

鋼球の觸壓に因る硝子板の破壊について

二神, 哲五郎
九州帝國大學彈性工學研究所

國井, 修二郎
九州帝國大學彈性工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7159384>

出版情報：九州帝國大學彈性工學研究所報告. 1 (3), pp.93-124, 1944-02. Research Institute for Elasticity Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン：

権利関係：



REPORTS OF DANSEI-KŌGAKU KENKYŪSYO
(THE RESEARCH INSTITUTE FOR ELASTICITY ENGINEERING)

Vol. 1, No. 3.

February, 1944.

九州帝國大學

彈性工學研究所報告

第1卷 第3號

昭和19年2月



鋼球の觸壓に因る硝子板の破壊について

The Contact Pressure studied by the Cracks
of Glass Plates produced by Steel Balls.

所員 二神哲五郎

所員 國井修二郎

九州帝國大學
彈性工學研究所

紀元2604年

目 次

	頁
第 1 卷 第 1 號	
三 瀨 幸 三 郎 國 井 修 二 郎	
走行荷重に因る橋桁の強制振動論	1
第 1 卷 第 2 號	
石 橋 正	
周圍固定の平板の周邊應力及撓みの近似計算法	53
第 1 卷 第 3 號	
二 神 哲 五 郎 國 井 修 二 郎	
鋼球の觸壓に因る硝子板の破壊について	93

鋼球の觸壓に因る 硝子板の破壊について

所 員 二 神 哲 五 郎
所 員 國 井 修 二 郎

(昭和 18 年 9 月 8 日受理)

目 次

- I. 緒 言.
- II. 基礎理論の概要.
- III. 變位の計算.
- IV. 歪及び應力の計算.
- V. 靜 壓 破 壊.
- VI. 衝 撃 破 壊.
- VII. 結 語.

I 緒 言

“硝子の材料力學的研究”第四報⁽¹⁾に於て著者の一人は硝子板の表面に種々の大きさの鋼球を靜的に押し着け、或は是等を落下衝突せしめることに依り硝子板の表面に瑕を生ぜしめる爲めの最小荷重、最低高度及び生じた瑕の大きさ等の間の關係を實驗的に考究したのである。

通常の板硝子はその表面が硬化層で覆れてゐるため、材料力學的には一種の不均質體であり之を理論的に取扱ふことは極めて複雑な問題である。依つて本論文に於ては表面硬化層を取り去つた所謂磨硝子について再度實驗した結果を

⁽¹⁾ 二神：硝子の材料力學的研究（第四報），九大工學彙報第 17 卷第 3 號，頁 152-159（昭和 17 年）

報告すると共に觸壓に關する Hertz の理論に基いて計算を行ひ、是等の實驗結果を説明し併せて硝子板に對する破壊條件を明確ならしめんとした。云ふまでもなく破壊は弾性の際限を越えた現象であるから、斯様な現象に對して通常の弾性理論を適用することは一見自己撞着の如く思考されるが硝子は非常に脆い物質で破壊の直前まで Hooke の法則に支配されてゐるものと見做して大過はないから上記の理論で此問題を取扱ひ得るのである。

II 基礎理論の概要

一點で接觸してゐた二物體が P なる全壓力で互に押合ふときは接觸点の附近に於ける物體部分は多少壓縮せられて是等二物體は小さい乍ら或る接觸面を共有するに到る。此接觸面を圍む周邊の曲線が如何な形をしてゐるか又此接觸面内に於ける壓力分布の有様は如何様であるか等に關しては有名な Hertz⁽¹⁾ の理論がある。特に二物體の一方が球體（鋼球）であり、他方は表面の平な物體（硝子板）であるときには此理論の結果は甚だ簡潔となる。我々は Love⁽²⁾ の著書に従つて以下簡単に其概要を述べることにする。

先づ變形前に於ける接觸点 O を原点に、物體（硝子板）の表面を xy -面を選んで z -軸を物體（硝子板）内部に向ふ如く採る（第一圖左參照）。一方、球體（鋼球）に對しては z -軸を反對の向きに採り混同を避ける爲め特に之を z_s -軸と書いて置く。

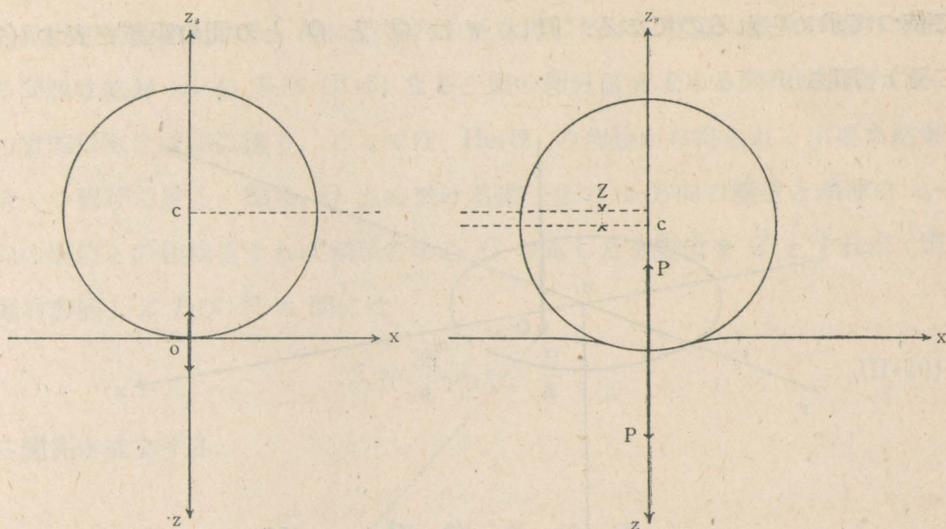
扱て Hertz の理論に依れば、半徑 R なる球體（鋼球）と表面の平な物體（硝子板）とが互に全壓力 P で押合ふ場合に生ずる接觸面は O を中心とし半徑 a なる圓周で圍まれた領域であつて、 a 及び P, R 間の關係は

$$a^3 = \frac{3\pi}{4} (\vartheta_s + \vartheta) PR \quad (\text{II} \cdot 1)$$

で與へられる。茲に ϑ_s 及び ϑ は夫々鋼及び硝子に對する Lamé の彈性率 λ_s ,

(1) H. Hertz: Gesammelte Werke, Bd. I, pp. 155-173 (1895), pp. 174-196 (1895).

(2) A.H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, (1927).



第一圖

μ_s 及び λ, μ から次式

$$\vartheta_s = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{4\pi\mu_s(\lambda_s + \mu_s)}, \quad \vartheta = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \quad (\text{II}\cdot 2)$$

に依つて導かれた一種の弾性常数を表す。

又、接觸圓内の任意の一点 $Q'(x', y', 0)$ に於ける z -方向の壓力の大きさ p は

$$p = \frac{3P}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2}{a^2}} \quad (\text{II}\cdot 3)$$

で與へられ、之を用ゐて接觸圓内で積分を行ひ

$$\phi = \iint \frac{p}{r} dx' dy', \quad (\text{II}\cdot 4)$$

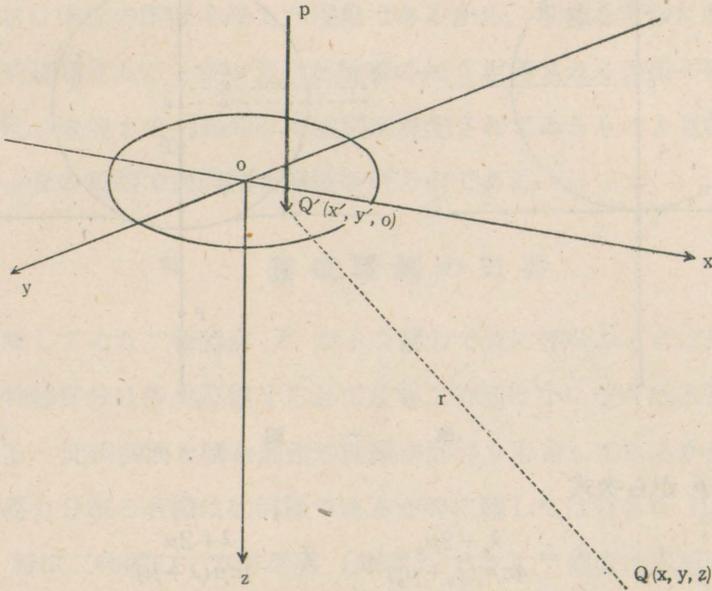
$$\chi = \iint p \log(z+r) dx' dy', \quad (\text{II}\cdot 5)$$

$$\Omega = -\frac{z\phi}{4\pi\mu} - \frac{\chi}{4\pi(\lambda + \mu)} \quad (\text{II}\cdot 6)$$

なる諸量を導けば、硝子内部の任意の一点 $Q(x, y, z)$ に於ける變位 s の直角成分は

$$s_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad s_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad s_z = \frac{\partial \Omega}{\partial z} + 2\vartheta\phi \quad (\text{II}\cdot 7)$$

に依つて求められるのである。但し、 r は Q' と Q との間の距離を表す (第二圖)。即ち



第 二 圖

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

である。

變位 s が判れば、 Q 点に於ける歪の直角成分 e_{xx} , e_{yy} , ... 及び容積變化率 Δ は定義式

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial s_x}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial s_y}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial s_z}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z}, & e_{zx} &= \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \\ \Delta &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \end{aligned} \right\} \text{(II.8)}$$

に依つて計算され、従つて又 Q 点に於ける應力の直角成分 T_{xx} , T_{yy} , ... は Hooke の法則

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, & T_{yy} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}, & T_{zz} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} \\ T_{yz} &= \mu e_{yz}, & T_{zx} &= \mu e_{zx}, & T_{xy} &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \text{(II.9)}$$

から見出すことが出来る。故に硝子内の任意点に於ける變位，歪及び應力を求める問題は結局 (II.4) 及び (II.5) なる二個の積分値を求める問題に歸着する。その實際計算は次節に譲り，こゝでは Hertz の理論から得られる重要な結果を今一つ掲げて置く。即ち， O 点に於ける硝子板の z -方向の變位と鋼球の z_s -方向の變位との和換言すれば鋼球の中心 C の爲した全變位を Z とすれば（第一圖右参照）， Z 及び P, a 間には

$$Z = \frac{3\pi}{4} (\vartheta_s + \vartheta) \frac{P}{a} \quad (\text{II.10})$$

