

確率論と複素解析 : SLE, Loewner方程式が見せる多様な側面

村山, 拓也
九州大学大学院数理学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/7178588>

出版情報 : 数理科学. 60 (8), pp.55-62, 2022-08. サイエンス社
バージョン :
権利関係 :



確率論と複素解析

SLE, Loewner 方程式が見せる多様な側面

村山 拓也

1. はじめに

学部3回当時の筆者は、複素解析の美しさに惹かれていた。一方、確率論は数学らしくないと感じていた。ランダム性をすなわち「滅茶苦茶なもの」と思っていたのだ。そのため、両者が結びつくと思っていく衝撃を受けた。確率論へ宗旨替えした程である。

さて、副題の“SLE”は、統計物理に由来する平面上のランダム曲線である。複素解析における Loewner 方程式に、確率論における Brown 運動を代入して定義される。このように三分野を跨いだ研究について、いくつかの話題を紹介するのが本稿の目的である。筆者の当時受けた衝撃が少しでも伝われば幸いである。なお、数学的厳密さには元より目をつぶるが、重要な点では注意を喚起するよう努めた。

2. 正則函数の等角性

複素解析の復習から始める。複素平面 $\mathbb{C}$ の領域 D で定義された函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 D の各点 z で微分係数

$$f'(z) = \frac{df}{dz}(z) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が存在するとき、 f は D 上正則であるといわれる。このとき、各 $z_0 \in D$ の近傍で $f(z)$ は一次近似される： $f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0)$ 。つ

まり、点 z_0 および $f(z_0)$ の周りで局所的に見ると、 f は $|f'(z_0)|$ 倍の拡大および角 $\arg f'(z_0)$ だけの回転を表す。特に、 $f'(z_0) \neq 0$ ならば、 f は任意の2曲線の交角を変えない。これが正則函数の等角性であった。

以下、二つの領域 $D, \tilde{D}$ に対して、 D を $\tilde{D}$ の上へと一対一に写す正則函数のことを D から $\tilde{D}$ への等角写像^{*1)}と呼ぶ。また、このような写像があるとき、 D は $\tilde{D}$ と等角同値であるという。

3. 臨界現象の共形不変性

確率論に話を移そう。図1は正方格子上の面パーコレーションである。格子内の正方形（面）を確率 p で黒に、確率 $1 - p$ で白に塗るという試行を各面で独立に行って得られる模型である。確率論・統計物理において盛んに研究されている。

パーコレーションの幾何学的性質は確率 p の値に依る。“Percolation”（浸透）の名が意味するように、黒い面の成す連結クラスターが無限に遠くまで「浸透」するか否かに興味がある。

定理 1 次のような値 $p_c \in (0, 1)$ が存在する：

1. $p < p_c$ ならば、無限クラスターの存在する確率は0である。

*1) 各点での等角性（＝微分係数が消えない）は、等角写像（＝函数が単射）であることを導かない。（逆は成り立つ。）この意味で両者は整合しないが、本稿では慣習に倣う。



図 1 左から $p > p_c$, $p = p_c$, $p < p_c$ の面パーコレーション.

2. $p > p_c$ ならば, 確率 1 で無限クラスターが唯一つ存在する.

定理 1 が示すように, $p = p_c$ を境に系の性質はがらっと変わる. これを相転移と呼ぶ. 相転移は, 物理学において遍在する現象であり, 系ごとの細かな差異に依らない普遍的な法則に従うとされている.

さて, 定理 1 は臨界点 $p = p_c$ について何も言っていない. この臨界現象が我々の主題の一つである. その特徴は系の共形不変性にある. 改めて図 1^{*2)}を見よう. 中央が $p = p_c$ のときのパーコレーションである. 白黒の面はとても乱雑に, そして「均等に」出現している. このため, もし図のどこか一部を切り出し, 拡大・回転で元の図と重ねても, 両者はおおよそ同じように見えるだろう. このことを指して臨界パーコレーションの巨視的な統計法則が共形不変であるという. 一方, 例えば $p > p_c$ では黒い面が支配的で, 下手な切り出し方をすると最早黒い面しか残らない. つまり, $p \neq p_c$ での共形不変性は期待できない.

