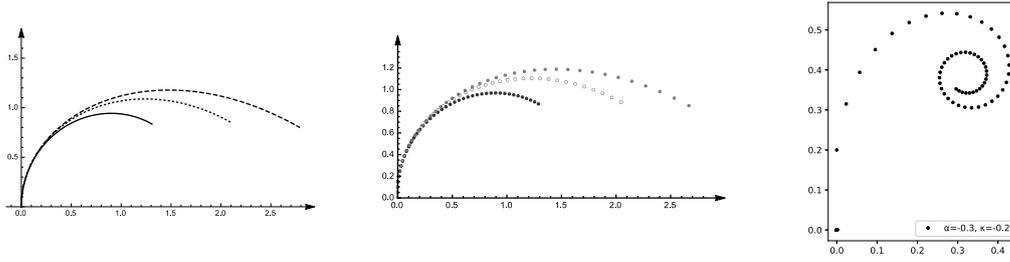


図 6: 準美的曲線 (左) とその可積分離散化 (中). (i) $(a, c) = (1, 0)$ (実線), (ii) $(3/2, -1)$ (破線), (iii) $(3, -2/3)$ (点線). 中: 同じパラメータを与えた離散曲線. (i): 黒丸, (ii): 灰色の丸 (iii): 白丸, $\kappa = 0.05$. 右: 自己適応型離散曲線としての離散 LAC.

分定数を $2 - aC\kappa^2$ として

$$\begin{aligned} u_{n+1}^a + \frac{1}{u_n^a} &= 2 - aC\kappa^2, \\ q_{n+2}^a + (aC\kappa^2 - 2)q_{n+1}^a + q_n^a &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる. 特に $C = 0$ の場合, $q_n^a = \xi n + \eta$ となり, LAC の離散類似に相当する. q_n が与えられれば, 初期点 γ_0 と初期角度 θ_0 から以下のように離散曲線が構築できる (図 6).

$$\gamma_n = \gamma_0 + \sum_{i=0}^{n-1} T_i = \gamma_0 + \sum_{i=0}^{n-1} q_i \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad \theta_i = \kappa i + \theta_0. \quad (17)$$

なお離散 LAC は, というより相似幾何における離散曲線は, 曲率が小さいところは点が疎で, 曲率が大きいところが点が密に配置され, 自然に自己適応型離散曲線になっていることを注意しておきたい.

3 相似幾何に基づく対数型美的曲線の空間曲線・曲面への拡張

3.1 相似幾何における空間曲線の可積分変形

2.2 節で議論した相似幾何による LAC の定式化をそのまま空間曲線に拡張してみよう. つまり, 相似幾何での空間曲線の可積分変形を考え, その形状不変曲線を LAC の空間曲線類似としようという考えである. まず, ユークリッド幾何においてはよく知られたように, 弧長を s , $\gamma \in \mathbb{R}^3$ を弧長パラメータ表示された空間曲線とするとき, Frenet 枠 $\Phi^E(s) \in \text{SO}(3)$ を

$$\Phi^E(s) = [T^E, N^E, B^E], \quad T^E = \frac{d\gamma}{ds}, \quad N^E = \frac{\frac{d^2\gamma}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right\|}, \quad B^E = T^E \times N^E \quad (18)$$

を導入すると, κ^E, τ^E をそれぞれ曲率, 捩率とするとき, Frenet-Serret の公式

$$\frac{d\Phi^E}{ds} = \Phi^E \begin{bmatrix} 0 & -\kappa^E & 0 \\ \kappa^E & 0 & -\tau^E \\ 0 & \tau^E & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

が成り立つ。相似変換群の作用に対して不変なパラメータとして、平面の場合と同様 $d\theta = \kappa^E ds$ で導入される函数 $\theta(s)$ を取り、相似弧長と呼ぶ（幾何学的には陪法線ベクトルが単位球面上で掃く曲線の長さに相当する）。相似 Frenet 枠 $\tilde{\Phi}(\theta)$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\theta) &= [\tilde{T}(\theta), \tilde{N}(\theta), \tilde{B}(\theta)] \in \text{CO}^+(3) = \{rA \mid r \in \mathbb{R}_+, A \in \text{SO}(3)\}, \\ \tilde{T} &= \frac{d\gamma}{d\theta} = qT^E, \quad \tilde{N} = qN^E = q^2\gamma_{ss} = q^2\left(\frac{1}{q}\frac{d}{d\theta}\right)^2\gamma, \quad \tilde{B} = qB^E = \frac{1}{q}T \times N. \end{aligned} \quad (20)$$