なる關係が成立する。

III 變位の計算

(II.6) 及び (II.7) から

$$\left. \begin{aligned} s_x &= -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial\chi}{\partial x}, \\ s_y &= -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ s_z &= -\frac{z}{4\pi\mu} \frac{\partial\phi}{\partial z} + \vartheta\phi \end{aligned} \right\} (\text{III.1})$$

を得る。故に硝子板の表面換言すれば $z=0$ なる面上に於ける變位 $(s)_0$ の直角成分は

$$(s_x)_0 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial(\chi)_0}{\partial x}, \quad (s_y)_0 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial(\chi)_0}{\partial y}, \quad (s_z)_0 = \vartheta(\phi)_0 \quad (\text{III.2})$$

で與へられる。茲に， $(\phi)_0$ 及び $(\chi)_0$ は夫々 $z=0$ なる面上の任意点 $Q(x, y, 0)$ に於ける ϕ 及び χ の値を表す。而して以下に於いても専ら斯様な記法を用ゐることとする。

扱て， $\rho' \equiv OQ' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ と置けば，(II.3) 及び (II.4), (II.5) に依つて

$$(\phi)_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \iint \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} dx' dy', \quad (\text{III.3})$$

$$(\chi)_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \iint \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} \log r dx' dy' \quad (\text{III} \cdot 4)$$

を得る。但し、積分は接觸圓の内部について行ふものとし且

$$r \equiv Q'Q = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

なるものとする。上式から $(\phi)_0$ 及び $(\chi)_0$ を求めるに際して注意すべきことは Q 点が接觸圓の外部にあるか又はその内部にあるかに従つて $(\phi)_0$ 及び $(\chi)_0$ の解析的表式が相異ると云ふ点である。先づ Q 点が接觸圓の外部にある場合について (III.3) の積分を計算する。 $O\hat{Q}Q' = \varphi$ と置けば (第三圖 A), (r, φ) は Q 点を極, QO を首線と見做した場合の点 Q' の極座標である。故に直角座標 (x', y') から極座標 (r, φ) へ變數變換を行へば (III.3) は

$$(\phi)_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} dr$$

となる。但し、 Q 点から接觸圓に引いた二本の切線 QT_1 及び QT_2 の爲す角が $2\varphi_1$ で、圓弧 T_1AT_2 及び 圓弧 T_2BT_1 の極方程式を夫々 $r = r_2(\varphi)$ 及び $r = r_1(\varphi)$ とした。又、被積分函數中に現れた ρ' は、 $OQ = \rho$ とすれば、 r と次の關係で結び付けられてゐる (第三圖 A)。即ち

$$\rho'^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi.$$

次に r に關する積分値を求めるため

$$u = r - \rho \cos \varphi \quad \therefore du = dr$$

なる變數置換を行へば

$$\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} dr = \int_{-\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}^{\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}} \sqrt{1 - \frac{u^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi}{a^2}} du = \frac{\pi}{2a} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi)$$

を得る。従つて結局

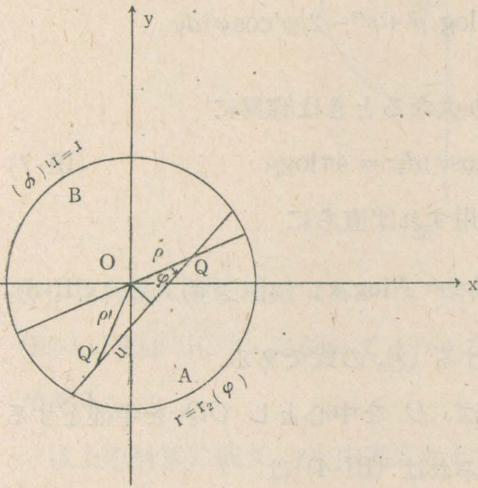
$$(\phi)_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{\pi}{2a} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{3P}{4a^3} \left\{ (2a^2 - \rho^2) \varphi_1 + \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi_1 \right\}$$

となる。然るに第三圖 A から $\sin \varphi_1 = \frac{\rho}{a}$ なることが明かであるから、上式は

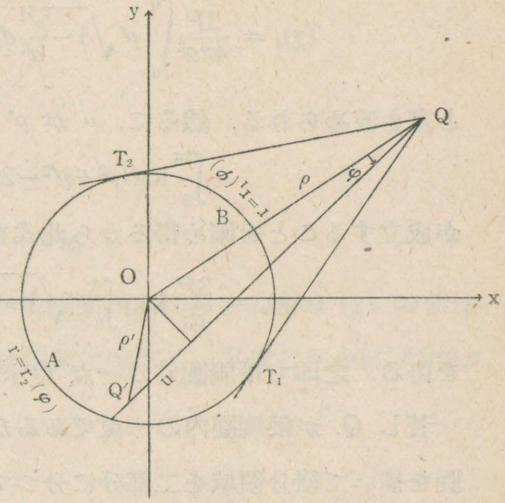
$$(\phi)_0 = \frac{3P}{4a^3} \left\{ (2a^2 - \rho^2) \sin^{-1} \frac{a}{\rho} + a\sqrt{\rho^2 - a^2} \right\}, \quad (\rho > a) \quad (\text{III}\cdot 5)_1$$

と書き改められる。之即ち接觸圓外の一点 Q に於ける $(\phi)_0$ の式である。

Q が接觸圓内の一点である場合には第三圖 B を注意しつゝ、上述と全く同様な方法に依つて



第三圖 B



第三圖 A

$$(\phi)_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} dr = \frac{3P}{2\pi a^2} \int_0^\pi \frac{\pi}{2a} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

となるから、此積分値を求めることにより直ちに

$$(\phi)_0 = \frac{3\pi P}{4a} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right), \quad (\rho < a) \quad (\text{III}\cdot 5)_2$$

を得る。之即ち接觸圓内の一点 Q に於ける $(\phi)_0$ の式である。勿論 $(\phi)_0$ は連続函数であつて、点 Q が接觸圓周上にある場合の $(\phi)_0$ の値は $(\text{III}\cdot 5)_1$ 又は $(\text{III}\cdot 5)_2$ に於いて $\rho \rightarrow a$ なる極限值に等しく、其値は明かに $\frac{3\pi P}{8a}$ である。

以上を取纏め且簡單の爲め $\frac{\rho}{a}$ を ξ と書くことにすれば、 $(\phi)_0$ の表式として

$$(\phi)_0 = \frac{3P}{4a} \left\{ (2 - \xi^2) \sin^{-1} \frac{1}{\xi} + (\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \geq 1 \right)$$

$$(\phi)_0 = \frac{3\pi P}{4a} \left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right), \quad \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \leq 1\right) \quad \text{III.6}$$

を得る。(1)

次に、(III.4) の積分を計算する。先づ Q 点が接觸圓の外部にある場合を考ふれば (第四圖), 明かに (III.4) の右邊は

$$(\chi)_0 = \frac{3P}{4\pi a^2} \int_0^a \rho' \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} d\rho' \int_0^{2\pi} \log(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi) d\varphi$$

と書き改められる。然るに、 ρ が ρ' より大なるときは容易に

$$\int_0^{2\pi} \log(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi) d\varphi = 4\pi \log\rho \quad \text{III.7}$$

が成立することを確かめ得るから此式を利用すれば直ちに

$$(\chi)_0 = \frac{3P}{a^2} \log\rho \int_0^a \rho' \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} d\rho' = P \log\rho, \quad (\rho > a) \quad \text{III.8}_1$$

を得る。之即ち接觸圓外の一点 Q に於ける $(\chi)_0$ の式である。

若し Q が接觸圓内の一点であるならば、 O を中心とし OQ を半徑とする圓を描いて積分領域を二部分に分つて考ふれば (III.4) は

$$(\chi)_0 = \frac{3P}{4\pi a^2} \left\{ \int_0^\rho \rho' \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} d\rho' \int_0^{2\pi} \log(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi) d\varphi \right. \\ \left. + \int_\rho^a \rho' \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} d\rho' \int_0^{2\pi} \log(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi) d\varphi \right\}$$

と書くことが出来る。此式の右邊の第一項には直接 (III.7) を用ゐる, 第二項には (III.7) に於いて ρ と ρ' を取換へたものを用ゐることが出来るから上式は

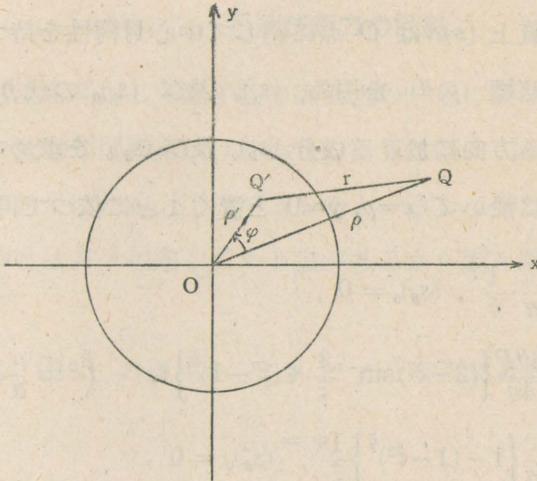
$$(\chi)_0 = \frac{3P}{4\pi a^2} \left\{ 4\pi \log\rho \int_0^\rho \rho' \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} d\rho' + 4\pi \int_\rho^a \sqrt{1 - \frac{\rho'^2}{a^2}} \rho' \log\rho' d\rho' \right\}$$

となる。右邊の積分値を計算することに依り結局

$$(\chi)_0 = P \left\{ \log\rho - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (\rho < a) \quad \text{III.8}_2$$

を得る。之即ち接觸圓内の一点 Q に於ける $(\chi)_0$ の式である。勿論 $(\chi)_0$ も亦

(1) 上記の積分方法は J. Prescott: Applied Elasticity (1924) に依る。



第 四 圖

$(\phi)_0$ と同様に連続函数であつて、点 Q が接觸圓周上にある場合の $(\chi)_0$ の値は (III・8)₁ 又は (III・8)₂ に於いて $\rho \rightarrow a$ なる極限值に等しく、其値は明かに $P \log a$ である。

以上の計算に依り $(\chi)_0$ の表式として

$$\begin{aligned}
 (\chi)_0 &= P \log(a\xi), & \left. \begin{aligned} & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \geq 1 \right) \\ & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \leq 1 \right) \end{aligned} \right\} & \text{(III・9)} \\
 (\chi)_0 &= P \left\{ \log(a\xi) - (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1-\xi^2)^{\frac{3}{2}} + \tanh^{-1}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, & &
 \end{aligned}$$

