所謂平面彈性應力の一解法

根來, 祥三郎
九州帝國大學彈性工學研究所

https://doi.org/10.15017/7159629

出版情報：九州帝國大學彈性工學研究所報告. 2 (1), pp.1-14, 1944-11-25. Research Institute for Elasticity Engineering, Kyushu Imperial University

所謂平面彈性應力の一解法

所員　根來祥三郎

目　次

概　要

I. 緒　言.

II. 基礎理論.

i 基礎式.

ii 平面重調和函數の一近似解法.

III. 結　言.

文獻表.

概　要

本文では所謂平面彈性應力の一般式中に含む Airy 函數 (χ) が要求される周邊條件式と變位並びに其の勾配値が位置座標の一價函數であるといふ事實より誘導された Michell の條件式[1] とを先づ檢討し，更に該函數の特性である平面重調和函數式 ($\nabla_1^4\chi=0$) を二次元補間式を利用して近似的に變換し，この變換式を用ひて上記兩條件式を滿足する Airy 函數を所謂網目反覆法で求める方法に就て詳述した。

該方法に依れば外側，内側兩周邊が全く任意な形の多孔薄平板でもそれ等が周邊側面上で且平板方向の外力を受ける場合であれば該平面内に生ずる應力度狀態は近似的に常に求め得られることになる.

I 緒　言

薄平面が周邊側面のみに平板方向の外力を受ける場合は該平面内に生ずる應

力度狀態は數式的には既に一般解[2]をも求められてゐるが，未だ極く特殊な形の平板[3]以外はその應力度狀態の數値量が求め得られない．又これ等の應力度狀態を求める數値計算法も既に無孔で而も特殊な形の領域に就いては取扱はれてゐる[4]が一般な形の領域に就いては未だ論及されてゐない．尙又偏光彈性實驗的にもこの應力度狀態が求め得られる筈であるが實施上は實驗裝置その他技工等の都合で簡單な周邊形を持つ平面領域のみに制限される．

本論文では外側內側兩周邊の形が全く任意な多孔薄平板內の上記應力度狀態を數値計算的に求める方法に就いて示す．即ち該應力度狀態を著者の提唱せる狹義平面應力の平均應力狀態[5]であると從來通り近似的に看做し，この一般應力式中に含まれる Airy 函數 (χ) が要求される周邊條件と變位並びにその勾配値が位置座標の一價函數であるといふ事實より誘導された Michell の條件式[6]を先づ檢討し，更に該函數の特性である平面重調和函數式 ($\nabla^4\chi=0$) を二次元補間式を用ひて變換し，この變換式を利用して上記兩條件式を滿足する樣な Airy 函數を所謂網目反覆法[7]で數値計算的に求める方法に就いて記述する．

II 基 礎 理 論

1 基 礎 式

多孔薄平板が周邊側面のみに平板方向の外力を受ける場合に該平面內の彈性應力度狀態は著者の提唱せる狹義平面應力の平均應力狀態[8]と近似的に看做す事が出來る．從てこの應力度狀態及び座標變位狀態は次式で表はされる．

應力度狀態；

$$\left.\widehat{xx}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad \widehat{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2},\quad \widehat{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},\quad \widehat{zx}=\widehat{yz}=\widehat{zz}=0\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

座標變位狀態；

$$\left.\begin{aligned} Eu &= \xi-(1+\sigma)\frac{\partial\chi}{\partial x} \\ Ev &= \eta-(1+\sigma)\frac{\partial\chi}{\partial y} \\ Ew &= (1+\sigma)\xi_1-\tfrac{1}{4}(1-\sigma)\beta(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

E＝縦弾性係数
σ＝ポアソン比

但し上記平板に垂直な方向に z 軸を平板内に x, y 軸を夫々直交する様に定める．尚上式中の χ 及び ξ, η 函数は次記で定義される函数である．

$$\left.\begin{aligned} &V^2{}_1\chi = \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \qquad \beta = \text{常数} \\ &V^2{}_1(\xi, \eta, \xi_1) = 0 \qquad V^2{}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

更に χ 函数は

(A) 任意点では；

$$V^4{}_1\chi = 0\ , \quad V^4{}_1 = \frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(B) 周邊上では；

