

周囲固定の平面板の周辺應力及撓みの近似計算法

石橋, 正
九州帝國大學彈性工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7159382>

出版情報 : 九州帝國大學彈性工學研究所報告. 1 (2), pp.53-92, 1943-10-25. Research Institute for Elasticity Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン :

権利関係 :



REPORTS OF DANSEI-KŌGAKU KENKYŪSYO
(THE RESEARCH INSTITUTE FOR ELASTICITY ENGINEERING)

Vol. 1, No. 2.

October, 1943.

九・州 帝 國 大 學

彈 性 工 學 研 究 所 報 告

第 1 卷 第 2 號

昭 和 1 8 年 1 0 月

周圍固定の平板の周邊應力及撓みの近似計算法

Eine Methode zur angenäherten Berechnung von dem Randmomente
und der Durchbiegung einer ringsum eingespannten Platte.

所 員 石 橋 正

九 州 帝 國 大 學
彈 性 工 學 研 究 所

紀 元 2 6 0 3 年

目 次

第 1 卷 第 1 號		頁
三 瀬 幸 三 郎		
國 井 修 二 郎		
走 行 荷 重 に 因 る 橋 桁 の 強 制 振 動 論	1	
第 1 卷 第 2 號		
石 橋 正		
周 圍 固 定 の 平 面 板 の 周 邊 應 力 及 撓 み の 近 似 計 算 法	53	

本報告ニ關スル照會通信ハ 福岡市 九州帝國大學彈性工學研究所長
ニ宛テラレタシ

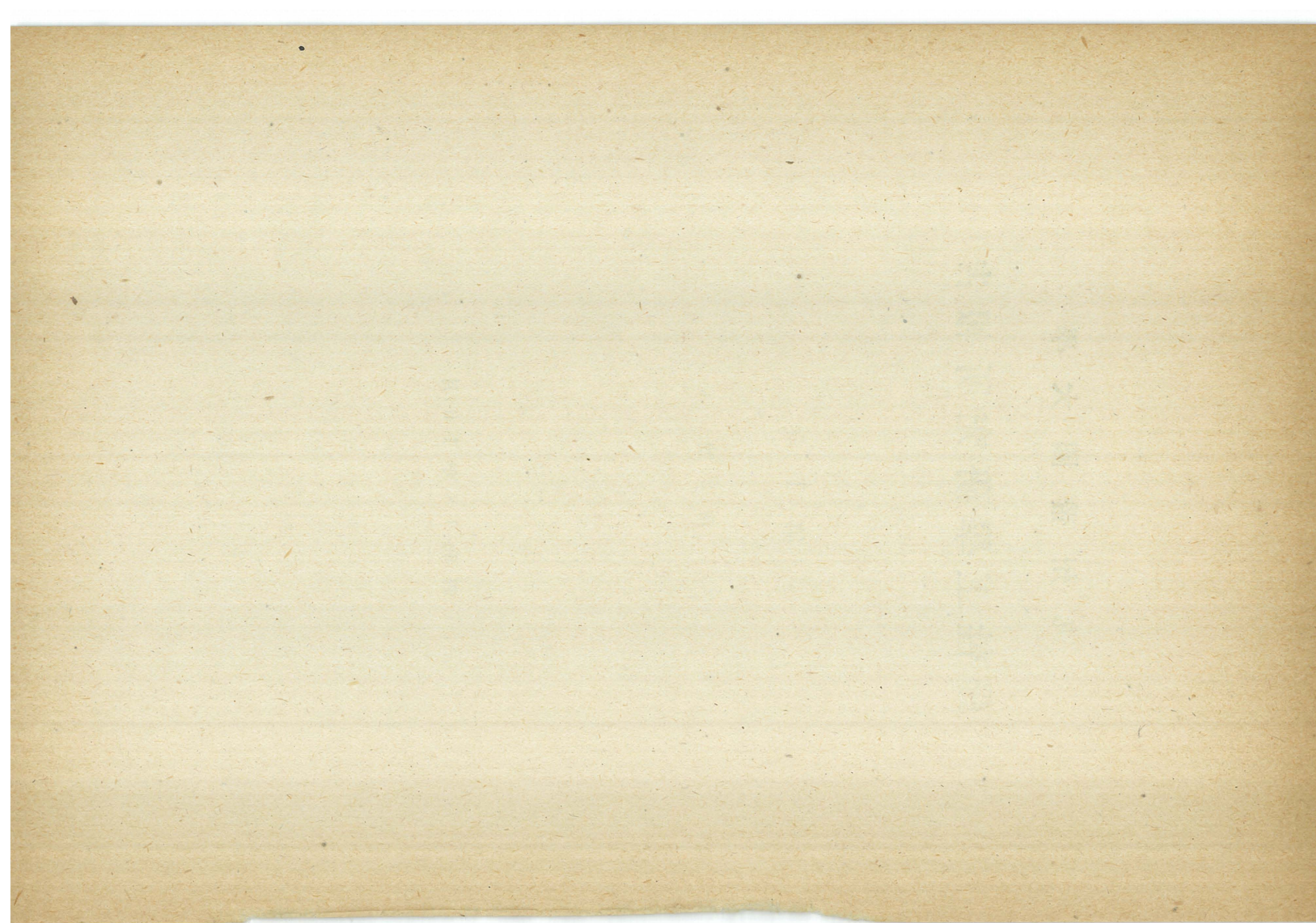
九州帝國大學

彈性工學研究所報告

第 1 卷

第 2 號

昭和 18 年 10 月



周囲固定の平板の周辺應力及撓みの近似計算法

所 員 石 橋 正

(昭和 18 年 6 月 22 日受理)

目 次

概 要.

I. 基 礎 理 論.

1. 一 般 事 項.
2. 方法の一般的説明.
3. 本方法と歪エネルギー理論との關係.
4. 一様分布荷重の場合.
5. 点荷重(集中荷重)の場合.
6. 固定周辺の曲げモーメント.
7. 正多角形板の中心に起る曲げモーメント.
8. 撓 み.

II. 應 用 例.

9. 圓 板.
10. 正 方 形 板
11. 正 三 角 形 板.
12. 正 五 角 形 板.
13. 正 六 角 形 板.
14. 正 多 角 形 板.

文 献.