を得る。

(III・6) 及び (III・9) を (III・2) に持ち込めば硝子板の表面上の任意の一点 $Q(x, y, 0)$ に於ける變位 $(s)_0$ の直角成分として次式を得る。

$$\begin{aligned}
 (s_x)_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)} \cdot \frac{x}{\rho^2}, & (s_y)_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)} \cdot \frac{y}{\rho^2}, \\
 (s_z)_0 &= \frac{3\partial P}{4a^3} \left\{ (2a^2 - \rho^2) \sin^{-1} \frac{a}{\rho} + a(\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, & & \left. \begin{aligned} & (\rho \geq a) \\ & \left(\rho \leq a \right) \end{aligned} \right\} & \text{(III・10)} \\
 (s_x)_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{x}{\rho^2}, \\
 (s_y)_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{y}{\rho^2}, & (s_z)_0 &= \frac{3\pi\partial P}{4a} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right).
 \end{aligned}$$

IV 歪及び應力の計算

前節で得た諸結果を利用して硝子板の表面上の一点に於ける歪及び應力の成分を求めて見る。此種の問題に於ける應力の計算は既に Huber⁽¹⁾ に依つて爲されており、彼の結果は勿論以下述べるものと一致して居る。然し彼の用ゐた方法は我々のものとは多少相違してゐる点があるから繁を厭はず之を掲げることとした。

扱て (II.4) 及び (II.5) の兩式から、 ϕ と χ との間には恒に

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \phi$$

なる關係が成立する。又、(III.2) の第三式から

$$(s_z)_0 = \partial(\phi)_0$$

が成立つ。是等を (II.8) に利用すれば、硝子板の表面上の一点 Q に於ける歪の成分は

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx})_0 &= \frac{\partial(s_x)_0}{\partial x}, \quad (e_{yy})_0 = \frac{\partial(s_y)_0}{\partial y}, \quad (e_{zz})_0 = \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0}, \\ (e_{yz})_0 &= 0, \quad (e_{zx})_0 = 0, \quad (e_{xy})_0 = \frac{\partial(s_y)_0}{\partial x} + \frac{\partial(s_x)_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{(IV.1)}$$

となる。(III.10) で與へられる $(s_x)_0$ 及び $(s_y)_0$ を上式に持込めば $(e_{xx})_0$, $(e_{yy})_0$ 及び $(e_{xy})_0$ を見出すことが出来る。又、点 Q が接觸圓外の点である場合には (II.4) に依つて直ちに

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left[- \iint p \frac{z}{r^3} dx' dy' \right]_{z=0} = 0, \quad (\rho > a)$$

を得るが、 Q が接觸圓内の点である場合には斯様に微分と積分とを交換して $z=0$ と置く譯には行かない。然し、 ϕ は接觸圓内で p なる面配布を持つポテンシャルと見做すことが出来る。故にポテンシャル論に依つて

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -2\pi(p)_{\rho'=\rho} = -\frac{3P}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\rho < a)$$

(1) M. T. Huber: Zur Theorie der Berührung fester elastischen Körper. Ann. d. Phys., Bd. 14, pp. 153-163 (1904).

IV 歪及び應力の計算

前節で得た諸結果を利用して硝子板の表面上の一点に於ける歪及び應力の成分を求めて見る. 此種の問題に於ける應力の計算は既に Huber⁽¹⁾ に依つて爲されており, 彼の結果は勿論以下述べるものと一致して居る. 然し彼の用ゐた方法は我々のものとは多少相違してゐる点があるから繁を厭はず之を掲げることとした.

扱て (II.4) 及び (II.5) の兩式から, ϕ と χ との間には恒に

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \phi$$

なる關係が成立する. 又, (III.2) の第三式から

$$(s_z)_0 = \partial(\phi)_0$$

が成立つ. 是等を (II.8) に利用すれば, 硝子板の表面上の一点 Q に於ける歪の成分は

$$\left. \begin{aligned} (e_{xx})_0 &= \frac{\partial(s_x)_0}{\partial x}, \quad (e_{yy})_0 = \frac{\partial(s_y)_0}{\partial y}, \quad (e_{zz})_0 = \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0}, \\ (e_{yz})_0 &= 0, \quad (e_{zx})_0 = 0, \quad (e_{xy})_0 = \frac{\partial(s_y)_0}{\partial x} + \frac{\partial(s_x)_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{(IV.1)}$$

となる. (III.10) で與へられる $(s_x)_0$ 及び $(s_y)_0$ を上式に持込めば $(e_{xx})_0$, $(e_{yy})_0$ 及び $(e_{xy})_0$ を見出すことが出来る. 又, 点 Q が接觸圓外の点である場合には (II.4) に依つて直ちに

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left[- \iint p \frac{z}{r^3} dx' dy' \right]_{z=0} = 0, \quad (\rho > a)$$

を得るが, Q が接觸圓内の点である場合には斯様に微分と積分とを交換して $z=0$ と置く譯には行かない. 然し, ϕ は接觸圓内で p なる面配布を持つポテンシャルと見做すことが出来る. 故にポテンシャル論に依つて

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -2\pi(p)_{\rho'=\rho} = -\frac{3P}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\rho < a)$$

⁽¹⁾ M. T. Huber: Zur Theorie der Berührung fester elastischen Körper. Ann. d. Phys., Bd. 14, pp. 153-163 (1904).

を得る。是等を (IV・1) に用ゐ且 $\rho = a$ に於いても歪の成分は連続性を持つことに注意すれば

$$\left. \begin{aligned}
 (e_{xx})_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)\rho^2} \left(1 - \frac{2x^2}{\rho^2}\right), & (e_{yy})_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)\rho^2} \left(1 - \frac{2y^2}{\rho^2}\right), \\
 (e_{zz})_0 &= 0, & (e_{yz})_0 &= 0, & (e_{zx})_0 &= 0, & (e_{xy})_0 &= \frac{P}{\pi(\lambda+\mu)} \cdot \frac{xy}{\rho^4}, \\
 & & & & & & (\rho \geq a) \\
 (e_{xx})_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)\rho^2} \left[\left\{ 1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \left(1 - \frac{2x^2}{\rho^2}\right) + \frac{3x^2}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \\
 (e_{yy})_0 &= -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)\rho^2} \left[\left\{ 1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \left(1 - \frac{2y^2}{\rho^2}\right) + \frac{3y^2}{a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \\
 (e_{zz})_0 &= -\frac{3P}{4\pi(\lambda+\mu)a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & (e_{yz})_0 &= 0, & (e_{zx})_0 &= 0, \\
 (e_{xy})_0 &= \frac{Pxy}{\pi(\lambda+\mu)\rho^4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\rho^2}{2a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} & & & & (\rho \leq a)
 \end{aligned} \right\} \text{(IV・2)'}$$

を得る。前節と同様に xy -面内に於いては極座標を使ふことゝすれば上記の歪の成分は著しく簡単な形を採る。即ち

$$\left. \begin{aligned}
 (e_{\rho\rho})_0 &= \frac{p_0}{6(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{\xi^2}, & (e_{\theta\theta})_0 &= -\frac{p_0}{6(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{\xi^2}, \\
 (e_{zz})_0 &= (e_{\theta\theta})_0 = (e_{\rho z})_0 = (e_{z\theta})_0 = 0, & & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \geq 1\right) \\
 (e_{\rho\rho})_0 &= \frac{p_0}{6(\lambda+\mu)\xi^2} \left\{ 1 - (1 + 2\xi^2)(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \\
 (e_{\theta\theta})_0 &= -\frac{p_0}{6(\lambda+\mu)\xi^2} \left\{ 1 - (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \right\}, & (e_{zz})_0 &= -\frac{p_0}{2(\lambda+\mu)} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}, \\
 (e_{\rho\theta})_0 &= (e_{\theta z})_0 = (e_{z\rho})_0 = 0. & & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \leq 1\right)
 \end{aligned} \right\} \text{(IV・2)}$$

である。茲に p_0 は

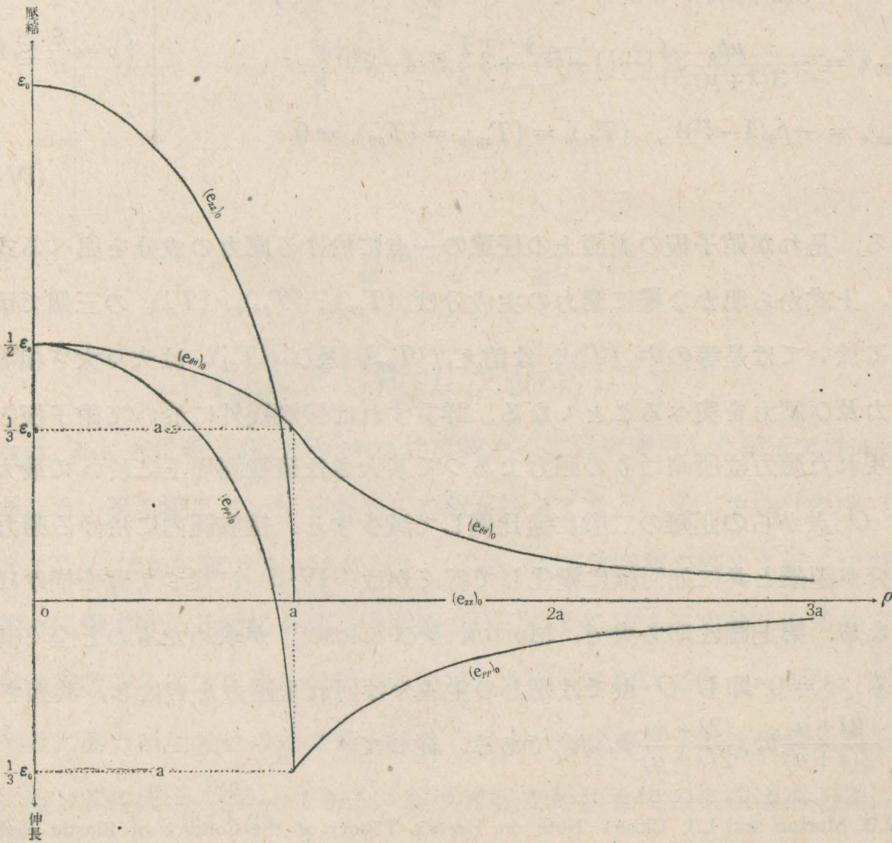
$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad \text{(IV・3)}$$