多孔薄平板の周邊番號を例へば外側周邊より適宜に $0, 1, 2, \cdots\cdots n$ とすれば第 i 番目の周邊上では次式が成立つ．

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \widehat{xx}\cos(x\nu)+\widehat{xy}\cos(y\nu) \\ Y_\nu &= \widehat{xy}\cos(x\nu)+\widehat{yy}\cos(y\nu) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5_1)$$

但し　$\nu = i$ 周邊の外向垂直方向

$X_\nu Y_\nu$ = 該周邊に働く外力の x, y 軸方向分値

上式に (1) 式を代入すれば次式となる．

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_{P_i} &= -\int_{A_i}^{P_i} Y_\nu\, ds+c_{1i} \\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_{P_i} &= \int_{A_i}^{P_i} X_\nu\, ds+c_{2i} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5_2)$$

但し上記積分は i 周邊に沿つて行ひ A_i, P_i は夫々該周邊上の基準点及び動点を表す．(5_2) 式は更に次式にも書替へられる．

$$(\chi)_{P_i} = -\int_{A_i}^{P_i} dx \int_{A_i}^{Q_i} Y_\nu \, ds + \int_{A_i}^{P_i} dy \int_{A_i}^{Q_i} X_\nu \, ds + c_{1i} \left| x \right|_{A_i}^{P_i} + c_{2i} \left| y \right|_{A_i}^{P_i} + c_{3i} \quad \cdots\cdots \quad (5_3)$$

但し Q_i は $\widehat{A_i P_i}$ 弧内の任意点，(c_1, c_2, c_3) は適宜常數を示す.

(C) 任意閉曲線上では；

領域内の座標變位及びその x, y 軸方向の勾配値を夫々位置座標の一價函數であるとすれば平板領域内の任意閉曲線に沿つて行ふ次記一周積分は零となる.

$$\oint d(u, v, w) = 0. \,, \quad \oint d\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u, v, w)\right\} = 0 \,. \quad \oint d\left\{\frac{\partial}{\partial y}(u, v, w)\right\} = 0 \,.$$

上式に (2) 式を代入すれば χ 及び ξ_1 に就て次の條件式が得られる.

$$\left.\begin{aligned} &\oint \frac{\partial}{\partial \nu}(V^2{}_1\chi) ds = 0 \\ &\oint \left\{ y\frac{\partial}{\partial \nu}(V^2{}_1\chi) - x\frac{\partial}{\partial s}(V^2{}_1\chi) \right\} ds - (1+\sigma) \left| \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_{A_i}^{A_i} = 0 \\ &\oint \left\{ x\frac{\partial}{\partial \nu}(V^2{}_1\chi) + y\frac{\partial}{\partial s}(V^2{}_1\chi) \right\} ds + (1+\sigma) \left| \frac{\partial \chi}{\partial y} \right|_{A_i}^{A_i} = 0 \\ &\left| \xi_1, \frac{\partial \xi_1}{\partial x}, \frac{\partial \xi_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right|_{A_i}^{A_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

即ち上記の結果より (4), (5), (6) 條件式を滿足する樣な χ 函數を求めれば (1) 式より要求の應力度狀態が常に求め得られることになる.

扨て (5_3) 條件式で示す如く各周邊毎に含む 3 個の未知常數 $(c_1, c_2, c_3)_i$ を考慮して平板領域内に n 個の孔を持つ場合にこの χ 函數を次の如く分けて考へて見る.

$$\chi(x, y) = \chi_0(x, y) + \sum_{i=1}^{n} (c_{1i}x + c_{2i}y + c_{3i}) \xi_{2i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

但し上式中の χ_0 及び ξ_{2i} 函數は次記條件式を滿足する函數である.

領域内の任意点では；

$$V^4{}_1\chi_0 = 0 \,, \qquad V^2{}_1\xi_{2i} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8_1)$$

となり，各周邊上では

$$\left.\begin{aligned}&\chi_0=-\int_{A_i}^{P_i}dx\int_{A_i}^{Q_i}Y_\nu\,ds+\int_{A_i}^{P_i}dy\int_{A_i}^{Q_i}X_\nu\,ds &&\text{(凡ての周邊上)}\\ &\xi_{2i}=1 &&(i\ \text{番目の周邊上})\\ &\xi_{2i}=0 &&(i\ \text{番目以外の周邊上})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8_2)$$

となる.