局所的には拡大・回転に見える変換を共形変換と呼ぶ. 前節の復習によれば, 共形変換は正則函数あるいは等角写像である. ここに確率論と複素解析との接点が生じる. また, 共形不変性を広い意味での自己相似性と捉えれば, フラクタルとの接点も生じる. 臨界パーコレーションのクラスターはランダムフラクタルだというわけである.

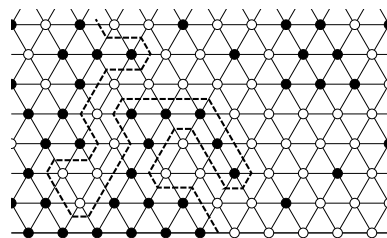


図 2 T_ε 上の頂点パーコレーションとクラスター境界 (破線).

4. クラスター境界のスケーリング極限

ランダムクラスターの巨視的な構造を理解するために以下のような問題を考える. 上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ に格子幅 $\varepsilon > 0$ の三角格子 T_ε を描き, その上で臨界的な頂点パーコレーションを考える. (今度は, 面ではなく頂点を白黒に塗り分ける.) ただし実軸では, 負の半直線上の頂点を黒, 正の半直線上の頂点を白に塗ると予め指定しておく. 図 2 のように, 原点を出発し T_ε の各辺の中点を通して黒い点を左手に見るような折れ線, すなわち二色のクラスターを分離する境界線を引く.

問題 1 この境界は $\varepsilon \downarrow 0$ の極限でどのようなランダム曲線 (確率過程) に収束するか?

Schramm (2000) はこの問いに対し, 複素解析の古典的な技法を用いて解答を提示した. 以下, 二節少々の紙幅を割いて, その概要を眺めていく.

議論の前に, 問題 1 の設定について補足する. 上では説明の便宜も兼ね, 単連結な領域の代表として上半平面 $\mathbb{H}$ を採った. 単連結とは, 領域の内部に穴が開いていないことをいう. 例えば円環

*2) 図中の面が 100×100 と少ないので, 以降の説明はピンと来ないかもしれない. 想像で補っていただきたい.

$\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$ には穴が開いているから、単連結ではない。有名な **Riemann 写像定理** ^{*3)} によれば、 $\mathbb{C}$ 内の単連結な真部分領域はすべて $\mathbb{H}$ と等角同値である。よって、 $\mathbb{H}$ で問題 1 を解き、その結果を共形変換を通じて他の領域へと読み替えればよい。この意味で $\mathbb{H}$ を代表と考えている。

もちろん任意の単連結領域 D に対しても、それを近似する三角格子 T_ε^D を描き、境界を端点 $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ で白黒の弧に割れば、問題 1 と同様にクラスター境界の極限 $\gamma_{D,a,b}$ を考えられる。端点は $a_\varepsilon, b_\varepsilon \rightarrow a, b \in \partial D$ となるように選ぶ。初めに述べた設定では、 $a_\varepsilon \equiv 0, b_\varepsilon \equiv \infty$ である。このとき、共形不変性の仮定は次のように述べられる ^{*4)}：境界が端点 a, b で分割された単連結領域 D とその上の等角写像 f とに対して、 $\gamma_{f(D),f(a),f(b)} \stackrel{d}{=} f(\gamma_{D,a,b})$ (すなわち、両辺の確率変数の分布が等しい)。この性質は第 6 節で用いる。

5. Loewner 微分方程式

一旦、パーコレーションなるランダムな対象を忘れ、上半平面 $\mathbb{H}$ に単純曲線 ^{*5)} $\gamma: [0, t_\gamma] \rightarrow \mathbb{H}$ があるという状況だけを問題 1 から取り出す。したがって、本節の議論は純粋な複素解析である。始点 $\gamma(0)$ のみが実軸 $\partial\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}$ 上にあり、その他の弧 $\gamma(0, t_\gamma)$ は $\mathbb{H}$ の内部に含まれる。曲線 γ に沿って、実軸から $\mathbb{H}$ を鋏で切りひらく様を思い浮かべてほしい。各 $t \in (0, t_\gamma)$ に対し、そのように切り込まれた半平面を $H_t := \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ とおく。