で導入すると、(19) より相似 Frenet-Serret の公式

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{d\theta} = \tilde{\Phi} \begin{bmatrix} -\kappa & -1 & 0 \\ 1 & -\kappa & -\tau \\ 0 & \tau & -\kappa \end{bmatrix}, \quad \kappa = -\frac{1}{q}\frac{dq}{d\theta}, \quad \tau = \frac{\tau^E}{\kappa^E}, \quad (21)$$

が従う。 κ, τ はそれぞれ相似曲率、相似捩率と呼ばれる。(21) の行列の形から、ゲージ変換によって対角線要素を 0 にすることができて以下を得る。

$$\tilde{\Phi} = q\Phi, \quad \Phi = [T, N, B] \in \text{SO}(3), \quad \|T\| = 1, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} = qT, \quad (22)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

(23) は形式的に θ を弧長とし、曲率が定数 1 のユークリッド幾何の Frenet-Serret の公式と等価である。曲線の可積分変形を考えると、変形パラメータを t とし、

$$\begin{aligned} \gamma_\theta &= qT, \quad \gamma_t = fT + gN + hB, \\ \Phi_\theta &= \Phi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_t = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\delta \\ \beta & \delta & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

とおき、 γ と Φ に両立条件 $(\gamma_\theta)_t = (\gamma_t)_\theta$, $(\Phi_\theta)_t = (\Phi_t)_\theta$ を要請する。これから $\alpha, \beta, \delta, f, g, h$ に対する条件式と τ, q に対する偏微分方程式が得られる。 Φ の両立条件はユークリッド幾何における定曲率曲線の曲率保存等周変形と形式的に等価であり、それは τ に対する mKdV 階層で与えられることが知られている。また、 γ の両立条件は q に対する線形偏微分方程式を与える。 α, β, \dots, h の条件式と整合するような特殊化のうち、簡単なものは以下になる。

例 1. (mKdV flow) $b = b(t)$ を t の任意函数として、以下のように特殊化する。

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\tau^2}{2} + b, \quad \beta = -\tau_\theta, \quad \delta = -\tau_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\tau^3 + b\tau, \\ f &= -q_{\theta\theta} - \frac{3}{2}\tau^2q + bq, \quad g = q_\theta, \quad h = -\tau q. \end{aligned} \quad (25)$$

すなわち、曲線および枠の変形方程式は以下のように与えられる。

$$\gamma_\theta = qT, \quad \gamma_t = \left(\left(b - \frac{3}{2}\tau^2 \right) q - q_{\theta\theta} \right) T + q_\theta N - \tau q B, \quad (26)$$

$$\Phi_\theta = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_t = \Phi \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau^2}{2} - b & \tau_\theta \\ -\frac{\tau^2}{2} + b & 0 & \tau_{\theta\theta} + \frac{1}{2}\tau^3 - b\tau \\ -\tau_\theta & -\tau_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\tau^3 + b\tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

γ, Φ の両立条件より, それぞれ

$$\tau_t + \left[\tau_{\theta\theta} + \frac{1}{2}\tau^3 + (1-b)\tau \right]_\theta = 0, \quad (28)$$

$$q_t + \left[q_{\theta\theta} + \frac{3}{2}\tau^2 q + (1-b)q \right]_\theta = 0, \quad (29)$$

が得られる. (28) は mKdV 方程式である.

例 2. (sine-Gordon flow) 次のように特殊化する.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\cos \omega, & \beta &= \sin \omega, & \delta &= 0, \\ f &= 0, & g &= -M \cos \omega, & h &= \mu \sin \omega, \end{aligned} \quad (30)$$

ただし, $\tau = \omega_\theta, q = M_\theta$ である. このとき, 曲線と枠の変形方程式は次のように与えられ,

$$\gamma_\theta = M_\theta T, \quad \gamma_t = M(-\cos \omega N + \sin \omega B), \quad (31)$$

$$\Phi_\theta = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\omega_\theta \\ 0 & \omega_\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_t = \Phi \begin{bmatrix} 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ -\cos \omega & 0 & 0 \\ \sin \omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

両立条件から

$$\omega_{\theta t} = \sin \omega, \quad (33)$$

$$M_{\theta t} = \cos \omega M. \quad (34)$$

が得られる. (33) は sine-Gordon 方程式である.