尙領域内の任意閉曲線に沿つては (7) 式と (6) 式とより

$$\left.\begin{aligned}&\oint\frac{\partial}{\partial\nu}\left[V^2{}_1\left\{\chi_0+\sum_{i=1}^{n}(c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i})\xi_{2i}\right\}\right]ds=0\\ &\oint\left[\left(y\frac{\partial}{\partial\nu}-x\frac{\partial}{\partial s}\right)(V^2{}_1)\left\{\chi_0+\sum_{i=1}^{n}(c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i})\xi_{2i}\right\}\right]ds\\ &\qquad-(1+\sigma)\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{\chi_0+\sum_{i=1}^{n}(c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i})\xi_{2i}\right\}\right|_A^A=0\\ &\oint\left[\left(x\frac{\partial}{\partial\nu}+y\frac{\partial}{\partial s}\right)(V^2{}_1)\left\{\chi_0+\sum_{i=1}^{n}(c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i})\xi_{2i}\right\}\right]ds\\ &\qquad+(1+\sigma)\left|\frac{\partial}{\partial y}\left\{\chi_0+\sum_{i=1}^{n}(c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i})\xi_{2i}\right\}\right|_A^A=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となる.

然るに $(8_{1,2})$ 式で示す ξ_{2i} 函數は平面調和函數の近似解法[9] を利用すれば數量的に常に求め得られるため χ 函數が既知となれば (9) 式は $(c_1, c_2, c_3)_i$ 未知常數に關して $3n$ 個の未知數を含む一次式となる. 而して上記各閉曲線に沿つて出來るこれ等の一次式が $(c_1, c_2, c_3)_i$ 未知數に關して相互に獨立性を持つためには領域内のこれ等閉曲線内には少くとも一個の新しい周邊（未だ他の閉曲線に包含されない周邊を意味する）を含むことが必要である.（この閉曲線を獨立性閉曲線と名命する）. 從てこの獨立性閉曲線を領域内に孔の個數と同じ n 個しか存在し得ない. 併しこれ等各々に就いて (9) 式が一個宛出來るからこれ等の式より出來る聯立方程式は未知數, 式數共に $3n$ 個の聯立一次方程式となる. 依つてこれ等の未知常數 $(c_1, c_2, c_3)_i$ は凡て該聯立方程式より決定出來ることになる. 但しこの聯立方程式を行列式を利用して正攻法で解くには餘り

未知數が多過ぎて特殊な場合以外は一寸不可能であるが所謂反復法を利用すれば常に解く事が出來る.

依つて結局本問題では $(8_{1,2})$ 式で定義される χ_0 平面重調和函數が求まれば問題は解決する事になる. 次項で該函數の解法に就て詳述する。

2. 平面重調和函數の一近似解法

先づ要求される函數 (χ) を二次元の一般補間式で表示するため領域内に於けるこれ等函數値の分布狀態を次式の型の二次元補間式で置いて見る.

$$\begin{aligned}\chi &= a_{00}+(a_{10}X_0+a_{01}Y_0)+(a_{20}X_0X_1+a_{11}X_0Y_0+a_{02}Y_0Y_1)\\ &\quad +\cdots\cdots+(a_{n0}X_0X_1\cdots X_{n-1}+a_{n-1\cdot 1}X_0X_1\cdots X_{n-2}Y_0+\cdots\\ &\quad +a_{0n}Y_0Y_1\cdots Y_{n-1})+\cdots\cdots \qquad (10_1)\end{aligned}$$

但し　$a_{rS}=$ 常數　$X_r=x-x_r$　$Y_S=y-y_S$

尙以下の取扱ひ上 (10_1) 式を次式に書替へる.

$$\chi=S_{00}+S_{10}+S_{01}+S_{20}+S_{11}+S_{02}+\cdots\cdots+S_{rS}+\quad\cdots\cdots \qquad (10_2)$$

$$S_{rS}=a_{rS}X_0X_1\cdots\cdots X_{r-1}\quad Y_0Y_1\cdots\cdots Y_{S-1}.$$

然る時は上式に於て座標位置 $x_r,\ y_S(r,s=0,1,2,3\cdots)$ の χ 値が既知なる場合は a_{rS} 常數は常に次記の如く決定出來る.