上述の Riemann 写像定理により、 H_t から $\mathbb{H}$ への等角写像が存在する。それは一つではないが、流体力学的正規化条件

$$g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + o(1/z), \quad z \rightarrow \infty \quad (1)$$

^{*3)} 当然かのように書いたが、これ自体驚くべき事実である。

^{*4)} この主張は不明瞭であることを注意しておく。確率論的には極限 $\gamma_\bullet$ がいかなる曲線 (集合) か、どう径数付けられ、その結果どんな確率空間に属するのか、といったことを述べていない。また、複素解析的には D の境界や a, b の prime end としての性質を何も言っていない。しかし、以下の発見的議論ではこれらを都合よく解釈する。

^{*5)} 自己交叉を持たない曲線を単純曲線という。

を課せば一意に決まる。 $g_t: H_t \rightarrow \mathbb{H}$ を弧 $\gamma(0, t]$ に付随する Riemann 写像と呼ぶことにする。このように、曲線 γ の解析を写像 g_t のそれに摩り替えることが重要な発想である。

写像 g_t により、曲線の先端 $\gamma(t)$ は実軸 $\partial\mathbb{H}$ の点に写る。それを $\xi(t) := g_t(\gamma(t))$ と書く。 $\xi(t)$ は t の関数であり、駆動関数と呼ばれる。

定理 2 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して t の関数 $t \mapsto g_t(z)$ は微分可能であり、次の **Loewner (–Kufarev) 微分方程式** を満たす：

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}. \quad (2)$$

このように、 g_t を導入したおかげで具体的な微分方程式が手に入った。この式は、SLE に対する確率解析において不可欠な役割を果たす。(本稿では、残念ながらその様子には触れない。)

ちなみに、式 (2) の原型は 1923 年まで遡る。Loewner は彼の方程式を用いて、単射正則関数の Taylor 係数が満たす性質である **Bieberbach 予想** を 3 次の係数について示した。彼の考えを敷衍して 1984 年には de Branges が予想全体を証明している。その後、Loewner 方程式の研究は下火になっていたようであるが、SLE への応用を皮切りに違った形で再び脚光を浴びることとなった。

6. 領域 Markov 性・共形不変性から SLE へ

問題 1 のようなランダムな状況に話を戻す。つまり、前節の γ を臨界パーコレーションのクラスター境界 $\gamma_{\mathbb{H},0,\infty}$ とみなす。このとき、対応する式 (2) の駆動関数 $\xi(t)$ もランダムとなる。この 1 次元確率過程の分布を決定する。

鍵は $\gamma = \gamma_{\mathbb{H},0,\infty}$ の持つ領域 **Markov 性** ^{*6)} である。すなわち、 γ の時刻 t 以降「未来の」確率法則は、領域 $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ の「現在の」形状のみに依存して決まる。 $\gamma(s)$ ($0 \leq s \leq t$) がどれ

^{*6)} 通常の **Markov 過程** の場合、未来の区間 (t, ∞) での振舞いは過去の区間 $[0, t)$ での挙動とは独立で、現在時刻 t での位置だけに依存する。領域 Markov 性は、 H_t の形状が過去の情報を含むという意味で、これよりも弱い性質である。

くらいの速度でいつどの点を通ったかというところまで詳細な「過去の」情報には依存しない．図 2 における境界線の描き方を思い出せば，この性質は納得されるだろう．

領域 Markov 性・共形不変性を用いて，駆動函数 ξ が時刻 s から $s+t$ までどう振る舞うか調べる．まず，時間 s だけシフトした曲線 $\gamma(s+\cdot)$ は $H_s = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, s]$ におけるクラスター境界と同じ確率法則に従う： $\gamma_{\mathbb{H}, 0, \infty}(s+t) \stackrel{d}{=} \gamma_{H_s, \gamma(s), \infty}(t)$ ．さらに，等角写像 $z \mapsto g_s(z) - \xi(s)$ に対する不変性により， $g_s(\gamma_{H_s, \gamma(s), \infty}(t)) - \xi(s) \stackrel{d}{=} \gamma_{\mathbb{H}, 0, \infty}(t)$ ． $(-\xi(s))$ の項によって曲線の始点を調節した．) 合わせると，ランダム曲線