3.2 LAC の空間曲線および曲面への拡張

mKdV flow の楕円関数解から決まる空間曲線

mKdV flow を考える. 平面曲線の場合と同様に進行波解を考え, mKdV flow で形状が不変な曲線を構成する. (28) と (29) で $q(\theta, t) = q(X), \tau(\theta, t) = \tau(X), X = \theta - ct$ とおくと,

$$\left[\frac{\tau^3}{2} + \tau_{XX} + (1-b-c)\tau \right]_X = 0, \quad (35)$$

$$\left[q_{XX} + \left(\frac{3}{2}\tau^2 + 1 - b - c \right) q \right]_X = 0, \quad (36)$$

を得る. (35) は τ に関する Euler の弾性曲線の方程式であり, 一般解は楕円関数で表される. また, (36) は Lamé 方程式に他ならないが, たまたま解が楕円関数で表示される場合に当たっており, ξ, η を定数として

$$\tau = 2\xi \operatorname{dn}(\xi X + \eta; k), \quad q = \operatorname{sn}(\xi X + \eta; k) \operatorname{cn}(\xi X + \eta; k), \quad 1 - b - c = -\xi^2(2 - k^2), \quad (37)$$

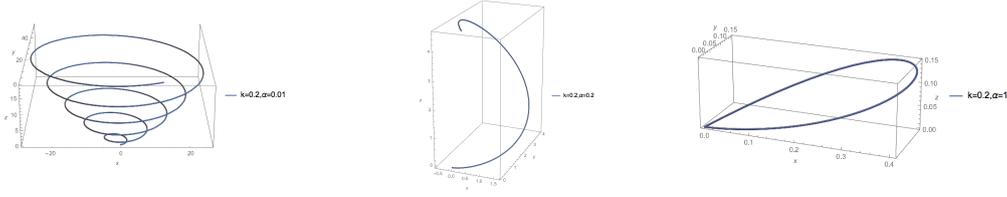


図 7: (37) から決まる空間曲線. $k^2 = 0.2, \eta = 0$, 左: $\xi = 0.01$, 中: $\xi = 0.2$, 右: $\xi = 1$.

で与えられる. これから決まる曲線を図 7 に示した. Slope は次のように導入する. q を相似幾何で曲線と枠の可積分変形の両立条件で定まる曲線の曲率半径とすると, Slope α への拡張を曲率半径が $q^{1/\alpha}$ ($\alpha = \alpha - 1$) となる曲線族とそれらが張る曲面とする.

mKdV flow の定数解から決まる曲面

(35) と (36) で $\tau = \text{const.}$ とおく. このとき, (35) は自明に満足され, (36) は

$$q_{XX} + \sigma^2 q = 0, \quad \sigma^2 = \frac{3}{2}\tau^2 + 1 - b - c, \quad (38)$$

となる. また, 相似 Frenet 枠 Φ は $\Phi(\theta, t) = \Phi(Z), Z = \theta - (\frac{\tau}{2} + b)t$ という進行波解を許容して整合的に解くことができ,

$$\Phi = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \cos \omega Z & -\omega \sin \omega Z & -\tau \cos \omega Z \\ \sin \omega Z & \omega \cos \omega Z & -\tau \sin \omega Z \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega = \sqrt{1 + \tau^2}, \quad (39)$$

を得る. (38) で $\sigma^2 = 0$ のとき,

$$q = c_1 \left(X + \frac{1}{\lambda} \right), \quad (40)$$

となり, $\gamma_\theta = qT$ より直ちに γ の明示公式

$$\gamma = \frac{c_1}{\omega^3} \begin{bmatrix} \cos \omega Z + \omega \left(X + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \omega Z \\ \sin \omega Z - \omega \left(X + \frac{1}{\lambda} \right) \cos \omega Z \\ \frac{\tau \omega^2}{2} \left(X + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