で與へられる量で、(II・3) から明かな様に之は O 点に於ける壓力の大きさに他ならない。(IV・2) に依つて容積變化率は

$$\left. \begin{aligned} (d)_0 &= 0, & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \geq 1 \right) \\ (d)_0 &= -\frac{p_0}{\lambda + \mu} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}, & \left(\xi \equiv \frac{\rho}{a} \leq 1 \right) \end{aligned} \right\} \text{(IV.4)}$$

となる。

(IV.2) の諸式から次の結論を得る。即ち接觸圓外に於いては硝子板の表面に生じた歪は純粹なひりであつて、動徑 \overrightarrow{OQ} の方向に於ける伸長と之に垂直な方向に於ける等大の收縮とから成り、夫等の大きさは O 点からの距離の二乗に逆比例して減じて行く。従つて此のひりの大きさは接觸圓周上に於いて最大となる。之に反して接觸圓内に生じた歪は可成り複雑であつて、歪の主成分の中 $(e_{\theta\theta})_0$ 及び $(e_{zz})_0$ は恒に收縮を表すが $(e_{\rho\rho})_0$ は $\rho = 0.931a$ を境として收縮から



第 六 圖

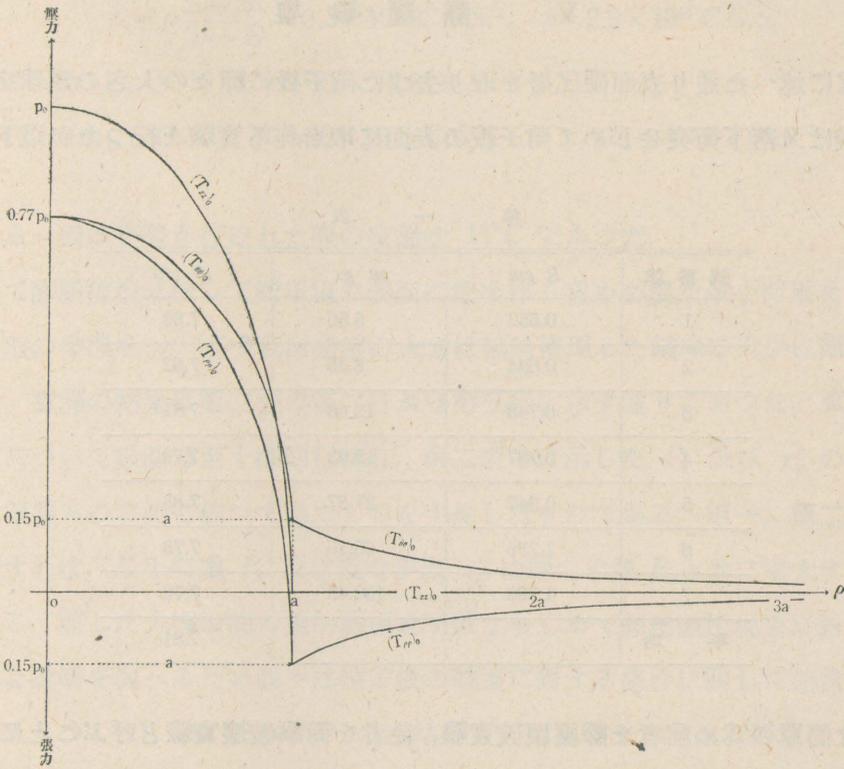
伸長に變る。最大の收縮は $\xi = 0$ 即ち O 点に於いて起り其値は $\frac{p_0}{2(\lambda + \mu)}$ である。簡單の爲め此値を ϵ_0 と書き、歪の主成分が O 点からの距離と共に如何様に變化して行くかを圖示すれば第六圖の通りである。

次に應力の直角成分は (IV・2)' 及び (IV・4) を (II・9) に代入すれば得られる。然し結果を見易くする爲め歪の場合と同様に xy -面内に於いては極座標を使用することにすれば結局

$$\left. \begin{aligned} (T_{\rho\rho})_0 &= \frac{\mu p_0}{3(\lambda + \mu)} \cdot \frac{1}{\xi^2}, & (T_{\theta\theta})_0 &= -\frac{\mu p_0}{3(\lambda + \mu)} \cdot \frac{1}{\xi^2}, & (T_{zz})_0 &= 0, \\ (T_{\theta z})_0 &= (T_{z\rho})_0 = (T_{\rho\theta})_0 &= 0, & & & \left. \begin{aligned} & \left(\rho \equiv \frac{\xi}{a} \leq 1 \right) \\ & \left(\rho \equiv \frac{\xi}{a} \geq 1 \right) \end{aligned} \right\} \\ (T_{\rho\rho})_0 &= \frac{\mu p_0}{3(\lambda + \mu) \xi^2} \left\{ 1 - (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \xi^2 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, & & & & \\ (T_{\theta\theta})_0 &= -\frac{\mu p_0}{3(\lambda + \mu) \xi^2} \left\{ 1 - (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} + 3 \frac{\lambda}{\mu} \xi^2 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, & & & & \\ (T_{zz})_0 &= -p_0 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}, & (T_{\theta z})_0 &= (T_{z\rho})_0 = (T_{\rho\theta})_0 = 0 & & \end{aligned} \right\} \quad (IV \cdot 5)$$

を得る。是れが硝子板の表面上の任意の一点に於ける應力の成分を與へる式である。上式から明かな様に應力の主成分は $(T_{\rho\rho})_0$, $(T_{\theta\theta})_0$, $(T_{zz})_0$ の三個で接觸圓外に於いては是等の中 $(T_{zz})_0$ は消え, $(T_{\rho\rho})_0$ 及び $(T_{\theta\theta})_0$ は夫々大きき相等しい張力及び壓力を與へることとなる。詳言すれば接觸圓外に於いて硝子板の表面に現れた應力は所謂迂りの應力であつて其大ききは接觸圓周上に於いて最大となり O 点からの距離の二乗に逆比例して減少する。接觸圓内に於ける應力の主成分が距離と共に如何様に變化して行くかは (IV・5) に従つて圖を描けば明瞭となる。第七圖は即ち夫で, Morton 及び Close⁽¹⁾ が求めたものと全く同一である。 $\xi = 0$ 即ち O 点では應力の主成分は何れも壓力を表はし, 其大ききは夫々 $\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)} p_0$, $\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)} p_0$, p_0 である。従つて

(1) W.B. Morton and L.J. Close: Note on Hertz's Theory of the Contact of Elastic Bodies. Phil. Mag., Vol. 43, pp. 320-329 (1922).



第七圖

$$\left(\frac{(T_{\rho\rho})_0}{(T_{zz})_0} \right)_{\epsilon=0} = \left(\frac{(T_{\theta\theta})_0}{(T_{zz})_0} \right)_{\epsilon=0} = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1}{2} + \sigma$$

となる。茲に σ は硝子板の Poisson 比で我々の實驗に使用した硝子では $\sigma = 0.27$ であつた。第七圖に於いても勿論この値が採つてある。又、主成分の中 $(T_{\theta\theta})_0$ 及び $(T_{zz})_0$ は恒に壓力を表すに反し $(T_{\rho\rho})_0$ は接觸圓周の極めて近くで壓力から張力に變ずる。此變化が起る場所は (IV・5) から直ちに求められる如く硝子の彈性常數のみに依存するが我々の使用した硝子に於いては $\rho = 0.99a$ である。

最後に應力の主成分の差の最大値は $\rho = a$ の處換言すれば接觸圓周上に於いて生じ其値は $\frac{2\mu\phi_0}{3(\lambda + \mu)}$ である。従つて我々の場合では其値は第七圖に示した様に $0.3p_0$ となる。

V 静 壓 破 壊

緒言に述べた通り表面硬化層を取り去つた硝子板に種々の大きさの鋼球を押し着け或は又落下衝突せしめて硝子板の表面に瑕を作る実験を行つたが以下に於

第 一 表

號 番 球	R cm	m gr	γ gr·cm ⁻³
1	0.552	5.56	7.89
2	0.634	8.35	7.82
3	0.748	13.68	7.81
4	0.787	15.93	7.79
5	0.947	27.87	7.85
6	1.256	65.16	7.78
7	1.588	130.43	7.72
平 均			7.81

いては簡單の爲め前者を静壓壊破実験、後者を衝撃破壊実験と呼ぶことにする。是等の実験で用ゐた鋼球は合計 7 個で、何れも奇麗に磨かれた表面を持ち其質量 m 、半径 R 及び密度 γ は第一表に示す通りである。然し其弾性常數 (Young 率 E_s 、剛性率 μ_s) を正確に測定することは甚だ困難であるから下記の計算に際しては常數表から其平均値として

$$E_s = 2 \times 10^{12} \text{ C.G.S.}, \quad \mu_s = 8 \times 10^{11} \text{ C.G.S.}$$

なる値を採用することにした。従つて Lamé の弾性率 λ_s 及び μ_s は

$$\lambda_s = \mu_s \frac{E_s - 2\mu_s}{3\mu_s - E_s} = 8 \times 10^{11} \text{ C.G.S.}, \quad \mu_s = 8 \times 10^{11} \text{ C.G.S.} \quad (\text{V}\cdot 1)$$

で與へられる。

一方、破壊試験片たる磨硝子に對しては直接の測定に依つて

$$E = 7.4 \times 10^{11} \text{ C.G.S.}, \quad \mu = 2.9 \times 10^{11} \text{ C.G.S.}$$

なる値を得たから、Lamé 弾性率 λ 及び μ は

$$\lambda = \mu \frac{E-2\mu}{3\mu-E} = 3.5 \times 10^{11} \text{ C.G.S.}, \quad \mu = 2.9 \times 10^{11} \text{ C.G.S.} \quad (\text{V.2})$$

となる。(V.1), (V.2) を (II.2) に用ゐると

$$\vartheta_s = 1.5 \times 10^{-13} \text{ C.G.S.}, \quad \vartheta = 4.0 \times 10^{-13} \text{ C.G.S.}, \quad \therefore \vartheta_s + \vartheta = 5.5 \times 10^{-13} \text{ C.G.S.} \quad (\text{V.3})$$