$$\tilde{\gamma}(t) := g_s(\gamma(s+t)) - \xi(s), \quad t > 0$$

は元の $\gamma = \gamma_{\mathbb{H}, 0, \infty}$ と同じ分布を持つ．一方で， $\tilde{\gamma}(0, t]$ に付随する Riemann 写像は

$$\tilde{g}_t(z) = g_{s+t}(g_s^{-1}(z + \xi(s))) - \xi(s)$$

である．(図 3 と式 (1) を見ながら写像の向きや平行移動を調節した．) $z = \tilde{\gamma}(t)$ を代入すると，駆動函数の関係式 $\tilde{\xi}(t) := \tilde{g}_t(\tilde{\gamma}(t)) = \xi(s+t) - \xi(s)$ を得る． $\tilde{\gamma} \stackrel{d}{=} \gamma$ ゆえ， $\tilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$ ．よって，

$$\xi(t) \stackrel{d}{=} \xi(s+t) - \xi(s).$$

つまり，時刻 s から $s+t$ までの増分 $\xi(s+t) - \xi(s)$ の分布は，時刻の差 t のみに依り，基準となる s には依らない．このことを，確率過程 ξ が定常独立増分を持つという．

定理 3 原点を出発し，標本路が確率 1 で連続で，かつ定常独立増分を持つような実数値確率過程は

$$\sqrt{\kappa} B_t + bt, \quad \kappa > 0, b \in \mathbb{R}$$

に限る． B_t は 1 次元標準 **Brown 運動** である．

雑に言えば，Brown 運動 B_t は左右に進む確率が等しい． bt は左右片方へ推進力を加える項である．統計的には， γ は虚軸について線対称に振舞うと考えられる．そこで， $b = 0$ とすれば

$$\xi(t) = \sqrt{\kappa} B_t \quad (3)$$

と駆動函数の形が決定される．以上の議論は，**Schramm** の原理と呼ばれることがある．

駆動函数 (3) を方程式 (2) に代入して得られるランダムな解 $g_t(z)$ のことを母数 $\kappa > 0$ を持つ **Schramm–Loewner 発展** ^{*7)} と呼び， SLE_κ と略記する．また，この g_t に対応する $\bar{\mathbb{H}}$ 内のランダム曲線 γ 自体も SLE_κ と呼ぶ．

7. SLE と格子模型，GFF との関係

前節までの議論は発見的なものである．しかし実際に， T_ε 上の臨界パーコレーションのクラスター境界は $\varepsilon \downarrow 0$ で SLE_6 に収束する ^{*8)}．また，ループ除去乱歩 ^{*9)} が SLE_2 に，臨界 Ising 模型のクラスター境界 ^{*10)} が SLE_3 に，離散 **Gauss** 自由場 (Gaussian free field, GFF) の等高線 ^{*11)} が SLE_4 に各々収束するなど，連続極限で現れる共形不変なランダムフラクタルが SLE によって記述される例が数多く知られている．

SLE は上記の他にも，物理における共形場理論 (conformal field theory, CFT) を背景とした重要な性質を持つ．ここでは，その内の **SLE/GFF** 結合について述べる．

まず，領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続 GFF とは，各 $z \in D$ で添字付けられた平均 0 の正規乱数の族 $h(z)$ で，共分散が

$$\mathbb{E}[h(z)h(w)] = G_D(z, w) := (D \text{ の Green 函数})$$

を満たすもの ^{*12)} である．半径 ε の円周平均 h_ε から定まる D 上のランダムな測度

$$\mu(dz) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma h_\varepsilon(z)} dz, \quad \gamma > 0$$

を **Liouville 量子重力** (Liouville quantum gravity, γ -LQG) と呼ぶ．この定義の感覚として，測

^{*7)} evolution

^{*8)} Smirnov (2001), Camia–Newman (2007)

^{*9)} Lawler–Schramm–Werner (2004)

^{*10)} Chelkak et al. (2014)

^{*11)} Schramm–Sheffield (2009)

^{*12)} $\mathbb{E}$ は確率変数の期待値． $G_D(z, z) = \infty$ だから， h の正確な定義には超函数が必要だが，ここでは割愛する．