概 要 周囲固定の平板が板面に直角に作用する分布荷重を荷つて彎曲を受ける時最大應力は固定周邊に生ずる。併し之を求むる計算は一般に甚だ困難にして現在迄に判明してゐる場合は甚だ少い。本論文に於ては斯る場合の周邊の應力を求め且板の任意の点の撓みを求むる一近似方法を示し且正多角形板に就き數値計算を行つて最大應力及び撓みを求めてゐる。

I. 基礎理論

1. 一般事項

板の彎曲の問題に於ては周邊條件を満足する微分方程式の解を得る事が一般に困難なるため種々の近似方法が實用されてゐる。例へば Ritz の方法等は其一つである。併し之等の近似方法にては中央面の撓みを目標にして近似を行ふ故應力を求むるには誤差が増大する。従て正確なる應力を求めるには項數を多くせねばならぬから其計算は甚だ繁雜でとなる。

本論文に於ては任意の調和函數を用ひて固定周邊の應力並に板の任意の一点の撓みを簡単に求める方法を述べてゐる。即二つの直角方向の曲げモーメントの和が調和函數になると云ふ性質を利用して先ずこの和を近似的に求め夫れより周邊の應力を求める。撓みを求めるには歪エネルギーを算出し Castigliano の定理を應用して之を求めるのである。

2. 方法の一般的説明

板の中央面を xy 面とし中央面の撓みを w とする。然る時には周知如く w は次の式で與へられる。

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{N}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1)$$

$$N = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)}, \quad h: \text{板厚}, E: \text{弾性係數}, p: \text{分布荷重}, m: \text{ポアソン數}$$

又 $x = \text{一定}$, $y = \text{一定}$ なる面に作用する曲げモーメント m_x, m_y は次の様に

なる。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

依て

$$m_x + m_y = -N \left(1 + \frac{1}{m} \right) \Delta w$$

従て今

$$\phi = m_x + m_y \quad (3)$$

とおけば (1) 及 (3) より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi &= - \left(1 + \frac{1}{m} \right) p_0 \\ \Delta w &= - \frac{\phi}{\left(1 + \frac{1}{m} \right) N} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{或は} \quad - \left(1 + \frac{1}{m} \right) p = p_0 \quad (5)$$

とおけば

$$\Delta \phi = p_0 \quad (6)$$

(6) は板の問題の微分方程式と見做す事が出来る。即 (6) を満足し必要なる周邊條件を満足する解を求める事が必要となるが之は上に述べた様に一般には困難である。依て次の様な近似方法を行ふ。即 (6) の解を

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \sum_{\kappa=1}^n C_{\kappa} \varphi_{\kappa} \\ \Delta \varphi_{\kappa} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とする。但 ϕ_0 は (6) の一つの特解である。又 C_{κ} は常數である。

(7) の常數 C_{κ} を決定するため次の積分を考へる。

$$\varepsilon = \iint_F \left[\Delta w + \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m} \right)} (\phi + \sum C_\kappa \varphi_\kappa) \right]^2 dx dy \quad (8)$$

但この積分は板の全面に及ぼす。若し $\varepsilon = 0$ であれば近似解 ϕ は即正解となり最も宜敷いのであるが然らざる場合には $\varepsilon > 0$ である。従て ε が最小となる様に C_κ を選べば (6) は正解には非らざるも之に近い次善の解となるであらう。

倍撓み w は C_κ を含まず、依て $\delta \varepsilon = 0$ より任意の h に對して次の式を得る。

$$\iint \varphi_h \Delta w dx dy + \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \iint (\phi_0 + \sum C_\kappa \varphi_\kappa) \varphi_h dx dy = 0 \quad (9)$$

而して Green の積分定理に依り

$$\iint (\varphi_h \Delta w - w \Delta \varphi_h) dx dy = \oint \left(\varphi_h \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds \quad (10)$$

然るに固定周邊の場合には、周邊上では $w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ であるか、或は之等は既知である。又 $\Delta \varphi_h = 0$ であるから (9) の第一項は零か或は既知となる、即零の場合には

$$\left. \begin{aligned} \sum_\kappa C_\kappa \iint \varphi_\kappa \varphi_h dx dy + \iint \phi_0 \varphi_h dx dy &= 0 \\ h=1, 2, 3, \dots, \dots, x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

又周邊に於て w 及 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 等が與へられる場合には (11) の代りに

$$\sum_\kappa C_\kappa \iint \varphi_\kappa \varphi_h dx dy + \iint \phi_0 \varphi_h dx dy = - \oint \left(\varphi_h \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds \quad (12)$$

を用ひる。 $\phi_0 = 0$ とすれば Hengst¹⁾ が圓孔を有する板の平面應力を求めるために用ひた式となる。

斯くして C_κ を決定するための x 個の C_κ に關する一次の聯立方程式を得るから之を解いて C_κ を求むれば宜敷い。 C_κ が求まれば ϕ が求まる事になる。

ϕ より曲げモーメント従て應力を求むる方法は 6 及 7 で述べる.

次に板の一点 (x_0, y_0) に於ける撓みを求むるには次の様に考へる. 即板の歪エネルギーは今の場合

$$A_0 = \frac{N}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy \quad (13)$$

である.

今 (x_0, y_0) 点に仮想集中荷重 Q を作用させ Q のみに依る板の撓みを w_2 とする. 又板が実際に荷ふ荷重の總量を P と書き之に依つて生ずる撓み即板の實際の撓みを w_1 と書く, 然る時には P, Q が同時に作用した場合の歪エネルギーは

$$A = \frac{N}{2} \iint (\Delta w_1)^2 dx dy + \frac{N}{2} \iint (\Delta w_2)^2 dx dy + N \iint (\Delta w_1)(\Delta w_2) dx dy$$

この時 (x_0, y_0) 点の Q 方向の撓みは $\frac{\partial A}{\partial Q}$ で與へられる. 依て P のみに依る (x_0, y_0) 点の撓み δ は

$$\delta = \left(\frac{\partial A}{\partial Q} \right)_{Q=0} = N \iint (\Delta w_1)(\Delta w_{20}) dx dy \cong \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m} \right)^2} \iint \phi_1 \phi_{20} dx dy \quad (14)$$

となる. 但

$$w_{20} = \frac{1}{Q} w_2 \quad (15)$$

である. 又 ϕ_1 及 ϕ_{20} は Δw_1 及 Δw_{20} の近似値である.

若し與へられた荷重 P が (x_0, y_0) に於ける点荷重の場合にはこの点の撓みは $P=Q$ と置く事に依り

$$\delta = \frac{N}{P} \iint (\Delta w_1)^2 dx dy \cong \frac{1}{QN \left(1 + \frac{1}{m} \right)^2} \iint \phi^2 dx dy \quad (16)$$

となる.