を得る。尙ほ實驗が行はれた際の室温は 11°C であつた。

扱て静壓破壊に於いて硝子板の表面に瑕を作る爲め必要な最小荷重を P_c , 生じた瑕の半徑を r'_c とすれば是等の大きさは無論使用した鋼球の大小に應じて相異り, 實測の結果は第二表の第二行及び第三行に示す通りであつた。實驗は同一球について數回乃至十數回行はれ, 第二表中に示した P_c 及び r'_c の測定値は是等個々の實測に依つて得たものを平均したものである。第一, 第二兩表を比較すれば, 最小荷重 P_c 及び瑕の半徑 r'_c は球の半徑 R と共に増大することが判る。而して夫等の間の量的關係を明確ならしめて静壓破壊現象に對して定量的な説明を與へるため我々は硝子板の破壊に對する條件に關して適當な假定を導入しつゝ, II, III 及び IV の諸結果を利用しやうと思ふ。即ち先づ“静壓破壊に於いては接觸圓の中心詳言すれば最初鋼球が接觸して居た硝子板面上の点 O の變位が或る一定の値に達したとき始めて硝子板の表面に瑕を生ずる”と假定する。

第 二 表

球番號	P_c dyne	r'_c cm	P_c^2/R C.G.S.	$r'_c{}^2/R$ C.G.S.	r'_c/P_c C.G.S.
1	6.57×10^7	0.039	7.82×10^{15}	2.76×10^{-3}	5.94×10^{-10}
2	7.35×10^7	0.044	8.52×10^{15}	3.05×10^{-3}	5.99×10^{-10}
3	8.03×10^7	0.050	8.62×10^{15}	3.34×10^{-4}	6.23×10^{-10}
4					
5	8.91×10^7	0.056	8.39×10^{15}	3.31×10^{-4}	6.28×10^{-10}
6	10.4×10^7	0.066	8.58×10^{15}	3.45×10^{-4}	6.35×10^{-10}
7	11.4×10^7	0.074	8.17×10^{15}	3.44×10^{-4}	6.49×10^{-10}
平均			8.35×10^{15}	3.23×10^{-4}	6.21×10^{-10}

O 点の變位は (III・12) で與へられるから (II・1) を用ゐて (III・12) の邊から a を消去すれば

$$\delta_0 = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \vartheta (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{1}{3}} P_c^{\frac{2}{3}} R^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{V.4})$$

を得る。然るに靜壓破壊の際には P が P_c に等しくなつたとき始めて硝子板の表面に銀を生じ、此時 O 点の變位は上記の假定に依つて或る一定値 D を採ることとなる。故に (V.4) から

$$D = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \vartheta (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{1}{3}} P_c^{\frac{2}{3}} R^{-\frac{1}{3}}$$

を得る。 D , ϑ , ϑ_s は何れも鋼球の大きさには無關係な量であるから上式は

$$P_c^2 = KR \quad (\text{V.5})$$

と書くことが出来る。但し

$$K = \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \vartheta^{-3} (\vartheta_s + \vartheta) D^3 \quad (\text{V.6})$$

は鋼球の種類に無關係な常數である。

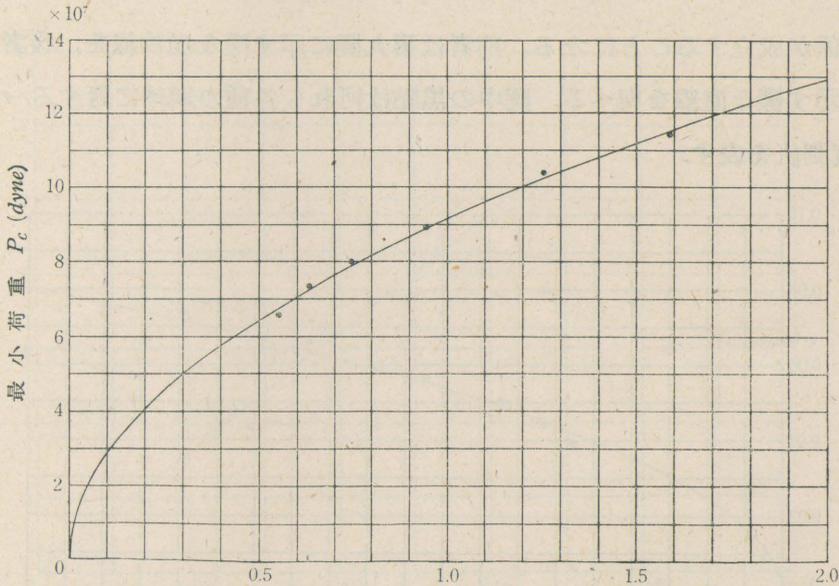
故に靜壓破壊に關して爲した上記の假定が正當なものとすれば (V.5) に依つて P_c^2/R は鋼球の種類に無關係な一定値を採るべきことになる。 P_c 及び R の實測値からこの比を求むれば第二表の第四行の示す通り各種の鋼球についてこの比は略ぼ一定した値を持ち其平均値は 8.35×10^{15} C.G.S. である。従つて、 $K = 8.35 \times 10^{15}$ C.G.S. と置けば (V.5) は

$$P_c^2 = 8.35 \times 10^{15} R \text{ (C.G.S.)} \quad (\text{V.7})$$

と書き改められ、 R と P_c との間の量的關係は第八圖に示す通り一つの拋物線で表されることになる。尙ほ圖中の黒点は R 及び P_c の實測値に對應するもので、之に依つて種々の半徑の鋼球に對して破壊の最小荷重は P_c は (V.7) の法則に従ふものであることが明かとなる。 K の値と (V.3) とを用ゐて (V.6) から D を算出して見ると

$$D = 1.75 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

となる。故に我々の假定に従へば、最初鋼球に接觸して居た硝子板面上の一点 O が荷重の増加するに伴つて次第に陥没の度を増し遂に其の陥没距離が $1.75 \times 10^{-3} \text{ cm}$ (但し此數値は鋼及び硝子の彈性常數に依存して多少化變するが其の



第八圖

大きさの程度は變らない)に達したとき硝子板の表面に始めて瑕が生ずることとなる。 O 点の陥没距離は斯様に微小なものであつて之を實測することは技術的に見て甚だ困難であるから未だ我々の假定の正否を直接驗證し得るまでには至つて居らない。然し乍ら我々の理論が實驗事實に良く適合すると云ふ前述の結果から判斷して、破壊現象夫自身は本來極めて複雑な現象であるに拘らず靜壓破壊の最小荷重に關する限り上記の假定が略ぼ妥當なものであらうと推定し得るのである。

次に靜壓破壊の最小荷重に依つて生じた瑕は極めて淺い完全な圓で、その半徑 r'_c と鋼球の半徑 R 及び最小荷重 P_c とから比 $\frac{r'_c{}^2}{R}$ 及び $\frac{r'_c}{P_c}$ を求むれば是等の値は夫々略ぼ一定となることは第二表の第五、第六兩行に示す通りである。

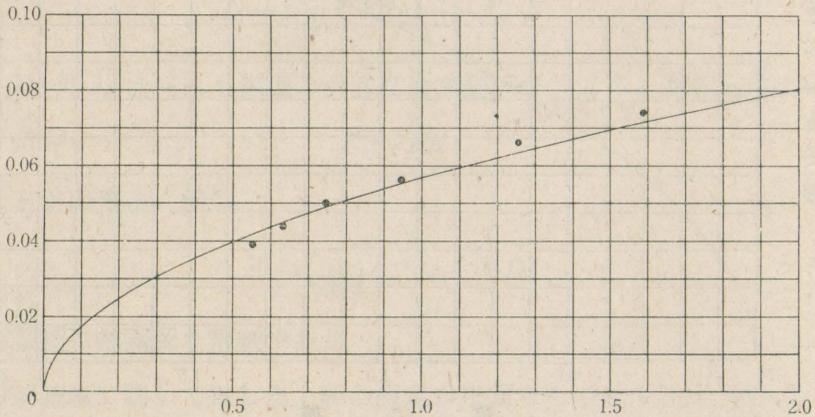
従つて此の平均値を用ゐると、實測上 r'_c と R との間には

$$r'_c{}^2 = 3.23 \times 10^{-3} R \quad (\text{C.G.S.}) \quad (\text{V.8})$$

なる關係があり、又 r'_c と P_c との間には

$$r'_c = 6.21 \times 10^{-10} P_c \quad (\text{C.G.S.}) \quad (\text{V.9})$$

なる關係が成立することになる。前者は第九圖に示す様な拋物線を、後者は第十圖に示す様な直線と與へる。圖中の黒點は何れも各種の鋼球に對する r'_c , R , P_c の實測値を表す。



第 九 圖

然るに一方、靜壓破壊の起る際に於ける接觸圓の半徑を a'_c とすれば (II.1) に依つて

$$a'_c{}^3 = \frac{3\pi}{4} (\vartheta_s + \vartheta) P_c R \quad (\text{V.10})$$

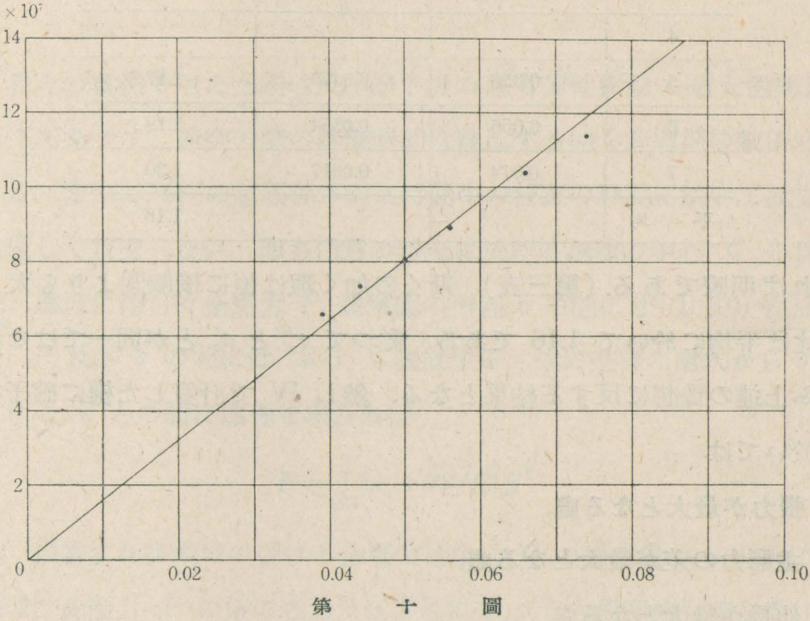
を得る。(V.5) を上式に持ち込んで P_c を消去すれば、 a'_c と R との間には

$$a'_c{}^2 = \left\{ \frac{3\pi}{4} (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{3}} R \quad (\text{V.8}')$$

なる關係が存在することになる。又、(V.5) と (V.10) とから R を消去すれば、 a'_c と P_c との間の關係として

$$a'_c = \left\{ \frac{3\pi}{4K} (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{\frac{1}{3}} P_c \quad (\text{V.9}')$$