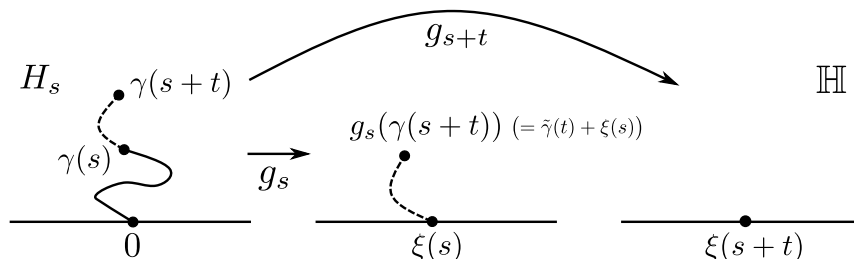


図3 時刻 s および $s+t$ での様子.

度というよりも（曲面上の距離や曲がり具合の指標となる）計量を領域 D に定めようとしている．すなわち，組 (D, μ) はランダムな曲面である．また， D の境界には「量子的な長さ」が定義される．

問題2 単連結な量子曲面 $(D_1, \mu_1), (D_2, \mu_2)$ と等角写像 f_1, f_2 を用意して，次のように両者を「貼り合わせる」：

- $\overline{f_1(D_1)} \cup \overline{f_2(D_2)} = \mathbb{H}$,
- $\eta := \partial f_1(D_1) \cap \partial f_2(D_2)$ は，実軸の一点を出発する $\mathbb{H}$ 内の曲線で，部分弧を D_1, D_2 各々について見たときの量子的長さが一致する．

このとき， η はいかなるランダム曲線か？

Sheffield (2016) による元の主張は複雑である．感覚を掴むため，大雑把に言い換えたものが問題2である．ともかく，こうした問題を解くと， η は後進 SLE_κ (SLE の変種) となる．複素解析に通曉した読者は，これが古典的な等角貼り合わせ (conformal welding) の確率論版に当たること注意到されたい．量子曲面の貼り合わせからなんと SLE が生じるのである．複素解析の観点からも興味深くはないだろうか．

8. 多重連結領域への拡張

本節では，筆者自身の研究課題でもある「多重連結領域への拡張」について簡単に紹介する．領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ が $(N+1)$ 連結であるとは，拡大複素平面 (Riemann 球面) $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ の連結成分が丁度 $(N+1)$ 個であることをいう． $N=0$ の場合，唯一の連結成分は ∞

を含む「外部領域」であり， D に穴は開いていない (単連結である)． $N \geq 1$ の場合を多重連結といい，領域に N 個の穴が開いている．

第4-6節では，単連結領域の代表として上半平面 $\mathbb{H}$ を採った． $(N+1)$ 連結領域にも代表的な形がいくつか考えられる．本稿では， $\mathbb{H}$ から実軸に平行な N 個の線分 (截線) を除いた平行截線半平面^{*13)} を採る．この場合，Riemann 写像定理に相当する事実，一般化された一意化定理と呼ばれる．すなわち，任意の $(N+1)$ 連結領域 D に対して，ある平行截線半平面 $\tilde{D}$ への等角写像 $f: D \rightarrow \tilde{D}$ が存在する．

以上の事実を踏まえて，第5節の議論をなぞる． D を平行截線半平面とし， γ は実軸の一点を出発して D の中を走る単純曲線とする (図4)．このとき， γ によって切り込まれた領域 $H_t := D \setminus \gamma(0, t]$ もやはり $(N+1)$ 連結である．よって，別の平行截線半平面 D_t への等角写像 $g_t: H_t \rightarrow D_t$ が存在して，式 (1) により一意に決まる．駆動関数を $\xi(t) := g_t(\gamma(t))$ とおくと，次の小松・Loewner 微分方程式が成り立つ：

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = -2\pi \Psi_{D_t}(g_t(z), \xi(t)). \quad (4)$$

このように第5節とほぼ平行した議論ができる．ただし，式 (2) 右辺と比べて Ψ_{D_t} を具体的に書けない憾みはある．

複素解析の立場で式 (4) のような拡張を考察したのは小松 (1950) である．その50年後には SLE が現れ， SLE の非単連結領域への拡張を目指した Bauer-Friedrich (2004, 06, 08) により再び系統

*13) parallel slit half-plane

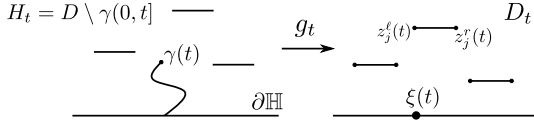


図 4 曲線 γ および写像 $g_t: H_t \rightarrow D_t$.