即ち (10_2) 式中の x,y に夫々 (x_i,y_j) を代入して後變形すれば次式となる.

$$\begin{aligned}\chi_{ij} &= \{(S_{00}+S_{10}+\cdots\cdots+S_{i0})+(S_{01}+S_{11}+\cdots\cdots+S_{i1})+\cdots\\ &\quad +(S_{0j}+S_{1j}+\cdots\cdots+S_{ij})\}_{ij} \qquad (11)\end{aligned}$$

但し式中 χ_{ij} は $\chi(x_i,\ y_j)$ を表はし中括弧 $\{\ \}_{ij}$ の尾語 ij は中括弧内の x,y に夫々 $x_i,\ y_j$ を代入する事を意味する.

更に (11) 式右邊各項括弧内を $x,\ y$ に就いて分離し且つ x のみに關して次記の新記號 (V_{ij})

$$V_{ij}=a_{0j}+a_{1j}p_{i0}+a_{2j}p_{i0}p_{i1}+\cdots\cdots+a_{ij}p_{i0}p_{i1}\cdots\cdots p_{i\cdot(i-1)}\cdots\cdots\cdots \qquad (12)$$

但し　$p_{iS}=(x_i-x_S)$

即ち V_{ij} の尾語 i は x に關して上式の如き i 次の級數を示し, j は (11) 式右邊の各小括弧よりそれ等の級數を分離した殘りの y のみの次記級數項

$$q_{j0}\,q_{j1}\cdots\cdots q_{j(j-1)} \qquad 但し \quad q_{jS}=y_j-y_S$$

の次數を表はす事にし, この記號を利用して (11) 式を書替へれば次式となる.

$$\chi_{ij}=V_{i0}+V_{i1}q_{j0}+V_{i2}q_{j0}q_{j1}+\cdots\cdots+V_{ij}q_{j0}q_{j1}q_{j2}\cdots\cdots q_{j(j-1)} \quad\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

從て (12) 式に就いて考へれば上記の如く x に關し一次元の補間式と看做されるからこの場合の各項係數である a_{ij} 常數は周知の如く[10] (12) 式より次式の型で表はされる.

$$a_{ij}=\sum_{m=0}^{i}\frac{p_{mm}}{p_{m0}\,p_{m1}\cdots p_{mi}}V_{mj} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14_1)$$

又 (13) 式に於ても y に關し $V_{iS}(S=0,\ 1,\ 2\cdots j)$ を未知常數と看做せば (13) 式よりこの場合の V_{ij} は上記と全く同様にして次式の型で表はされる.

$$V_{ij}=\sum_{n=0}^{j}\frac{q_{nn}}{q_{n0}\,q_{n1}\cdots q_{nj}}\chi_{in} \quad\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14_2)$$

從て $(14_{1,\,2})$ 式を併せ考へれば二次元の補間式 ((10) 式) 中に含む各項係數 a_{ij} は次の型で表はされる事になる.

$$a_{ij}=\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{j}\frac{p_{mm}}{p_{m0}\,p_{m1}\cdots p_{mi}}\,\frac{q_{nn}}{q_{n0}\,q_{n1}\cdots q_{nj}}\chi_{mn} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14_3)$$

而して (10) 式の項數を如何に增しても各項係數は上式の型で容易に求め得られる. 然るに (10) 式は式の性質上項數を增せば增す程要求の χ 函數に精度の高い近似式となることが明かである. 又一方取扱ふ領域を充分微小な範圍内にすれば, その微小度合に應じて (10) 式右邊を適宜な次數にとりても充分近似な χ 函數を表はし得る事も容易に認められる. 依つてこれ等の式は二次元補間式を利用して表示した函數 (χ) の近似式となる.