を得る. ϑ, ϑ_s 及び K は鋼球の種類に無關係な常數であるから, (V.8)' は a'_c と R との間の關係は拋物線で表されることを示し, (V.9)' は a'_c と P_c との間の關係は直線で表されることを示して居る. (V.8) と (V.8)' 及び (V.9) と



(V.9)' とを對比して考ふれば r'_c の R 又は P_c に對する關係と a'_c の R 又は P_c に對する關係とは全く同一の形式に従ふものであることが判る. 故に r'_c と a'_c とは同一のものではなからうかと云ふ想像が着く. (V.3) で與へられる ϑ 及 ϑ_s の値, (V.7) で與へられる K の値を (V.8)', (V.9)' に用ゐると, 是等は夫々

$$a_c'^2 = 2.43 \times 10^{-3} R \text{ (C.G.S.)} \quad \text{(V.8)''}$$

$$a'_c = 5.37 \times 10^{-10} P_c \text{ (C.G.S.)} \quad \text{(V.9)''}$$

となり, 右邊の係數は (V.8), (V.9) に比較して何れも稍小さい. 換言すれば r'_c は a_c よりも稍大きい. これは又 (V.10) の右邊に P_c 及び R の實測値を代入して各鋼球について a'_c を直接求め夫等の値と r'_c の實測値とを互に對比

第 三 表

球 番 號	r'_c cm	a'_c cm	r'_c/a'_c
1	0.039	0.0361	1.08
2	0.044	0.0392	1.12
3	0.050	0.0427	1.17
4			
5	0.056	0.0478	1.17
6	0.066	0.0554	1.19
7	0.074	0.0617	1.20
平 均			1.16

して見れば明瞭である（第三表）。斯くの如く瑕は恒に接觸圓よりも大きく半徑との比は平均に於いて 1.16 である。従つて r'_c と a'_c とが同一ではなからうかと云ふ上述の豫想に反する結果となる。然し IV で計算した様に硝子板の表面上に於いては

- (i) 張力が最大となる處,
- (ii) 主應力の差が最大となる處,
- (iii) 伸長が最大となる處

は總て一致して居つて、それは接觸圓周上であり而も此圓外に於いては何處にも斯様な性質を示す點は存在しないことを知つて居る。従つて最大張力説に依るも、最大主應力差説に依るも將又最大伸長説に依るも理論上我々は接觸圓周に従うて破壊が起るもの換言すれば瑕の半徑 r'_c は接觸圓の半徑 a'_c と同一であると斷ぜざるを得ない。斯様な推論は接觸圓よりも瑕の方が恒に稍大きいと云ふ實驗結果に合致しないが、實測に際しては鋼球が多少横滑りをせんとする傾向を持つて居ること等を顧慮すれば此程度の不一致が現れたのも蓋し止むを得ないものと思はれる。

VI 衝 撃 破 壊

Hertz は靜力學的考察に依つて得られた II の諸關係が二物體の衝突現象に

も適用し得るものであると考へた。之が所謂 Hertz の衝突理論である。勿論斯様な理論が成立するためには二物體の接觸時間が各物體の固有彈性振動の最大週期に比して相當大きいことが必要である。而して理論と實驗とが斯様な場合に良く一致することは既に Schneebeli⁽¹⁾, Hamburger⁽²⁾ 等に依つて確められてゐる。

扱て我々の實驗で用ゐた鋼球及び硝子板の固有彈性振動の最大週期は 10^{-5} sec. 以下であつて、衝突の際の接觸時間は後述する如く此週期の數倍乃至十數倍である。従つて II の諸關係が衝突時間中の任意の瞬間に於いて成立するものと見做して差支へない。即ち任意の時刻に於ける鋼球の中心 C の爲した全變位 Z , 鋼球に働らく全壓力 P , 接觸圓の半徑 a の間には (II.10) が成立すると共に、 P 及び a の間には (II.1) も成立する。故に是等の兩式から a を消去して、 P と Z との間に關係を求むれば

$$P = \frac{4}{3\pi} (\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{3}{2}} \quad (\text{VI.1})$$

を得る。換言すれば鋼球の受ける全壓力は中心 C の變位量の $3/2$ 乗に比例する。鋼球は此壓力 P の値に重力及び塑性に基づく内部摩擦力等を受けるが我々の目的に對しては是等を考慮するには及ばない。即ち鋼球の運動方程式は

$$m\ddot{Z} = -P \quad (\text{VI.2})$$

となる。(VI.1), (VI.2) から

$$\ddot{Z} = -\frac{4}{3\pi} \{m(\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{3}{2}}\}$$

を得る。球が硝子板に接觸した瞬間を $t=0$ に選び、この瞬間に於ける球心の速さを V とすれば上式を積分することに依つて

$$V^2 - \dot{Z}^2 = \frac{16}{15\pi} \{m(\vartheta_s + \vartheta)\}^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{5}{2}} \quad (\text{VI.3})$$

を得る。故に球は $t=0$ のとき $Z=0$, $\dot{Z}=V$ なる状態から漸次壓縮せられ

(1) Schneebeli: Rep. d. Phys., Bd. 22 (1886).

(2) Hamburger: Tageblatt d. Nat. Vers. in Wiesbaden, (1887).

も適用し得るものであると考へた。之が所謂 Hertz の衝突理論である。勿論斯様な理論が成立するためには二物體の接觸時間が各物體の固有彈性振動の最大週期に比して相當大きいことが必要である。而して理論と實驗とが斯様な場合に良く一致することは既に Schneebeli⁽¹⁾, Hamburger⁽²⁾ 等に依つて確められてゐる。

扱て我々の實驗で用ゐた鋼球及び硝子板の固有彈性振動の最大週期は 10^{-5} sec. 以下であつて、衝突の際の接觸時間は後述する如く此週期の數倍乃至十數倍である。従つて II の諸關係が衝突時間中の任意の瞬間に於いて成立するものと見做して差支へない。即ち任意の時刻に於ける鋼球の中心 C の爲した全變位 Z , 鋼球に働らく全壓力 P , 接觸圓の半徑 a の間には (II・10) が成立すると共に、 P 及び a の間には (II・1) も成立する。故に是等の兩式から a を消去して、 P と Z との間に關係を求むれば

$$P = \frac{4}{3\pi} (\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{3}{2}} \quad (\text{VI} \cdot 1)$$

を得る。換言すれば鋼球の受ける全壓力は中心 C の變位量の $3/2$ 乗に比例する。鋼球は此壓力 P の値に重力及び塑性に基づく内部摩擦力等を受けるが我々の目的に對しては是等を考慮するには及ばない。即ち鋼球の運動方程式は

$$m\ddot{Z} = -P \quad (\text{VI} \cdot 2)$$

となる。(VI・1), (VI・2) から

$$\ddot{Z} = -\frac{4}{3\pi} \{m(\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{3}{2}}\}$$

を得る。球が硝子板に接觸した瞬間を $t=0$ に選び、この瞬間に於ける球心の速さを V とすれば上式を積分することに依つて

$$V^2 - \dot{Z}^2 = \frac{16}{15\pi} \{m(\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{5}{2}}\} \quad (\text{VI} \cdot 3)$$

を得る。故に球は $t=0$ のとき $Z=0$, $\dot{Z}=V$ なる状態から漸次壓縮せられ

(1) Schneebeli: Rep. d. Phys., Bd. 22 (1886).

(2) Hamburger: Tageblatt d. Nat. Vers. in Wiesbaden, (1887).

(従つて Z は増加するが \dot{Z} は減少する), 遂に $t=\tau$ の時最大壓縮が起り $\dot{Z}=0$ となる. この瞬間に於ける Z, P, a の値を夫々 Z_τ, P_τ, a_τ で表せば $\dot{Z}=0$ と置くことにより (VI.3) から

$$Z_\tau = \left\{ \frac{15}{16} \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{\frac{2}{3}} R^{-\frac{1}{3}} V^{\frac{4}{3}} \quad (\text{VI.4})$$

を得る. この値を (VI.1) に代入すれば P_τ は

$$P_\tau = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{15}{16} \pi \right)^{\frac{2}{3}} (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}} V^{\frac{6}{3}} \quad (\text{VI.5})$$

で與へられる. 従つて (II.1) に (VI.5) を用ゐると最大壓縮時に於ける接觸圓の半徑は

$$a_\tau = \left\{ \frac{15}{16} \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{\frac{1}{3}} R^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} \quad (\text{VI.6})$$

となる. 而して τ の値を求むるには (VI.3) を書き直して

$$\frac{dt}{dZ} = \left[V^2 - \frac{16}{15} \left\{ \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{-1} R^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{5}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

なる形となし, 然る後兩邊を Z について 0 から Z_τ まで積分すれば宜い. 即ち

$$\tau = \int_0^{Z_\tau} \left[V^2 - \frac{16}{15} \left\{ \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{-1} R^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{5}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} dZ$$

で與へられる. 右邊の積分は Γ -函數を使用すれば容易に求められ結局

$$\tau = \frac{2\sqrt{\pi}}{5} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \left\{ \frac{15}{16} \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \right\}^{\frac{2}{3}} R^{-\frac{1}{3}} V^{-\frac{1}{3}} = 2.26 \times \{m (\vartheta_s + \vartheta)\}^{\frac{2}{3}} R^{-\frac{1}{3}} V^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{VI.7})$$

となる. 然るに鋼球の落下高度 H と衝突速度 V との間には

$$V^2 = 2gH \quad (\text{但し } g = 980 \text{ C.G.S.}) \quad (\text{VI.8})$$

なる關係があり, 又質量と半徑 R との間には

$$m = \frac{4\pi}{3} \gamma R^3 \quad (\text{但し } \gamma = 7.81 \text{ C.G.S.}) \quad (\text{VI.9})$$

なる關係がある. 従つて (VI.8), (VI.9) を (VI.7) に持込めば

$$2\tau = 3.4 \times 10^{-5} m^{\frac{1}{3}} H^{\frac{1}{10}} \quad (\text{C.G.S.}) \quad (\text{VI.10})$$