的に研究されることとなった．実際，格子模型は領域の「穴」の有無には関係なく定義できる．その連続極限である SLE を式 (4) で拡張しようと試みるのは自然な流れだろう．そこで，式 (4) の駆動関数 $\xi(t)$ を確率微分方程式

$$d\xi(t) = \alpha(\xi(t), D_t) dB_t + b(\xi(t), D_t) dt$$

で定めたときのランダムな g_t (あるいは γ) を確率的小松・Loewner 発展 (stochastic Komatu–Loewner evolution, SKLE) と呼ぶ．ただし，SLE の場合と違って，どんな (函数) 係数 α, b が穴の影響を正しく反映するのか，格子模型が SKLE に収束するのか，といった問題については研究途中である．特に，

- D_t (の截線の配置) が t に依存すること，
- Schramm の原理だけでは，一つの母数 κ のみに依るランダム曲線族を決定できないこと

は多重連結の場合に特有である．これらは解析の障害になる一方，問題を豊かにもしている．近年 CFT の観点から多重連結領域における SLE が議論されつつある¹⁾ ことも踏まえ，進展が俟たれる．

9. 確率論から見た (小松・) Loewner 方程式

本節からは，話の切り口を少し変える．第 5, 6 節では，Loewner 方程式 (2) が SLE 理論の中核を担うことを見た．この式そのものは，複素解析の諸理論から導かれる．確率論側はいわばユーザーである．しかし実は，正則函数と 2 次元 Brown 運動との密接な関係を使えば，式 (2) の導出にも「確率論的な」別証が考えられる．小松・Loewner 方程式 (4) についても同様である．以降の二節では，式 (2), (4) の確率論的導出において鍵となる事柄をかい摘んで紹介したい．

まず，Brown 運動と正則函数との仲立ちをする調和函数の定義を思い出す．実数値 C^2 級函数 $u(x, y)$ が調和であるとは，Laplace 方程式

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0 \quad (5)$$

を満たすことであった．特に，正則函数 $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ に対し，その実部 u ，虚部 v は調和である．それは f の満たす Cauchy–Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

から直ちに従う．反対に，調和函数 v に対して式 (6) を満たす共役調和函数^{*14)} u が見つければ，正則函数 $f = u + iv$ が構成される．ただし，これは常に可能とは限らない．単連結領域では共役調和函数の存在が保証されている．一方，一般の領域では穴の周りの v の挙動が共役の存在／非存在に関係している．

確率論的には，(良い) 領域 D 上の調和函数 v が次の表示を持つことが重要である：

$$v(z) = \mathbb{E}_z[v(Z_{\tau_D})]. \quad (7)$$

ただし， $\mathbb{E}_z$ は複素 Brown 運動 Z_t を点 $z \in D$ から出発させたときの期待値を表す． τ_D は Z_t が初めて領域 D から出ていく脱出時刻である． Z_{τ_D} は境界 ∂D 上のランダムな点であり，それについて v の境界値平均を取るのだから，式 (7) はいわゆる Poisson 積分の確率論的表現である．

式 (2) の導出には，調和函数 v として差 $v(z) := \text{Im}(z - g_t(z))$ を採る． $g_t: H_t \rightarrow \mathbb{H}$ は弧 $\gamma(0, t]$ に付随する Riemann 写像であった． g_t は $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ の境界を実軸に写す．よって，虚部 $\text{Im } g_t$ の境界値は常に 0 である．すると，式 (7) から

$$\begin{aligned} v(z) &= \mathbb{E}_z[\text{Im}(Z_{\tau_{H_t}} - g_t(Z_{\tau_{H_t}}))] \\ &= \mathbb{E}_z[\text{Im } Z_{\tau_{H_t}}] \end{aligned} \quad (8)$$

を得る．最後の表式は複素 Brown 運動 Z_t のみで

*14) 普通は虚部 v を実部 u の共役調和函数と呼ぶのだろうが，本稿では後の都合で役割を反転させた．

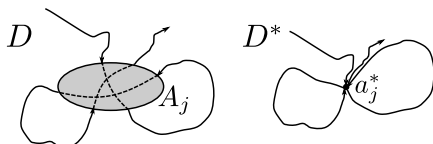


図 5 一点 a_j^* における BMD の様子.