次にこの誘導式を利用して平面重調和函數式 ($\nabla^4{}_1\chi=0\cdots(15)$) を書替へるため (10) 式の右邊を x, y に關して 4 次の微係數を求めれば次記となる.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4\chi}{\partial x^4} &= 4!\Big\{a_{40}+\Big(a_{50}\sum_{i=0}^{4}X_i+a_{41}Y_0\Big)+\cdots\cdots+(a_{n0}\Theta_n+a_{n-1.1}Y_0\Theta_{n-1}+\cdots\\
&\quad +a_{4.\,n-4}Y_0Y_1Y_2\cdots Y_{n-5})+\cdots\Big\}\\
\frac{\partial^4\chi}{\partial y^4} &= 4!\Big\{a_{04}+\Big(a_{14}X_0+a_{05}\sum_{i=0}^{4}Y_i\Big)+\cdots\cdots+(a_{0n}\Theta'_n+a_{1.\,n-1}X_0\Theta'_{n-1}+\cdots\\
&\quad +a_{n-4.\,4}X_0X_1\cdots X_{n-5})+\cdots\Big\}\\
\frac{\partial^4\chi}{\partial x^2\partial y^2} &= 4\Big[a_{22}+\Big(a_{32}\sum_{i=0}^{2}X_i+a_{23}\sum_{i=0}^{2}Y_i\Big)+\cdots\cdots+\Big\{a_{n-3.3}\Big(\sum_{i=0}^{2}Y_i\Big)H_{n-3}\\
&\quad +a_{3.\,n-3}\Big(\sum_{i=0}^{2}X_i\Big)H'_{n-3}\Big\}+(a_{n-2.2}H_{n-2}+a_{2.n-2}H'_{n-2})+\cdots\Big]
\end{aligned}\right\}\quad(16_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_{n-S} &= \sum_{i=0}^{n-S-4}\sum_{j=1}^{n-S-3}\sum_{k=2}^{n-S-2}\sum_{l=3}^{n-S-1}\frac{X_0X_1X_2\cdots X_{n-S-1}}{X_iX_jX_kX_l}\\
\Theta'_{n-S} &= \sum_{i=0}^{n-S-4}\sum_{j=1}^{n-S-3}\sum_{k=2}^{n-S-2}\sum_{l=3}^{n-S-1}\frac{Y_0Y_1Y_2\cdots Y_{n-S-1}}{Y_iY_jY_kY_l}\\
H_{n-S} &= \sum_{i=0}^{n-S-2}\sum_{j=1}^{n-S-1}\frac{X_0X_1X_2\cdots X_{n-S-1}}{X_iX_j}\\
H'_{n-S} &= \sum_{i=0}^{n-S-2}\sum_{j=1}^{n-S-1}\frac{Y_0Y_1Y_2\cdots Y_{n-S-1}}{Y_iY_j}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\ (16_2)$$

（註） 本文 (16_2) 式で示す記號に就いて記述して置く.

例へば (16_1) 式の第一式中に含む a_{60} を係數に持つ項 Θ_6 は (16_2) 式の第一式より次式となる.

$$\Theta_6=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=2}^{4}\sum_{l=3}^{5}\frac{X_0X_1X_2X_3X_4X_5}{X_iX_jX_kX_l}$$

而して上式右邊の各項は夫々次記を表す.

$$\left|\ j=1\begin{cases} k=2.\quad l=(3,4,5)=X_4X_5+X_3(X_5+X_4)\\ k=3.\quad l=(4,5)\qquad =X_2(X_5+X_4)\\ k=4.\quad l=5\qquad\quad\ \ =X_2X_3.\end{cases}\right.$$

$$
i=0\left\{\begin{array}{lllll} & j=2\left\{\begin{array}{l} k=3. \\ k=4. \end{array}\right. & \begin{array}{l} l=(4,5) \\ l=5 \end{array} & \begin{array}{l} =X_1(X_5+X_4) \\ =X_1X_3. \end{array} \\ & j=3 & k=4 \quad l=5 & =X_1X_2 \end{array}\right.
$$

$$
i=1\left\{\begin{array}{lll} j=2\left\{\begin{array}{l} k=3 \\ k=4 \end{array}\right. & \begin{array}{l} l=(4,5) \\ l=5 \end{array} & \begin{array}{l} =X_0(X_5+X_4) \\ =X_0X_3 \end{array} \\ j=3 \quad k=4. & l=5 & =X_0X_3 \end{array}\right.
$$

$$
i=2. \quad (j=3 \quad k=4 \quad l=5=X_0X_1)
$$

即ち Θ_6 は上記右邊で示す 15 項の總知となり次式を意味する記號である。

$$
\Theta_6=X_0(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)+X_1(X_2+X_3+X_4+X_5)+X_2(X_3+X_4+X_5)
$$
$$
+X_3(X_4+X_5)+X_4X_5
$$

尙その他の Θ'_{n-S}, H_{n-S}, H'_{n-S} も亦上記と同樣な事實を表はす記號である.