を得る。Hertz の理論では力學的エネルギーの消耗を考慮してゐないのであるから、衝突現象は $t = \tau$ なる時刻を境として全く逆に行はれる。詳言すれば $\tau \leq t < 2\tau$ に於いては壓縮された球は漸次其變形を回復して遂に $t = 2\tau$ のとき硝子板から離れる。故に (VI.10) は鋼球と硝子板との接觸時間を與へることになる。各球が夫々の衝撃破壊高度 H_c —— 即ち衝撃破壊實驗に於いて硝子板に瑕を作る爲めに充分な最低高度 —— より落下して硝子板に衝突した際の接觸時間 2τ を (VI.10) に依つて計算した値は第四表の第六行に示す通りである。同表の第二行は衝撃破壊高度 H_c 、第三行は生じた瑕の半径 r_c の實測値である。落下に際して球が回轉運動を起さない様にする爲め鋼球は電磁石で吸着して置き急にスイッチを切つて落下せしめた。實驗は同一球について數回乃至十數回行はれ第四表中の H_c 及び r_c の實測値は勿論是等個々の測定に依つて得たものを平均したものである。表中の實測値から直ちに判ることは鋼球の半径 R 従つて質量 m が增大すると共に瑕の半径 r_c も增大するが衝撃破壊高度 H_c は

第 四 表

球番號	H_c cm	r_c cm	$mH_c^{2.1}$ C.G.S.	$r_c^{\frac{3}{2}}/R$ C.G.S.	2τ sec.
1	112.4	0.0600	11.2×10^4	3.53×10^{-2}	3.7×10^{-5}
2	84.5	0.0646	9.29×10^4	3.41×10^{-2}	4.4×10^{-5}
3	58.9	0.0716	7.13×10^4	3.33×10^{-2}	5.3×10^{-5}
4	52.5	0.0727	6.53×10^4	3.24×10^{-2}	5.7×10^{-5}
5	41.0	0.0833	6.79×10^4	3.25×10^{-2}	7.0×10^{-5}
6	26.6	0.102	6.40×10^4	3.25×10^{-2}	9.7×10^{-5}
7	20.9	0.128	7.72×10^4	3.54×10^{-2}	1.3×10^{-4}
平均			7.31×10^4	3.36×10^{-2}	

却つて減少すると云ふことである。而して是等諸量間の量的關係を明確ならしめて衝撃破壊現象に對して定量的な説明を與へる爲めに硝子板の衝撃破壊に關して我々は或種の假定を導入しやうと思ふ。然し此假定として II で用ゐたも

のを其儘茲に採用する譯には行かない。何者なれば衝撃を受けてゐた時間が破壊現象に對して極めて密接な關係をもつものと推定されるからである。

そこで我々は“衝撃破壊に於いては硝子板の受ける全壓力の時間に對する變化率が或る一定の値に達したとき始めて硝子板の表面に瑕を生ずる”ものと假定する。

此假定に依つて $\frac{dP}{dt}$ 即ち \dot{P} が鋼球の種類に無關係な或一定値を超過するに到れば破壊現象が起ることになる。 \dot{P} は勿論時刻と共に其値を變化するから破壊が起る爲めの上の條件は \dot{P} の極大値 $(\dot{P})_{max}$ が或る一定値に等しくなると云ふことを意味する。そこで $(\dot{P})_{max}$ を求める爲め先づ (VI.1) を t について微分し其結果に (VI.3) を用ゐて \dot{P} を Z の函數として表せば

$$\dot{P} = \frac{2}{\pi} (\vartheta_s + \vartheta)^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} \left[V^2 - \frac{16}{15} \{ \pi m (\vartheta_s + \vartheta) \}^{-1} R^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{5}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

を得る。故に此式から $\frac{d\dot{P}}{dZ} = 0$ を満足する Z の値を見出すことに依り $(\dot{P})_{max}$ を求めることが出来る。即ち計算の結果は

$$(\dot{P})_{max} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{15\pi m}{56} \right)^{\frac{1}{2}} (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{4}{3}} R^{\frac{2}{3}} V^{\frac{7}{3}} \quad (\text{VI.11})$$

となる。(VI.8), (VI.9) を用ゐて上式の右邊から R, V を消去すれば

$$(\dot{P})_{max} = 2^{10} \times 3^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{5}{7} g \right)^{70} \pi^{-14} \gamma^{-12} (\vartheta_s + \vartheta)^{-4} m^{\frac{1}{3}} H^{70} \quad (\text{VI.12})$$

を得る。衝撃破壊に對する條件は上式左邊の値が鋼球の種類に關係しない或る一定値に等しいと云ふことであり、上式右邊の $g, \gamma, (\vartheta_s + \vartheta)$ も亦勿論鋼球の種類に無關係な常數である。故に結局衝撃破壊が起る際には $m^{\frac{1}{3}} H^{70}$ が總ての球について一定値を取ることになる。詳言すれば球の質量 m と衝撃破壊高度 H_c との間には

$$m^{\frac{1}{3}} H_c^{70} = \text{const.}$$

即ち

$$m H_c^{2.1} = \text{const.} \quad (\text{VI.13})$$

なる關係が存在することになる。 m 及び H_c の實測値を使つて積 $mH_c^{2.1}$ の値を求めると第四表の第四行に示す如く各球に對して此値は略一定となり、第一球を除いたものの平均値は 7.31×10^4 C.G.S. である。従つて (VI.13) なる關係は

$$mH_c^{2.1} = 7.31 \times 10^4 \text{ (C.G.S.)} \quad (\text{VI.14})$$

と書き改められ、 m と H_c との間の量的關係は第十一圖に示す通りの曲線で表される。圖中の黒點は m 及び H_c の實測値に對應するもので、各種の鋼球に對して其質量と衝撃破壊高度とが大體に於いて (VI.14) なる法測に従ふものであることが此圖に依つて明瞭となる。(VI.14) の右邊の數値を決定する際に第一球に對する $mH_c^{2.1}$ の値を除外したのは其値が他のものに比較して特別に大きいからである。その眞の原因は明かでないが、此球に對しては接觸時間が小さくて固有彈性振動の最大週期と比較し得る程度である爲め II で述べた様な諸關係が適合し難くなつた結果では無からうかと推定せられるのである。

扱て上述に依れば \dot{P} が或一定値を超過したとき換言すれば $(\dot{P})_{max}$ が或一定値に達したとき始めて瑕が生ずるものと假定して m と H_c との間に (VI.13) なる關係が成立すべきことを見出したのである。然し (VI.13) は次の如き假定からも之を導くことが出来る。即ち我々は“全壓力の時間に對する平均變化率が或る一定値に達したとき始めて瑕を生ずる”ものと假定するのである。全壓力 P の最大價は $t=\tau$ のときの値 P_c であるから平均變化率は $\frac{P_c}{\tau}$ で與へられる。故に (VI.5) 及び (VI.7) の兩式から $\frac{P_c}{\tau}$ を求むれば

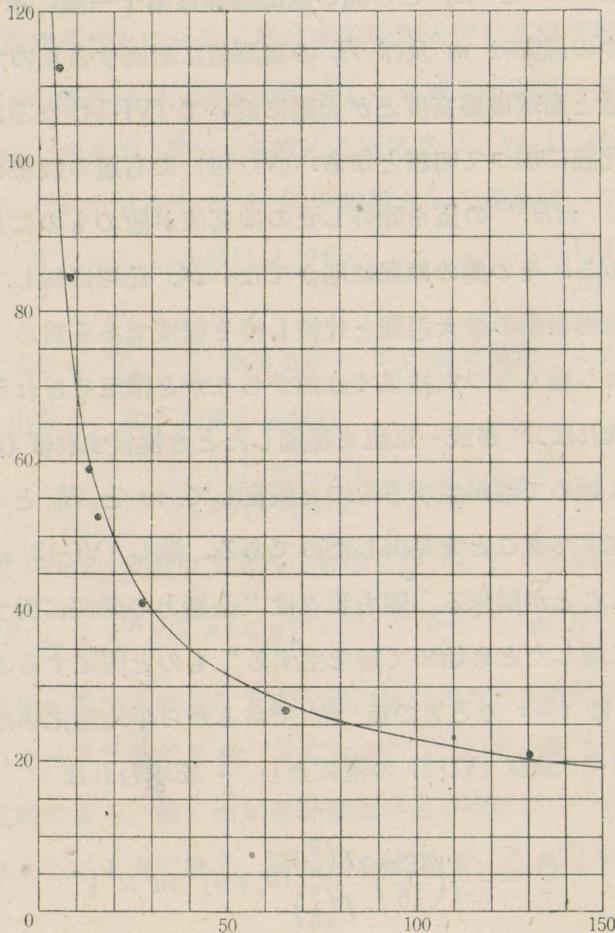
$$\frac{P_c}{\tau} = \frac{10}{3\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{15\pi}{16} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)} (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} R^{\frac{2}{5}} V^{\frac{7}{5}}$$

となり、上式の右邊に (VI.8), (VI.9) を使へば遂に

$$\frac{P_c}{\tau} = 2^{\frac{19}{25}} \times 3^{-\frac{2}{25}} \times 5^{\frac{9}{25}} \times \pi^{-\frac{43}{25}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)} g^{\frac{7}{10}} \gamma^{-\frac{7}{25}} (\vartheta_s + \vartheta)^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} H^{\frac{7}{10}}$$

と書き改められる。

上式の右邊は (VI.12) と全く同一構造を持ち單に普遍的常數の係數を異にするのみである。従つて (VI.12) から (VI.13) を導いたのと同様の論法に依つて全壓力の平均變化率 $\frac{P_{\tau}}{\tau}$ が或一定値に達したとき破壊が起ると云ふ假定を用ふれば上式からも亦 (VI.13) なる關係が成立することを證明し得るのである。



第 十 一 圖

最後に衝擊破壊に依つて生じた瑕について論ずる。靜壓破壊の場合と同様に此場合に於ける瑕も極めて淺い完全な圓である。IV で爲した計算の結果に基

いて考ふれば V の場合と同様に接觸圓周に沿ふて破壊が起るものと推定されるが、此場合には接觸圓の大きさは急速に變化するから如何なる時刻に對するものを取れば宜いかが問題となる。然し衝突の接觸時間は極めて短かく硝子板の受ける全壓力は $t = \tau$ のとき最大となり従つて又此時表面上に於ける應力も最大となること等より考ふれば最大壓縮時（即ち $t = \tau$ のとき）に於ける接觸圓周に沿うて瑕が出来るものと見るのが至當であらう。そこで我々は“鋼球がその衝撃破壊高度 H_c から落下して作る瑕の半徑 r_c は此高度に對應する最大壓縮時の接觸圓の半徑 $a_{\tau c}$ に等しい”ものと假定する。