次節に述べる様に ((21) 参照)

$$\frac{N}{2}\epsilon = \frac{N}{2}\beta^2 \iint (\phi_0 + \sum C_x \varphi_x)^2 dx dy - A \geq 0$$

となるから上に述べた Δw_1 を $\frac{\phi}{N(1+\frac{1}{m})}$ と見做す撓みの計算は眞の歪エネルギーより幾分大なるエネルギーを基礎とした事になるから (14) 及 (16) より導かれる撓みは眞の値より幾分大となる。

3. 本方法と歪エネルギー理論との関係

上に述べた近似方法が歪エネルギーの理論と如何なる関係があるかに就て考へるため先ず (8) を次の様に變形する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon = & \iint (\Delta w)^2 dx dy + 2\beta \iint [\phi_0 \Delta w + \Delta w \sum C_x \varphi_x] dx dy \\ & + \beta^2 \iint (\phi_0 + \sum C_x \varphi_x)^2 dx dy, \quad \beta = \frac{1}{(1+\frac{1}{m})N} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

然るに Green の積分定理に依り

$$\iint (\phi_0 \Delta w - w \Delta \phi_0) dx dy = \oint \left(\phi_0 \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) ds = 0$$

依て $\Delta \phi_0 = p_0$ に注意すれば

$$\iint \phi_0 \Delta w dx dy = \iint w \Delta \phi_0 dx dy = -\frac{1}{\beta N} \iint p w dx dy \quad (18)$$

又 (10) からは

$$\iint \varphi_x \Delta w dx dy = 0$$

依て (17) は次の様になる。

$$\epsilon = \iint (\Delta w)^2 dx dy - \frac{2}{N} \iint p w dx dy + \beta^2 \iint (\phi_0 + \sum C_x \varphi_x)^2 dx dy \quad (19)$$

然るに彎曲を受ける板の歪エネルギーは

$$A = \frac{N}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy - \left(1 - \frac{1}{m}\right) N \oint \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) ds \quad (20)$$

となる。²⁾ 而して固定周邊の場合 (20) の右邊の第 2 項は零となり且

$A = \frac{1}{2} \iint pw \, dx dy$ であるから (17) は次の様になる.

$$\frac{N}{2} \varepsilon = \frac{N}{2} \beta^2 \iint (\phi_0 + \sum C_n \varphi_n)^2 \, dx dy - A \quad (21)$$

依て曲げモーメントの和 $(\phi_0 + \sum C_n \varphi_n)$ に對する撓みを w_a とし且この時の歪エネルギーを A_a とすれば $(\phi_0 + \sum C_n \varphi_n)$ が正解でないため周邊には多少の傾き並に撓みが残ると考へねばならぬ従て (20) より

$$A_a = \frac{N}{2} \beta^2 \iint (\phi_0 + \sum C_n \varphi_n)^2 \, dx dy - \left(1 - \frac{1}{m}\right) N \oint \frac{dw_a}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w_a}{\partial y} \right) ds$$

従て

$$\frac{N}{2} \varepsilon = (A_a - A) + \left(1 - \frac{1}{m}\right) N \oint \frac{\partial w_a}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w_a}{\partial y} \right) ds. \quad (22)$$

即 ε を最小にする事は (7) が近似値である爲に生ずる板周邊の固定の不完全さを完全固定の状態に近ずける事を意味する事になる.

4. 一様分布荷重の場合

板の全面に一様に分布する荷重が加はる場合には (6) の特解 ϕ_0 は

$$\phi_0 = \frac{p_0}{4} r^2 = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p r^2 \quad (23)$$

となるから (7) より

$$\phi = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p r^2 + \sum C_n \varphi_n \quad (24)$$

従て (11) より

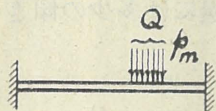
$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \iint \varphi_n \varphi_n \, dx dy &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p \iint r^2 \varphi_n \, dx dy \\ h &= 1, 2, 3, \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

之より C_n が決定出来る. 但 (25) の積分は板の全面に及ぼすものである.

5. 点荷重 (集中荷重) の場合

板に加はる荷重が一点に集中する Q なる大きさの点荷重の場合には次の様に

考へれば宜敷い.. 即先ず荷重 Q は其作用点を中心とする半径 r_0 (r_0 は微小) の圓面上に一様に分布するものと考えゐる. 次にこの圓の中心を坐標軸の原点とし $r \geq r_0$ の板の部分には荷重は無いとして板を $r=r_0$ を境として二つの部分に分ける (第 1 圖). 然る時には



第 1 圖

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi_1 &= 0 & \Gamma_1 \text{ の部分 (無荷重)} \\ \Delta\phi_2 &= p_0 & \Gamma_2 \text{ の部分 } (r \leq r_0 \text{ の部分}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

但

$$p_0 = -\left(1 + \frac{1}{m}\right)p_m, \quad p_m = \frac{Q}{\pi r_0^2} \quad (27)$$

(26) の解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= C_0' + C_1' \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum C_n \varphi_n \\ \phi_2 &= \frac{p_0}{4} r^2 + \sum C_n \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

但 φ_n は前と同様に調和函数である.

C_0' , C_1' を決定するため $r=r_0$ に於ける條件を考へる. 即 $r=r_0$ では撓み w 及其切線の連續が必要である他に ϕ_1 より導かれる曲げモーメント m_r 及び m_t が ϕ_2 より導かれる夫れ等と相等しい事が必要である. 然るに $r_0 \rightarrow 0$ では $m_r = m_t = \infty$ となるから充分小なる r_0 に對しては $m_r = m_t = \frac{1}{2} \phi$ と考へられる. 依て $r=r_0$ に於て ϕ が満足すべき條件は

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (r=r_0) \quad (29)$$

之が充分なる條件である.

又 $r \geq r_0$ の部分では荷重は作用しないからこの部分の任意の半径の圓圍上で剪斷力に關し次の式が成立する

$$-N \oint \frac{\partial w_1}{\partial r} ds = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \oint \frac{\partial \phi_1}{\partial r} ds = -Q \quad (30)$$

但 s は今考へてゐる圓周上に於ける微小長さであつて積分はこの圓周上を一周する.