書かれているから、確率論的には都合が良い。

式 (8) において、脱出時刻での値 $\text{Im } Z_{\tau_{H_t}}$ は、 Z_t が先に $\gamma(0, t]$ に当たるとき正であり、先に実軸に当たるとき 0 となる。このように Brown 運動の路について考察していくと、(かなり飛躍するが) 次の定理に辿り着く。ここで、 r_t は集合 $\gamma(0, t]$ の直径である。

定理 4 t に依らない定数 $C > 0$ が存在して、 $|z| \geq 2r_t$ ならば

$$\left| z - g_t(z) + \frac{2t}{z} \right| \leq C \frac{2tr_t}{|z|^2}. \quad (9)$$

定理 4 から式 (2) を導くことは割愛する。ここでは、式 (2) 右辺の形が不等式 (9) 左辺 $2t/z$ の項に由来することにだけ触れておこう。

10. 膝り Brown 運動

Lawler (2006) は、小松・Loewner 方程式 (4) についても周遊反射 **Brown 運動** (excursion-reflected Brownian motion, ERBM) を用いた確率論的な解釈を述べている。その後、ERBM を膝り **Brown 運動** (Brownian motion with darning, BMD) に置き換える形で、Chen–福島–Rohde (2016) が精密な解析を行った。

BMD の説明をするため、多重連結領域 D を $D = E \setminus \bigcup_{j=1}^N A_j$ の形に書こう。 E は単連結領域で、各 A_j は E に開けた穴である。ここで、穴 A_j を一点集合 $\{a_j^*\}$ へと潰して、あるいは同一視して集合 $D^* := D \cup \{a_1^*, \dots, a_N^*\}$ を定義する。BMD とは大雑把に言って D^* 上の複素 Brown 運動のよなものである。

図 5 のように、 D と D^* とにそれぞれ BMD の標本路を描いてみると、「膝り」という形容の意味

が分かる。「膝る (かがる)」とは、糸をしぼり束ねるようにして (穴を) 縫うことを指す動詞である。BMD が一点 a_j^* を通る様子を眺めると、BMD の軌跡によってまさに穴 A_j が縫い合わせられたように見えるのである。

式 (4) の導出に BMD が現れる理由は、式 (7) と類似した表現

$$v^*(z) = \mathbb{E}_z[v^*(Z_{\tau_{D^*}})] \quad (10)$$

にある。 Z_t^* は D^* 上の BMD である。表現 (10) は調和関数 v^* を与えるだけでなく、なんと共役調和関数 u^* の存在を保証する。前節で述べたように、多重連結領域 D では調和関数が共役を持つとは限らない。BMD は穴を膝り縫うことによって、通常の Brown 運動と異なる形で穴の性質を拾う。それが v^* に反映されるのである。

式 (10) により前節と同様に議論を進めると、式 (4) の Ψ_{D_t} が領域 D_t^* 上の BMD に付随する複素 **Poisson** 核であることが分かる。もう紙数も尽きるので、詳細については上記著者の一人による解説²⁾ を挙げるにとどめる。

11. おわりに

複素解析と関わるものの、本稿で触れられなかった話題として、Brownian loop measure と Schwarz 微分との関係、小松・Loewner 方程式における截線の時間発展とモジュライ空間との関係、 SLE_κ の $\kappa \downarrow 0$ における大偏差原理と Teichmüller 空間との関係などがある。このように、本稿で紹介した内容は氷山の一角に過ぎず、さらなる融合的研究への興味は尽きない。

参考文献

- 1) S.-S. Byun, N.-G. Kang and H.-J. Tak, Conformal field theory for annulus SLE: partition functions and martingale-observables, preprint. arXiv:1806.03638v2
- 2) 福島正俊, 小松–Loewner 微分方程式, 数学, 69 巻 2 号, 2017 年, pp.137–156.

(むらやま・たくや, 九州大学大学院数理学研究院)