が得られる. $\gamma = {}^t(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ とおくと $\gamma_3 = (\tau \omega^3 / 2c_1)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - (c_1 \tau / 2\omega^3)$ を満たし, 従って (41) は放物面となる. また, (41) で $\tau \rightarrow 0$ の極限を取ると

$$\gamma = c_1 \begin{bmatrix} \cos Z + \left(X + \frac{1}{\lambda} \right) \sin Z \\ \sin Z - \left(X + \frac{1}{\lambda} \right) \cos Z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \theta + (b - 1)t, \quad Z = \theta + bt \quad (42)$$

となり, これは Slope 2 の LAC である circle involute に他ならない. つまり, 放物面 (41) は Slope 2 の LAC の曲面への拡張と見なすことができることになる. なお, 同様の考察で $\sigma^2 > 0$ の場合は楕円面または一葉双曲面, $\sigma^2 < 0$ の場合は二葉双曲面となることがわかり, slope を導入した曲面はそれら 2 次曲面の変形になっていることがわかる.

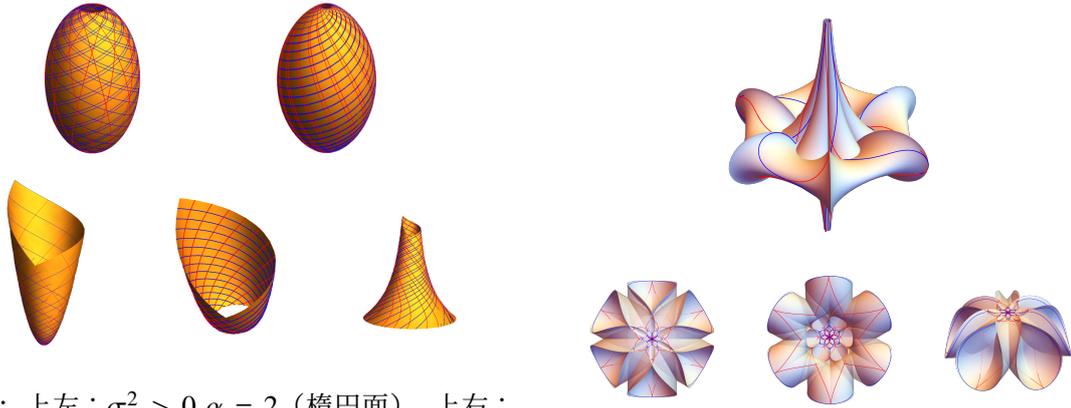


図 8: 上左: $\sigma^2 > 0$ $\alpha = 2$ (楕円面), 上右: $\alpha = 1.5$, 下: $\sigma^2 = 0$, 左: $\alpha = 2$ (放物面), 中: $\alpha = 4$, 右: $\alpha = -1$.
 図 9: 同じ定常ブリーザー解から得られる曲面. 上: ユークリッド幾何, 下: 相似幾何類似.

sine-Gordon flow の定める曲面と擬球曲面

例 2 の sine-Gordon flow を考える. まず, (33) と (34) を比較すると, $M = \omega_\theta$ という特殊化を許容することがわかる. 実際, (34) に $M = \omega_\theta$ を代入すると $\omega_{\theta\theta t} = \cos \omega \cdot \omega_\theta$ となり, それは (33) の微分であるので特殊化が整合している. この特殊化の下で, (31) は $\gamma_\theta = \omega_{\theta\theta}T$, $\gamma_t = \omega_\theta T_t$ となっているが, これは (不思議なことに) 積分できて,

$$\gamma = B + \omega_\theta T, \quad (43)$$

となる. これは微分すれば直ちに確かめることができる.