若し φ_k が積分路内の至る所で正則調和函数であれば Green の定理より

$$\oint \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} ds = \iint \Delta \varphi_k dx dy = 0$$

となるが $\varphi_0 = \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$ に対しては

$$\oint \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} ds = 2\pi$$

となる。依て (29) 及 (30) の条件を満足するためには

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q - \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum_k C_k \varphi_k \\ \phi_2 &= \frac{p_0}{4} r^2 + \sum_k C_k \varphi_k \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となる。

C_k は次に示す積分 ε が最小になる様を選ぶ事前の場合と同様である。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \iint_{\Gamma_1} \left[\Delta w_1 + \frac{m}{N(m+1)} \left\{ -\frac{m+1}{4\pi m} Q - \frac{m+1}{2\pi m} Q \log\left(\frac{r}{r_0}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_k C_k \varphi_k \right\} \right]^2 dx dy + \iint_{\Gamma_2} \left[\Delta w_2 + \frac{m}{N(m+1)} \left\{ \frac{p_0}{4} r^2 + \sum_k C_k \varphi_k \right\} \right]^2 dx dy \end{aligned} \quad (32)$$

依て $\delta\varepsilon = 0$ より任意の h に対して次の式を得る。

$$\begin{aligned} &\iint_{\Gamma_1} \varphi_h \Delta w_1 dx dy + \iint_{\Gamma_2} \varphi_h \Delta w_2 dx dy - \frac{Q}{4N} \iint_{\Gamma_1} \left(1 + 2 \log \frac{r}{r_0}\right) \varphi_h dx dy \\ &+ \frac{mp_0}{N(m+1)} \iint_{\Gamma_2} \frac{p_0}{4} r^2 dx dy + \frac{m}{N(m+1)} \sum_k C_k \iint_{\Gamma_1} \varphi_h \varphi_k dx dy \\ &+ \frac{m}{N(m+1)} \sum_k C_k \iint_{\Gamma_2} \varphi_h \varphi_k dx dy = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

然るに Green の定理に依り、 $\Delta \varphi_h = 0$ で且外圍 s_1 では $w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0$ であるから

$$\iint_{\Gamma_1} \varphi_h \Delta w_1 dx dy = \iint_{\Gamma_1} (\varphi_h \Delta w_1 - w_1 \Delta \varphi_h) dx dy = \oint_{s_2} \left(\varphi_h \frac{\partial w_1}{\partial n} - w_1 \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds$$

$$\iint \varphi_h \Delta w_2 dx dy = \oint_{s_2} \left(\varphi_h \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds$$

又 $r=r_0$ では $w_1=w_2$, $\frac{\partial w_1}{\partial r}=\frac{\partial w_2}{\partial r}$ であるから

$$\iint_{\Gamma_1} \varphi_h \Delta w_1 dx dy + \iint_{\Gamma_2} \varphi_h \Delta w_2 dx dy = 2 \oint_{s_2} \left(\varphi_h \frac{\partial w_1}{\partial n} - w_1 \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds$$

然るに φ_h , $\frac{\partial \varphi_h}{\partial n}$, w_1 及 $\frac{\partial w_1}{\partial n}$ は $r=0$ で正則であるから

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{s_2} \left(\varphi_h \frac{\partial w_1}{\partial n} - w_1 \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds = 0$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \iint_{\Gamma_2} \frac{p_0}{4} r^2 \varphi_h dx dy = 0$$

依て (33) より

$$\sum_x C_x \iint \varphi_h \varphi_x dx dy = \frac{m+1}{4\pi m} Q \left[(1-2 \log r_0) \iint \varphi_h dx dy + 2 \iint \varphi_h \log r dx dy \right] \quad (34)$$

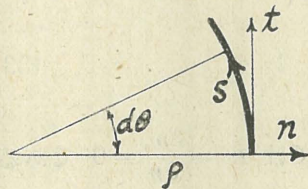
$h=1, 2, 3, \dots, \infty$

之より C_x が決定される。但積分は何れも板の全面に及ぼす。

6. 固定周邊の曲げモーメント

一点に於ける二つの直角方向の曲げモーメントの和は ϕ に比例する。依つて上に述べた方法にて ϕ を求むれば之より固定周邊の曲げモーメントは次の様にして求まる。

今周邊の ϕ を ϕ_R と記せば



第 2 圖

$$\phi_R = -N \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (35)$$

但 n は周邊に於ける法線方向で t は切線方向である (第 2 圖)

然るに第 2 圖に於て

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \quad (36)$$

となるが固定周辺の場合には $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ であるから

$$\phi_R = -N \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \quad (37)$$

然るに周辺に於ける $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ は既知である。若し周辺が一平面上にあれば

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \text{ となる。}$$

依て今周辺の $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ を $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)_R$ と書き

$$-N \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)_R = m_0 \quad (38)$$

と置けば周辺に於て周辺に沿ふ方向に作用する曲げモーメント m_n は

$$m_n = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = \frac{m}{m+1} \phi_R - \frac{m-1}{m+1} m_0 \quad (39)$$

又 m_n と直角方向に作用する曲げモーメント m_t は

$$m_t = \phi_R - m_n = \frac{1}{m+1} \phi_R + \frac{m-1}{m+1} m_0 \quad (40)$$

特に $m_0 = 0$ であれば、即周辺が同一平面上にある場合には

$$\left. \begin{aligned} m_n &= \frac{m}{1+m} \phi_R \\ m_t &= \frac{1}{1+m} \phi_R \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

即明かに $|m_n| > |m_t|$ である。

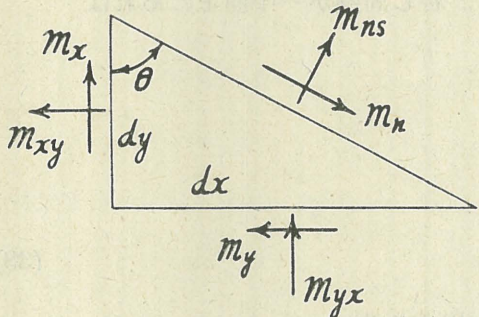
7. 正多角形板の中心に起るモーメント

一様分布荷重を荷ふ正多角形板の中心に生ずる曲げモーメントは $\frac{1}{2}(\phi)_{r=0}$ となる事を下に示す。第 3 圖を板の微小なる部分とすれば平衡の條件から