從て平面重調和函數式を上記二次元補間式を利用して書替へるには (16_1) 式を (15) 式に代入すれば宜い事になり，その結果は次式となる.

$$
\begin{aligned}
4\,!\Big\{&a_{40}+a_{04}+\Big(a_{50}\sum_{i=0}^{4}X_i+a_{05}\sum_{i=0}^{4}Y_i+a_{14}X_0+a_{41}Y_0\Big)+\cdots\cdots+(a_{n0}\Theta_n+a_{0n}\Theta'_n)\\
&+(a_{n-1.1}Y_0\Theta_{n-1}+a_{1.n-1}X_0\Theta'_{n-1})+\cdots\cdots\\
&+(a_{4.n-4}Y_0Y_1Y_2\cdots Y_{n-5}+a_{n-4.4}X_0X_1\cdots X_{n-5})+\cdots\Big\}\\
&+4\Big[a_{2.2}+\Big(a_{23}\sum_{i=0}^{2}Y_i+a_{32}\sum_{i=0}^{2}X_i\Big)+\cdots\cdots+\Big\{a_{n-3.3}\Big(\sum_{i=0}^{2}Y_i\Big)H_{n-3}+a_{3.n-3}\Big(\sum_{i=0}^{2}X_i\Big)H'_{n-3}\Big\}\\
&+(a_{n-2.2}H_{n-2}+a_{2.n-2}H'_{n-2})+\cdots\cdots\Big]=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)
\end{aligned}
$$

然るに前記の如く (10) 補間式に於て五次以上が省略出來る程度の微小領域內でこの χ 函數を取扱ふ事にすれば (17) 式に於て x, y に關する一次以上の項が省略出來，結局平面重調和函數式は近似的に次式に書替へられることになる.

$$
\begin{aligned}
&b_{00}\chi_{00}+b_{10}\chi_{10}+b_{01}\chi_{01}+b_{20}\chi_{20}+b_{11}\chi_{11}+b_{02}\chi_{02}+b_{30}\chi_{30}+b_{21}\chi_{21}\\
&\quad+b_{12}\chi_{12}+b_{03}\chi_{03}+b_{40}\chi_{40}+b_{22}\chi_{22}+b_{04}\chi_{04}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18_1)
\end{aligned}
$$

但し

$$b_{00}=\frac{3}{p_{01}p_{02}p_{03}p_{04}}+\frac{1}{p_{01}p_{02}q_{01}q_{02}}+\frac{3}{q_{01}q_{02}q_{03}q_{04}}$$

$$b_{10}=\frac{3}{p_{10}p_{12}p_{13}p_{14}}+\frac{1}{p_{10}p_{12}q_{01}q_{02}}$$

$$b_{01}=\frac{1}{p_{01}p_{02}q_{10}q_{12}}+\frac{3}{q_{10}q_{12}q_{13}q_{14}}$$

$$b_{20}=\frac{3}{p_{20}p_{21}p_{23}p_{24}}+\frac{1}{p_{20}p_{21}q_{01}q_{02}}$$

$$b_{11}=\frac{1}{p_{10}p_{12}q_{10}q_{12}}$$

$$b_{02}=\frac{1}{p_{01}p_{02}q_{20}q_{21}}+\frac{3}{q_{20}q_{21}q_{23}q_{24}}$$

$$b_{30}=\frac{3}{p_{30}p_{31}p_{32}p_{34}}\;,\quad b_{21}=\frac{1}{p_{20}p_{21}q_{10}q_{12}}\;,$$

$$b_{12}=\frac{1}{p_{10}p_{12}q_{20}q_{21}}\;,\quad b_{03}=\frac{3}{q_{30}q_{31}q_{32}q_{34}}\;,$$

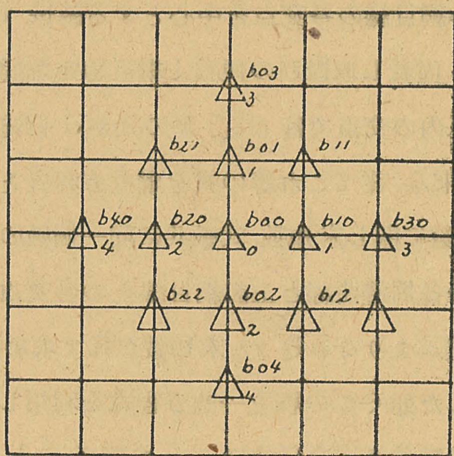
$$b_{40}=\frac{3}{p_{40}p_{41}p_{42}p_{43}}\;,\quad b_{22}=\frac{1}{p_{20}p_{21}q_{20}q_{21}}\;,$$