一方, 古典的な曲面論では, sine-Gordon 方程式は擬球曲面 (pseudo-spherical surface) $R(\theta, t) \in \mathbb{R}^3$ を記述することはよく知られている. 擬球曲面はガウス曲面が -1 の曲面で, 漸近チェビシエフ網 (θ, t) でパラメトライズされ, この設定で ω は等パラメータ曲線間の角度にほかならない. さらに, \bar{N} を $R(\theta, t)$ に沿った単位法ベクトル場として, 正規直交枠 $\bar{\Phi} = [R_\theta, \bar{N} \times R_\theta, \bar{N}]$ を導入すると, Gauss-Weingarten の公式

$$\bar{\Phi}_\theta = \bar{\Phi} \begin{pmatrix} 0 & \omega_\theta & 0 \\ -\omega_\theta & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi}_t = \bar{\Phi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 0 & \cos \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

が成り立ち, 両立条件 $(\bar{\Phi}_\theta)_t = (\bar{\Phi}_t)_\theta$ が sine-Gordon 方程式 (33) を与える. (44) と (32) を比較すると,

$$[T, N, B] = [-\bar{N}, \bar{N} \times R_\theta, R_\theta], \quad (45)$$

が成り立つ. 以上のことをまとめると, $R(\theta, t)$ が擬球曲面であるとき,

$$\gamma = R_\theta - \omega_\theta N \quad (46)$$

で与えられる曲面 $\gamma = \gamma(\theta, t)$ は, 相似幾何で空間曲線の sine-Gordon 方程式による可積分変形で得られる曲面である. この意味で γ は擬球曲面の相似幾何類似と見なすことができる. さらに, $\|\gamma - B\| = \|\omega_\theta\|$ であるから, γ は sine-Gordon 方程式の解による球面の変形と見なすこともできる.

4 おわりに

以上、LAC が Euler の弾性曲線の相似幾何類似と見なせること、すなわち可積分変形に対する形状不変曲線であるという特徴付けを採用し、それを足がかりに離散化や空間曲線、曲面に拡張できることを示した。本稿でさまざまな数学的な性質、例えば対称性による積分 (sine-Gordon flow で示した積分はその一例である) や変分原理による特徴付け、明示公式などについては触れることができなかった。また、工業意匠設計や建築などに応用する際には、それぞれの分野の必要に応じてさらに性質を調べたり開発しなければならないが、そこにも興味深い数学が隠れており、これらについては講演で述べる。

可積分系という特別な微分/差分方程式が、例えば「美しい」という、特別な性質を内在する幾何学的オブジェクトの生成に活用できることがわかってきた。そこで必要となったのはさまざまな群に対応するクライン幾何であり、今回 2 次曲面などが現れていることや、slope が微妙に相似幾何と相性がよくないことから、等積幾何や射影幾何などが必要になる可能性がある。最近、工業意匠や建築設計から生じた微分幾何学の問題に取り組むことで、リー球面幾何などの大きな群に付随する 3 次元微分幾何学という、由緒正しいが忘れられた幾何学に別の方向から光が当たって、新しい方向性が見えてきている。これが「マス・フォア・インダストリ」の醍醐味の 1 つではないかと感じている。

参考文献

- [1] T. Harada, Study of quantitative analysis of the characteristics of a curve, *Forma* **12**(1)(1997), 55–63.
- [2] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の性質に関する定量化研究, *デザイン学研究* **40**(6)(1994), 9–16.
- [3] I. Kanaya, Y. Nakano and K. Sato, Simulated designer's eyes – classification of aesthetic surfaces, in *Proceedings of the VSMM (2003)*, pp. 289–296.
- [4] K. T. Miura, A general equation of aesthetic curves and its self-affinity, *Comput-Aided Des. Appl.* **3** (1–4), (2006), 457–464.
- [5] J. Inoguchi, Attractive plane curves in differential geometry. In: Dobashi, Y., Ochiai, H. (eds.) *Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III. Mathematics for Industry*, vol 24, pp. 121–135. Springer, Singapore (2016).
- [6] J. Inoguchi, K. Kajiwara, K.T. Miura, M. Sato, W. K. Schief and Y. Shimizu, Log-aesthetic curves as similarity geometric analogue of Euler's elasticae, *Computer Aided Geometric Design* **61** (2018), 1–5.
- [7] J. Inoguchi, Y. Jikumaru, K. Kajiwara, K. T. Miura, W. K. Schief, Log-aesthetic curves: Similarity geometry, integrable discretization and variational principles, *Computer Aided Geometric Design* **105** (2023), 102233.
- [8] K. T. Miura and R.U. Gobithaasan, Aesthetic design with log-aesthetic curves and surfaces, In: Dobashi, Y., Ochiai, H. (eds.) *Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III. Mathematics for Industry*, vol 24, pp. 121–135. Springer, Singapore (2016).