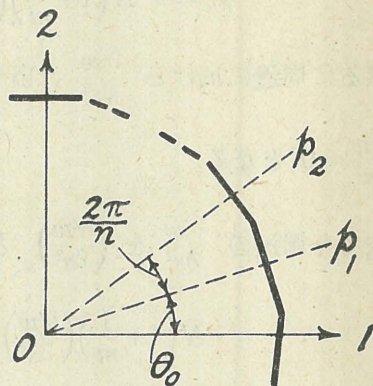
$$\left. \begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2 \theta + m_y \sin^2 \theta + m_{xy} \sin 2\theta \\ m_{ns} &= \frac{1}{2} (m_y - m_x) \sin 2\theta + m_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

この式から明かなる如く $m_{ns} = 0$ となる θ では m_n が最小或は最大となる。

斯の如き方向を 1 及 2 なる方向と呼び 1 及 2 の方向の曲げモーメントを夫れ夫れ m_1 及 m_2 と書けば斯の如き方向と θ なる傾を持つ面に作用する曲げモーメント m_n 及捩りモーメント m_{ns} は



第 3 圖



第 4 圖

$$\left. \begin{aligned} m_n &= m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta = (m_1 - m_2) \cos^2 \theta + m_2 \\ m_{ns} &= \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

正多角形の中心 O に於て (第 4 圖) 荷重が中心に對し對稱の場合には Op_1 の方向の曲げモーメントは Op_2 の方向に作用する曲げモーメントと相等しき筈であるから

$$m_{Op_1} = (m_1 - m_2) \cos^2 \theta_0 + m_2 = m_{Op_2} = (m_1 - m_2) \cos^2 \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{n} \right) + m_2$$

之より

$$m_1 = m_2$$

$$\text{依て} \quad m_n = m_1 = m_2 \quad (44)$$

となり二つの直角方向の曲げモーメントは互に相等しい。従て斯る点では

$$m_n = \frac{1}{2} \phi \quad (45)$$

となる。

板の任意の点に於て $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} > 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} > 0$ であれば (但 n 及 s は上記 1 及 2 の方向である) 其点に於ける最大曲げモーメント $m_{\max}$ はポアソン數 m を

$m = \frac{10}{3}$ とすれば

$$\frac{\phi_1}{1.3} \geq m_{\max} \geq \frac{\phi_1}{2} \quad (46)$$

となる事は容易に證明出来る但 ϕ_1 は考へつゝある点の ϕ の値である.

8. 撓 み

任意の一点 (x_0, y_0) に於ける撓みを求むる一般の方法は 2 に述べた通りである. 而して 4 及 5 にて述べた方法に依つて ϕ が求まる故撓みは次の様になる, 即

a) 一様分布荷重の場合:

$$\delta = \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2} \iint \phi_1 \phi_{20} dx dy \quad (47)$$

但 ϕ_1 は一様分布荷重の場合の ϕ で ϕ_{20} は (x_0, y_0) に單位大さの集中荷重が作用した場合の ϕ である.

b) 又一点 (x_0, y_0) に集中荷重 Q が作用する場合の該点の撓みは

$$\delta = \frac{1}{Q \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2} \iint \phi_2^2 dx dy \quad (48)$$

但 ϕ_2 は (x_0, y_0) に集中荷重が作用する場合の ϕ である.

2 にて述べた様に (47) 及 (48) の δ は眞の値に等しいか或は眞の値より幾分大となる.

II. 應 用 例

9. 圓 板 (半徑 l)

a) 一様分布荷重の場合: (24) 及 (25) より

$$\phi = C_0 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p r^2$$

$$C_0 \iint dx dy = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p \iint r^2 dx dy \quad \text{従て} \quad C_0 = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2$$

$$\text{依て} \quad = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2 \left[1 - 2 \left(\frac{r}{l}\right)^2\right] \quad (49)$$

板中心の曲げモーメントは (45) より $\frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2$ となり又固定周縁の曲げモーメントは (41) より $m_{\max} = -\frac{1}{8} p l^2$ となる. 之等は何れも正しい値である.

b) 中心に点荷重 Q を受ける場合: 集中荷重を Q とすれば (31) 及 (34) より

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q - \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \log \left(\frac{r}{r_0}\right) + C_0$$

$$C_0 \iint dxdy = \frac{1+m}{4\pi m} Q \left[(1 - 2 \log r_0) \iint dxdy + 2 \iint \log r dxdy \right]$$

之より

$$C_0 = \frac{1+m}{4\pi m} Q 2 \log \frac{l}{r_0}$$

依て

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \left[2 \log \left(\frac{l}{r}\right) - 1 \right] \quad (50)$$

従て板縁の最大曲げモーメント $(m_n)_{\max}$ は (41) より $(m_n)_{\max} = -\frac{Q}{4\pi}$ となり正確なる値が得られる.

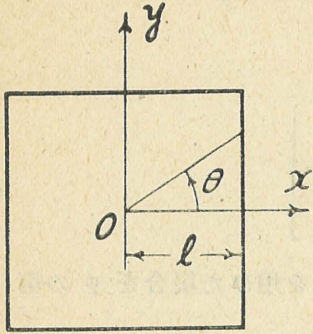
偕板中心の撓みを求むるには (47), (48), (49) 及 (50) を用ひる. 即ち一様分布荷重の場合:

$$\delta = \frac{p l^2}{32\pi N} \iint \left[1 - 2 \left(\frac{r}{l}\right)^2 \right] \left[2 \log \left(\frac{l}{r}\right) - 1 \right] dxdy = \frac{p l^4}{64 N} \quad (51)$$

又中心集中荷重の場合には (48) を用ひて

$$\delta = \frac{Q}{16\pi^2 N} \iint \left[2 \log \left(\frac{l}{r}\right) - 1 \right]^2 dxdy = \frac{Q l^2}{16\pi N} \quad (52)$$

(51) 及 (52) は何れも正確なる値である.