扱て (VI.6) に (VI.8), (VI.9) を代入して R 及び V を消去すれば

$$a_{\tau} = 2^{-\frac{13}{8}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 5^{\frac{1}{8}} \times \pi^{\frac{1}{8}} \{g(\vartheta_s + \vartheta)\}^{\frac{1}{8}} r^{-\frac{2}{8}} m^{\frac{1}{8}} H^{\frac{1}{8}}$$

となる。上式に g, r 及び $(\vartheta_s + \vartheta)$ の値を持込めば

$$a_{\tau} = 0.013 m^{\frac{1}{8}} H^{\frac{1}{8}} \quad (\text{C.G.S.}) \quad (\text{VI.15})$$

を得る。此式に依つて高度 H から質量 m なる鋼球を落下せしめた時の最大壓縮時に於ける接觸圓の半徑が計算出来る。従つて高度が H_c なる場合の値 $a_{\tau c}$ は

$$a_{\tau c} = 0.013 m^{\frac{1}{8}} H_c^{\frac{1}{8}} \quad (\text{C.G.S.}) \quad (\text{VI.15}')$$

で與へられる。(VI.14) と (VI.15)' とから H_c を消去して、然る後 m を再び R で表せば

$$a_{\tau c}^{\frac{7}{8}} = 0.033 R \quad (\text{VI.16})$$

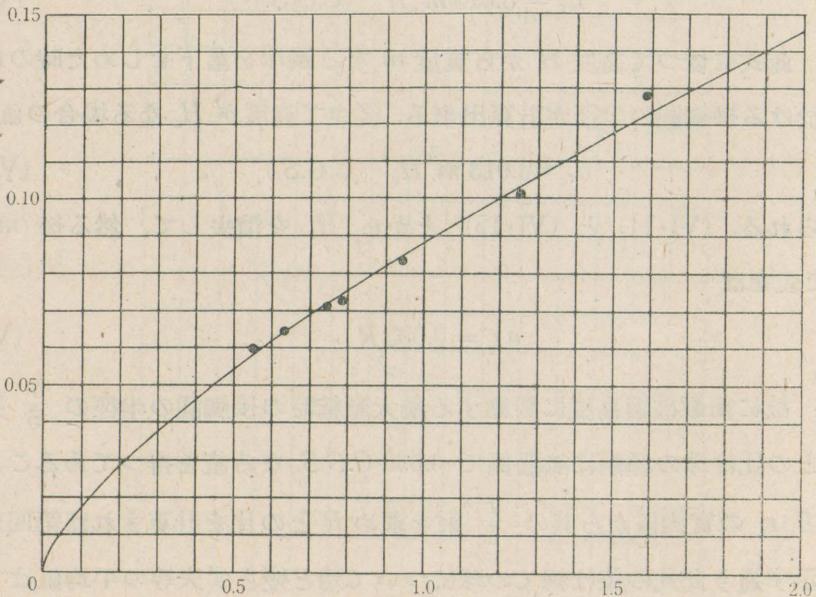
を得る。故に衝撃破壊高度に對應する最大壓縮時の接觸圓の半徑の $\frac{7}{5}$ 乗と球の半徑との比は球の種類に無關係で 0.033 C.G.S. なる値を持つてゐることが判る。一方 r_c の實測値から其の $\frac{7}{5}$ 乗を求め R との比を計算すれば第四表の第五行に示す通り此比の値は總ての球について殆ど變らず夫等の平均値は 0.0336 C.G.S. である。換言すれば瑕の半徑と球の半徑との間には

$$r_c^{\frac{7}{8}} = 0.0336 R \quad (\text{VI.17})$$

なる關係が成立する。第十二圖は (VI.17) の表す曲球で、瑕の半徑の實測値は

球 號 番	r_c cm	$a_{\tau c}$ cm	$r_c/a_{\tau c}$
1	0.0600	0.0562	1.01
2	0.0646	0.0640	1.01
3	0.0716	0.0703	1.02
4	0.0727	0.0722	1.01
5	0.0833	0.0829	1.01
6	0.102	0.101	1.01
7	0.128	0.121	1.03
平 均			1.01

極めて良く (VI・17) なる法則に従つてゐることが判る. 而して (VI・16) と (VI・17) とを比較對照すれば $a_{\tau c}$ と r_c とは單に同一形式の法則に支配されて



第 十 二 圖

ゐるのみならず夫等は數值的にも殆んど相等しいものであることを知る. 個々の球に對する m 及び H_c の實測値を (VI・15)' に代入して $a_{\tau c}$ の値を求めた

結果は第五表に示す通りであつて r_c の實測値との差は僅かに 1% に過ぎないこの事實は r_c と a_{rc} とが相等しいとする我々の假定の正當であることを示してゐるものと考へられる。

VII 結 論

鋼球の觸壓に因る硝子板の破壊現象は極めて複雑な現象であつて其真相を定量的に明確ならしめることは甚だ困難な問題に屬するが、上記の所論に依り破壊に要する最小荷重、最低高度及び最初生じた瑕の大きさ等に關する限り結局次の如く之を述べることが出来る。

即ち、靜壓破壊（硝子板の表面に鋼球を靜的に押し着けて瑕を作る場合）に於いては最初鋼球に接觸して居た硝子板面上の一點が壓縮に依つて或る一定量だけ變位したときに始めて接觸圓周に沿うて瑕が出来るのである。而して生じた瑕の半徑を r'_c 、最小荷重を P_c 、球の半徑を R とすれば是等の間には

$$\frac{P_c^2}{R} = \text{const.}, \quad \frac{r'^2_c}{R} = \text{const.}, \quad \therefore \frac{r'_c}{P_c} = \text{const.}$$

なる諸關係が成立することを理論並びに實驗に依つて確め得たのである。

又、衝撃破壊（硝子板の表面に鋼球を落下衝突せしめて瑕を作る場合）に於いては硝子板の受ける全壓力の時間的變化率が或る一定値を超過するに到れば遂に瑕が生ずることになるのである。而して此の瑕は衝突の際の最大壓縮時に於ける接觸圓周に沿うて生じ、其半徑を r_c 、瑕を作る爲めの最低高度を H_c 、球の質量を m とすれば是等の間には

$$mH_c^{2.1} = \text{const.}, \quad \frac{r_c^{\frac{7}{5}}}{R} = \text{const.}$$

なる關係が成立することを理論並びに實驗に依つて確め得たのである。

附言 この研究は文部省科學研究費によつて行つたものである。著書等は文部省當局各位に對して深甚の謝意を表する次第である。

結果は第五表に示す通りであつて r_c の實測値との差は僅かに 1% に過ぎないこの事實は r_c と a_{rc} とが相等しいとする我々の假定の正當であることを示してゐるものと考へられる。

VII 結 論

鋼球の觸壓に因る硝子板の破壊現象は極めて複雑な現象であつて其真相を定量的に明確ならしめることは甚だ困難な問題に屬するが、上記の所論に依り破壊に要する最小荷重、最低高度及び最初生じた瑕の大きさ等に關する限り結局次の如く之を述べる事が出来る。

即ち、靜壓破壊（硝子板の表面に鋼球を靜的に押し着けて瑕を作る場合）に於いては最初鋼球に接觸して居た硝子板面上の一點が壓縮に依つて或る一定量だけ變位したときに始めて接觸圓周に沿うて瑕が出来るのである。而して生じた瑕の半徑を r'_c 、最小荷重を P_c 、球の半徑を R とすれば是等の間には

$$\frac{P_c^2}{R} = \text{const.}, \quad \frac{r'^2_c}{R} = \text{const.}, \quad \therefore \frac{r'_c}{P_c} = \text{const.}$$

なる諸關係が成立することを理論並びに實驗に依つて確め得たのである。

又、衝擊破壊（硝子板の表面に鋼球を落下衝突せしめて瑕を作る場合）に於いては硝子板の受ける全壓力の時間的變化率が或る一定値を超過するに到れば遂に瑕が生ずることになるのである。而して此の瑕は衝突の際の最大壓縮時に於ける接觸圓周に沿うて生じ、其半徑を r_c 、瑕を作る爲めの最低高度を H_c 、球の質量を m とすれば是等の間には

$$mH_c^{2.1} = \text{const.}, \quad \frac{r_c^{7/8}}{R} = \text{const.}$$

なる關係が成立することを理論並びに實驗に依つて確め得たのである。

附言 この研究は文部省科學研究費によつて行つたものである。著書等は文部省當局各位に對して深甚の謝意を表する次第である。

The Contact Pressure studied by the Cracks of Glass Plates produced by Steel Balls.

Cracking of glass plates due to the contact pressure of steel balls is a very complicated phenomenon; hence it is difficult to treat it quantitatively. With regard to (1) *the minimum stress* P_c to produce a crack on a glass plate by a steel ball pressed statically, (2) *the minimum height* H_c of a steel ball dropped on a glass plate for the same object and (3) *the radii of the circular cracks* r'_c and r_c produced in both experiments, the following results are obtained.

(a) In case a steel ball is pressed to a glass plate statically, a circular crack is produced when the displacement at the center of the circle of contact between the ball and the plate is reached to a certain value. The following relations are obtained theoretically and experimentally.

$$\frac{P_c^2}{R} = \text{const.}, \quad \frac{r_c'^2}{R} = \text{const.}, \quad \therefore \frac{r_c'}{P_c} = \text{const.},$$

R being the radius of the steel ball.

(b) In case a steel ball is dropped on a glass plate, a circular crack is produced when the time derivative of the pressure between the ball and the plate is reached to a certain value. The circular crack coincides with the circle of contact at the instant of greatest compression. The following relations are obtained theoretically and experimentally.

$$mH_c^{2.1} = \text{const.}, \quad \frac{r_c^7}{R} = \text{const.},$$

m being the mass of the steel ball.

正 誤 表

頁	行	誤	正
103	14 脚註	$(e_{xy})_0$ elastischen	$(e_{xy})_0 =$ elastischer
109	3	$\partial_s = 1.5 \times 10_{-13}$	$\partial_s = 1.5 \times 10^{-13}$
110	8	∂, ∂_s	ϑ, ϑ_s
115	19	$\{m(\partial_s + \partial)^{-1}$	$\{m(\vartheta_s + \vartheta)\}^{-1}$
116	21	$m^{\frac{1}{3}} H^{10}$	$m^{\frac{1}{3}} H^{-10}$
118	19	$m^{\frac{1}{3}} H^{10}$	$m^{\frac{1}{3}} H^{10}$
119	6	曲球	曲線
	19, 20	P_c	P_c
121	18, 24	(VI.16), (VI.17)	に (C.G.S.) を附す.