$$b_{04}=\frac{3}{q_{40}q_{41}q_{42}q_{43}}\;,$$

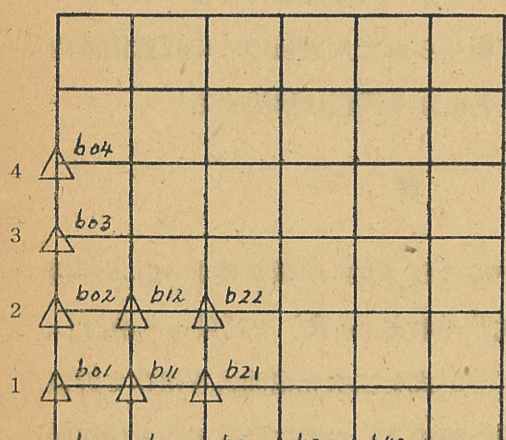
尙 $p_{ij}=x_i-x_j\;,\quad q_{ij}=y_i-y_j\;,\quad \chi_{ij}=\chi(x_i\,,\,y_j)$ ………… (18_2)

即ち上式に於て b_{is} 係數は上記の如く考慮点の位置座標さへ定まれば既知量となる常數である. 從て上記領域內に適宜な 13 点をとれば即ち例へば該領域內に適當な間隔で x, y 兩軸に平行な直交網目線を引けば (18) 式はこれ等網目交点の隣接 13 点に於ける χ 函數値相互の關係を表はす式となる. 但し式中の任意座標を表はす x_i, y_j の尾語 (i, j) は網目交点の位置番號を表はすのみの記號であつて, その配列順位及びそれ等の間隔等には何んらの制限をも與へてゐ

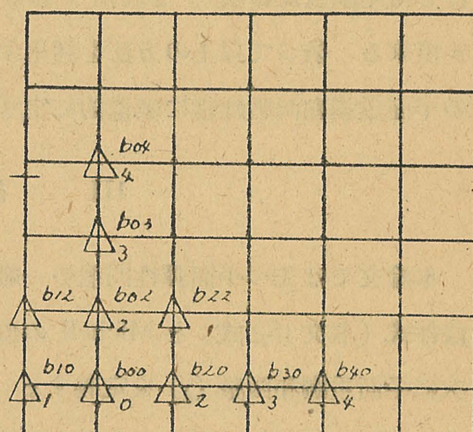
ない．従て今その配列順序の二三の例をとり，それ等の場合に於て網目交点の χ_{ij} 値が (18) 式で取る可き係数を圖示すれば次記の第1圖，第2圖，第3圖となる．



第　1　圖



第　2　圖



第　3　圖

尚又上記の網目を等間隔にとるとすれば例へば第1圖の配列順序の如き場合は (18_1) 式は次式となる。

$$20\chi_{00}-8(\chi_{10}+\chi_{01}+\chi_{20}+\chi_{02})+2(\chi_{11}+\chi_{12}+\chi_{21}+\chi_{22})+\chi_{30}+\chi_{03}+\chi_{40}+\chi_{04}=0 \quad \cdots(18'_1)$$

即ち上記の (18_1) 式又は $(18'_1)$ 式は二次元補間式を利用して近似的に誘導した

平面重調和函數式となる。從て實際に(18)式を用ひて與へられた周邊値を滿足する平面重調和函數を求める場合は先づ全領域內に亘つて適宜な直交網目線を引く. 然る時はこれ等網目線の各交点を中心とする隣接 13 点間に常に (18) 關係式が 1 個宛出來る. 尙若し取扱ひの便宜上網目線を等間隔に引けば周邊より數へて一般に第二層以內の交点では $(18_1{}')$ 型の式が 1 個宛又第一層目の交点では (18_1) 式が 1 個宛出來る. 從てこれ等の式を聯立方程式と看做せば領域內の各交点に於ける χ_{ij} 未知數に關し未知數, 式數共に同一個數の聯立一次方程式となる. 依つて平板領域の各周邊曲線と上記網目線との各交点上の値が與へられれば理論上は該聯立方程式よりこれ等 χ_{ji} 未知數が凡て求め得られることになる.