10. 正 方 形 板 (一 邊 の 長 さ l)


第 5 圖

本方法が如何なる程度の近似値を與へるかを見るため正確なる値が既知なる正方形板の場合を考へて見る。(坐標其他に就ては第 5 圖參照のこと)

a) 一様分布荷重の場合 (荷重密度 p):

先ず

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m} \right) p r^2 + \sum C_n \varphi_n \\ \sum C_n \varphi_n &= C_0 + C_1 r^4 \cos 4\theta + C_2 r^8 \cos 8\theta \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

とおけば (25) より $K = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{m} \right) p$ において C_n を決定すべき次の式を得る.

$$\left. \begin{aligned} C_0 \iint dx dy + C_1 \iint r^4 \cos 4\theta dx dy + C_2 \iint r^8 \cos 8\theta dx dy &= K \iint r^2 dx dy \\ C_0 \iint r^4 \cos 4\theta dx dy + C_1 \iint r^8 \cos^2 4\theta dx dy + C_2 \iint r^{12} \cos 4\theta \cos 8\theta dx dy \\ &= K \iint r^6 \cos 4\theta dx dy \\ C_0 \iint r^8 \cos 8\theta dx dy + C_1 \iint r^{12} \cos 8\theta \cos 4\theta dx dy + C_2 \iint r^{16} \cos^2 8\theta dx dy \\ &= K \iint r^{10} \cos 8\theta dx dy \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

之等の積分は板の全面に及ぶのであるが今の場合には $\theta = 0$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ に亘る $\frac{1}{8}$ の部分に亘つて行へば足りる. 即

$$\iint dx dy = \frac{l^2}{2}, \quad \iint r^4 \cos 4\theta dx dy = -\frac{2}{15} l^6, \quad \iint r^8 \cos 8\theta dx dy = 0.177778 l^{10},$$

$$\iint r^2 dx dy = \frac{1}{3} l^4, \quad \iint r^8 \cos^2 4\theta dx dy = 0.299683 l^{10},$$

$$\iint r^{12} \cos 4\theta \cos 8\theta dx dy = -0.49941 l^{14}, \quad \iint r^6 \cos 4\theta dx dy = -0.190476 l^8,$$

$$\iint r^{16} \cos^2 8\theta \, dx dy = 1.33117 l^{18}, \quad \iint r^{10} \cos 8\theta \, dx dy = 0.290908 l^{12}$$

之等を (54) に代入すれば次の三式を得る

$$\left. \begin{aligned} C_0 - 0.26667 C_1 l^4 + 0.35556 C_2 l^8 &= 0.6667 K l^2 \\ -C_0 + 2.24762 C_1 l^4 - 3.74560 C_2 l^8 &= -1.4286 K l^2 \\ C_0 - 2.80920 C_1 l^4 + 7.48780 C_2 l^8 &= 1.6364 K l^2 \end{aligned} \right\}$$

今 $\sum C_n \varphi_n$ として $x=0$ とした場合即 C_0 のみを用いた場合を ϕ の第 1 近似 C_0, C_1 を用いた場合を第 2 近似等と呼ばば

第 1 近似:

$$\phi = -\left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l}\right)^2 - 0.1667 \right]$$

第 2 近似:

$$\phi = -\left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l}\right)^2 - 0.1410 + 0.09615 \left(\frac{r}{l}\right)^4 \cos 4\theta \right]$$

第 3 近似:

$$\begin{aligned} \phi = -\left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2 &\left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l}\right)^2 - 0.1410 + 0.09744 \left(\frac{r}{l}\right)^4 \cos 4\theta \right. \\ &\left. + 0.000737 \left(\frac{r}{l}\right)^8 \cos 8\theta \right] \end{aligned} \quad (54)$$

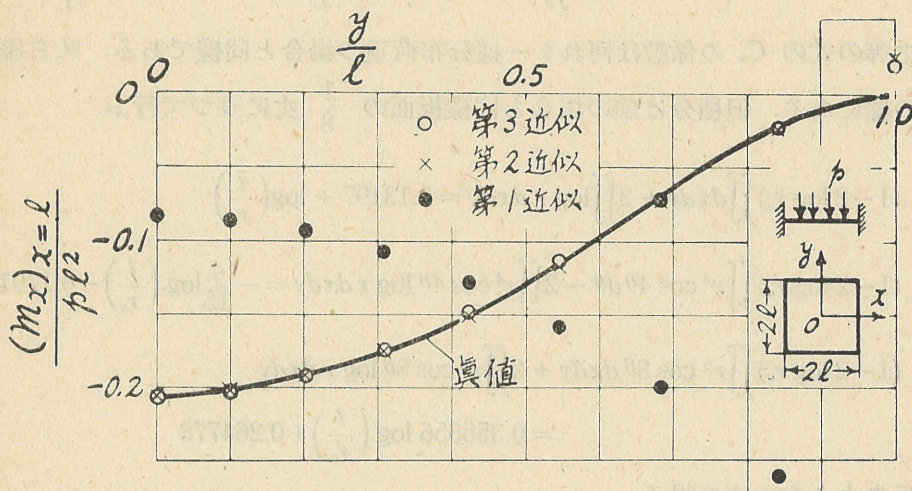
等となる。

之等の ϕ を用ひ (41) 及 (45) から求められる板周邊の最大モーメント及板中心の曲げモーメントは第 1 表に示す様になり第 3 近似に於て充分正確である事が判る。(但 $m = \frac{10}{3}$)

第 1 表 一様分布荷重を受ける正方形板 (第 5 圖)

曲げモーメント $p l^2$	第 1 近似	第 2 近似	第 3 近似	正確なる値 3), 4)
$(m_x)_{y=0}^{x=l}$	-0.083	-0.205	-0.207	-0.205
$(m_x)_{y=0}^{x=0}$	0.1084	0.0917	0.0916	0.0919

又周邊 $x=l$ に於ける m_n の變化の有様を第 6 圖に示す. 第 2 近似及第 3 近似は眞値と非常に良く一致してゐる.



第 6 圖 一様分布荷重を受ける正方形板

b) 中心に点荷重を受ける場合 (荷重 Q):

次に正方形板 (第 5 圖) の中心に点荷重が加はる場合を考へて見よう.

先ず ϕ を次の様を選ぶ.

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q - \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \log \left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum C_n \varphi_n \\ \sum C_n \varphi_n &= C_0 + C_1 r^4 \cos 4\theta + C_2 r^8 \cos 8\theta \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

C_n を決定するには (34) より導かれる下の式を用られば宜敷い

$$\begin{aligned} & C_0 \iint dx dy + C_1 \iint r^4 \cos 4\theta dx dy + C_2 \iint r^8 \cos 8\theta dx dy \\ &= K \left[(1 - 2 \log r_0) \iint dx dy + 2 \iint \log r dx dy \right] \\ & C_0 \iint r^4 \cos 4\theta dx dy + C_1 \iint r^8 \cos^2 4\theta dx dy + C_2 \iint r^{12} \cos 8\theta \cos 4\theta dx dy \\ &= K \left[(1 - 2 \log r_0) \iint r^4 \cos 4\theta dx dy + 2 \iint r^4 \cos 4\theta \log r dx dy \right] \end{aligned}$$

$$C_0 \iint r^8 \cos 8\theta \, dx dy + C_1 \iint r^{12} \cos 8\theta \cos 4\theta \, dx dy + C_2 \iint r^{16} \cos^2 8\theta \, dx dy \\ = K \left[(1-2 \log r_0) \iint r^8 \cos 8\theta \, dx dy + 2 \iint r^8 \cos 8\theta \log r \, dx dy \right]$$

之等の式の C_x の係数は何れも一様分布荷重の場合と同様である。又右邊は次の様になる。但積分は前の場合と同様板面の $\frac{1}{8}$ 丈に亘つて行ふ。

$$(1-2 \log r_0) \iint dx dy + 2 \iint \log r \, dx dy = 0.13197 + \log \left(\frac{l}{r_0} \right)$$

$$(1-2 \log r_0) \iint r^4 \cos 4\theta \, d\theta + 2 \iint r^4 \cos 4\theta \log r \, dx dy = -\frac{4}{15} \log \left(\frac{l}{r_0} \right) - 0.179106$$

$$(1-2 \log r_0) \iint r^8 \cos 8\theta \, dx dy + 2 \iint r^8 \cos 8\theta \log r \, dx dy \\ = 0.355556 \log \left(\frac{l}{r_0} \right) + 0.264778$$

依て之より次の式を得る。

第 1 近似：

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q \left[0.7361 - 2 \log \left(\frac{l}{r} \right) \right]$$

第 2 近似：

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q \left[0.8814 - 2 \log \left(\frac{l}{r} \right) + 0.54487 \left(\frac{r}{l} \right)^4 \cos 4\theta \right]$$

第 3 近似：

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q \left[0.8872 - 2 \log \left(\frac{l}{r} \right) + 0.64327 \left(\frac{r}{l} \right)^4 \cos 4\theta \right. \\ \left. + 0.05750 \left(\frac{r}{l} \right)^8 \cos 8\theta \right] \quad (56)$$

之等の ϕ より求めた板周邊中央の曲げモメント $(m_x)_{y=0}^x=l$ 及固定周邊に沿ふての m_x の變化の有様を第 2 表及第 7 圖に示す。a) の場合と同様この場合にも第 3 近似に於て充分正確なる値が得られる事を知る。

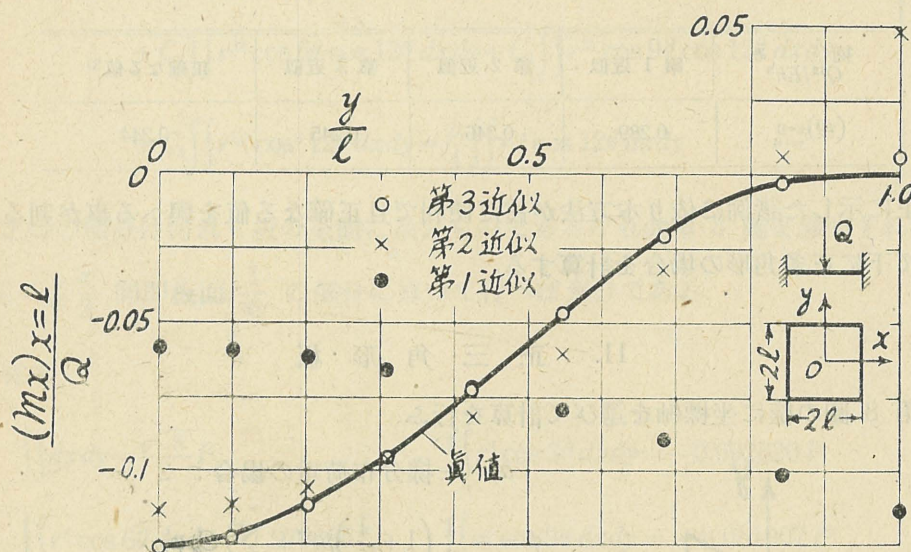
次に上の二つの場合の板中心の撓みを求める。

即一様分布荷重の場合には (54) 及 (56) を (47) に代入すれば宜敷い譯である

がこの時新に次の積分が必要となる。

第 2 表 中心に集中荷重を受ける正方形板

曲げモーメント Q	第 1 近似	第 2 近似	第 3 近似	正確なる値 ⁴⁾
$(m_x)_{x=l, y=0}$	-0.0586	-0.1135	-0.1264	-0.1257



第 7 圖 中心に集中荷重を受ける正方形板

$$\iint r^2 \log r \, dx \, dy = \frac{l^4}{3} \log l - 0.031353 l^4,$$

依て (47) より $m = \frac{10}{3}$ とすれば

$$\delta = \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2} \iint \phi_1 \phi_{20} \, dx \, dy = \frac{8pl^4}{4\pi N} 0.03179 = 0.2210 \frac{pl^4}{Eh^3} \quad (57)$$

而して正確なる値は 0.2208⁴⁾ である。

又中央に点荷重が作用する場合には (56) を (48) に代入して求むるがこの時次の積分が必要である。

之等の數値を用ひて (59) より C_x を決定する事が出来る. この時 C_0 のみを用ひた場合を第 1 近似, C_0, C_1 を用ひた場合を第 2 近似等と呼ばば

第 3 近似:

$$\phi = - \left(1 + \frac{1}{m} \right) pl^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 0.150989 + 0.134140 \left(\frac{r}{l} \right)^3 \cos 3\theta + 0.0036316 \left(\frac{r}{l} \right)^6 \cos 6\theta \right]$$

第 5 近似:

$$\phi = - \left(1 + \frac{1}{m} \right) pl^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 0.150938 + 0.13466 \left(\frac{r}{l} \right)^3 \cos 3\theta + 0.003970 \left(\frac{r}{l} \right)^6 \cos 6\theta + 0.00004019 \left(\frac{r}{l} \right)^9 \cos 9\theta - 0.0000007757 \left(\frac{r}{l} \right)^{12} \cos 12\theta \right] \quad (60)$$

第 4 表に板周邊の最大曲げモーメント及び板中心の曲げモーメントを示す.