併し前項でも記述した如くこの聯立一次方程式を利用して正攻法で解くには餘り未知數が多過ぎて特殊な場合以外にこれを解くことは一寸不可能である. 併し所謂網目反覆法[11] を利用すれば該聯立多元一次方程式でも常に解くことが出來る. 依つて以上の方法を利用すれば與へられた周邊値の許に任意領域內の平面重調和函數は常に數量的に定まることになり問題は解決する.

III 結 言

本論文では先づ平面彈性問題の一般式中に含む Airy 函數が要求される周邊條件式 (本文 (5_3) 式) と Michell の條件式[12] (本文 (6) 式) とに就いて檢討し, 次に平面重調和函數 (χ) を定義する $\nabla^4{}_1\chi = 0$ 式を二次元補間式を用ひて近似的に書替へ領域內に引いた適宜直交網目線の隣接 13 点間に於けるこれ等函數値相互の關係式を上記變換式より誘導し, 該式を基礎式とし所謂網目反覆法[13] を用ひた任意領域內の平面重調和函數を求める方法を記述し, 更にこの方法を利用して (5_3), (6) 兩條件式を滿足する Airy 函數の求め方に就いて詳述した.

該方法に依れば薄平板が周邊側面上のみに平板方向の外力を受ける場合は外側, 內側兩周邊が全く任意形な多孔薄平板內の上記應力狀態でも常に近似的に (理論的には正確に) 求め得られる事になる. 但し本解法の實施は一般には可

なり手數を要する事ではあるが無孔形の場合或は孔が一個の場合は實際問題にも適用出來又その他の場合でも他により良き方法がなければ手數を要しても本解法に依らねばならないと思ふ.

本文では網目間隔の決定法並びにその收斂値の持つ誤算程度等に就いて記述する事を省略したが，これ等は著者の提唱せる“平面調和函數の近似計算解法[14],,で詳述した方法その儘がこの場合にも適用出來る事を附記して置く.

尙又計算實施上本文記述の網目交点以外に對角線方向に x, y 軸を取りた隣接 13 点間の關係式を利用する實施法又はこれ等と本文で示した交点間の關係式とを併用して出來る夫々の關係式を利用する實施法等も考へられるが，これ等技工上の得策方法は精度上昇と實施手數とを併せ考へて最適な方法を選ぶ可きは當然である.

最後に本論文の研究には阪大機械工學科卒業論文として關谷壯，栗原明生兩君の加つたことを記して置く.

文 献

1) J. H. Michell; Proceedings of London Math. Soci. XXXI P. 100.

2) (i) 註 1.

(ii) G. Kolossoff; Ztschr. f. Math. u. Phys. 62, 1914.

(iii) 横田成年; 機械學會誌 第18卷, 第38號 (大 4)

(iv) Ernst Kohl; Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. Bd. 10, Heft 2, April 1930, S. 171.

(v) Ludwig Föppl, Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. Bd. 11, Heft 2, April 1931, S. 81.

(vi) Ernst Weinel; Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. Bd. 11, Heft 5, Oktober 1931 S. 349.

(vii) N. Muschelisvili; Math. Ann. 107, 1932, S. 282.

(viii) N. Muschelisvili; Ztsch. f. Angew. Math. u. Mech. Bd. 13, Heft 4, August 1933, S. 264.

(ix) R. V. Southwell; Phil. Mag. 1936. 2.

(x) 根來祥三郎; 機械學會論文集 6卷, 23 號-1 (昭 15-5)

3) H. Poritsky; H. D. Snively, C. R. Wylise; J. of Appl. Mech. 1936.
註 (2) (ii), (iii), (v), (viii).

4) Richardson; Phil. Trans. of Royal Soc. of Lond. Sers. 210 (1910).

5) 脚註 (2) (×) 參照

6) 脚註 (1) 參照

7) 砂谷智導, 根來祥三郎; 機械學會論文集 3 卷 10 號 (昭12-2)

8) 脚註 (2) (×) 參照

9) 脚註 (7) 參照

10) 根來祥三郎; 機械學會論文集 5 卷 21 號-1 (昭 4-11)

11) 脚註 (7) 參照

12) 脚註 (1) 參照

13) 脚註 (7) 參照

14) 脚註 (7) 參照