第 4 表 一様分布荷重を受ける正三角形板

曲げモーメント pl^4	第 3 近似	第 5 近似
$(m_x)_{x=l, y=0}$	0.2368	0.2377
$(m_x)_{x=0, y=0}$	0.1963	0.1962

第9圖には周邊上の曲げモーメントを示す.

b) 中心點荷重の場合:

この場合の ϕ を次の様を選ぶ

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q - \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q \log \left(\frac{r}{r_0} \right) + \sum C_x \varphi_x \quad (61)$$

$$\sum C_x \varphi_x = C_0 + C_1 r^3 \cos 3\theta + C_2 r^6 \cos 6\theta + C_3 r^9 \cos 9\theta + C_4 r^{12} \cos 12\theta$$

従て C_x を決定すべき式は (34) にて $K = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q$ とすれば

即

$$(1-2\log r_0) \iint r^n \cos n\theta \, dx dy + 2 \iint r^n \cos n\theta \log r \, dx dy \\ = a_n \iint r^n \cos n\theta \, dx dy$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -2 \log \left(\frac{r_0}{l} \right) + 0.59550 \\ a_3 &= 2 \log \left(\frac{r_0}{l} \right) - 1.7771 \\ a_6 &= -2 \log \left(\frac{r_0}{l} \right) + 2.0098 \\ a_9 &= 2 \log \left(\frac{r_0}{l} \right) - 2.11313 \\ a_{12} &= -2 \log \left(\frac{r_0}{l} \right) + 2.17184 \end{aligned} \right\}$$

(62) の左邊の積分は已に前に記した通りである。

前の場合と同様に C_0 のみを含む場合を ϕ の第 1 近似 C_3 迄含むものを第 4 近似等と呼ばば第 4 近似は

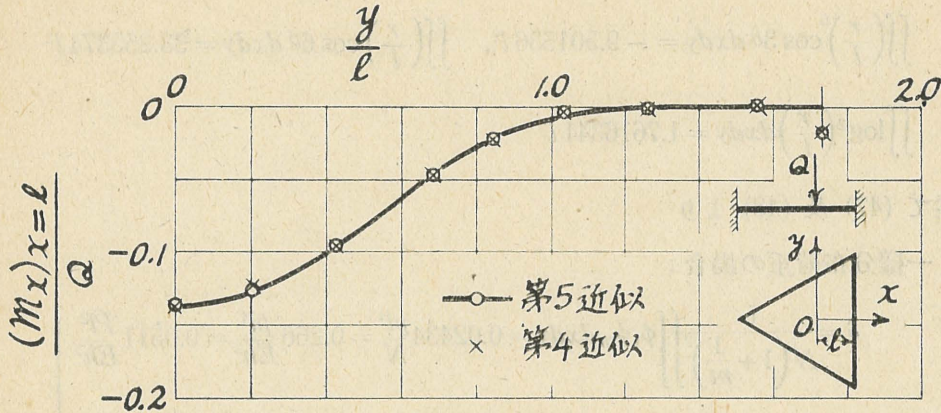
$$\left. \begin{aligned} \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) & \left[0.82787 + 2 \log \left(\frac{r}{l} \right) + 0.7770 \left(\frac{r}{l} \right)^3 \cos 3\theta \right. \\ & \left. + 0.11504 \left(\frac{r}{l} \right)^6 \cos 6\theta + 0.006956 \left(\frac{r}{l} \right)^9 \cos 9\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

又第 5 近似は

$$\left. \begin{aligned} \phi = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q & \left[0.8279 + 2 \log \left(\frac{r}{l} \right) + 0.7750 \left(\frac{r}{l} \right)^3 \cos 3\theta \right. \\ & + 0.11245 \left(\frac{r}{l} \right)^6 \cos 6\theta + 0.006104 \left(\frac{r}{l} \right)^9 \cos 9\theta \\ & \left. + 0.00007765 \left(\frac{r}{l} \right)^{12} \cos 12\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

第 10 圖に $x=l$ なる板周邊の曲げモーメント $(m_x)_{x=l}$ の値を示す。而して其

最大値は $(m_x)_{x=l} = -0.1370 Q$ である。



第 10 圖 中心に集中荷重を受ける正三角形板

c) 撓 み:

已に一樣分布荷重と中心點荷重の場合の ϕ が求まつたから板の中心點の撓みは (47) 及 (48) から容易に求める事が出来る。而してこの場合 ϕ_1 及 ϕ_2 としては (60) 及 (64) を用ひる但 (60) 及 (64) の式に於て r^9 以上は省略しても撓みの計算には支障ないと思はれるので次の ϕ を用ひた。

即一樣分布の場合には

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -\left(1 + \frac{1}{m}\right) p l^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l}\right)^2 - 0.15094 + 0.13466 \left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\theta \right. \\ &\quad \left. + 0.003970 \left(\frac{r}{l}\right)^6 \cos 6\theta \right] \\ \phi_2 &= -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \left[0.8279 + 2 \log \left(\frac{r}{l}\right) + 0.7750 \left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\theta \right. \\ &\quad \left. + 0.11245 \left(\frac{r}{l}\right)^6 \cos 6\theta \right] \end{aligned} \right\}$$

又中心點荷重の場合に對しては上の ϕ_2 中に更に $0.006104 \left(\frac{r}{l}\right)^9 \cos 9\theta$ なる項を追加したものを用ひた。

この時新に出て来る積分は次の通りである。

$$\iint \left(\frac{r}{l}\right)^2 dx dy = 5.196153,$$

$$\iint \left(\frac{r}{l}\right)^2 \log\left(\frac{r}{l}\right) dx dy = 0.751781 l^2,$$

$$\iint \left(\frac{r}{l}\right)^5 \cos 3\theta dx dy = -9.501536 l^2,$$

$$\iint \left(\frac{r}{l}\right)^8 \cos 6\theta dx dy = 33.255374 l^2$$

$$\iint \log^2\left(\frac{r}{l}\right) dx dy = 1.7616341 l^2$$

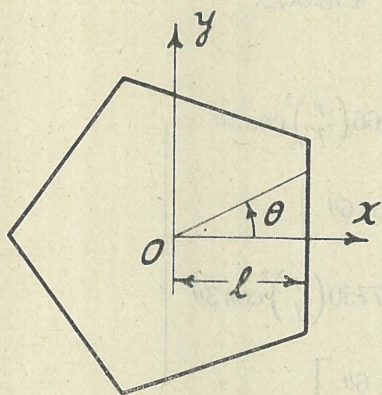
従て (47) 及 (48) より

一様分布荷重の場合：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{N\left(1+\frac{1}{m}\right)^2} \iint \phi_1 \phi_{20} dx dy = 0.02434 \frac{Pl^4}{N} = 0.266 \frac{Pl^4}{Eh^3} = 0.0511 \frac{Pl^2}{Eh^3} \\ \delta &= \frac{1}{Q\left(1+\frac{1}{m}\right)^2} \iint \phi_2^2 dx dy = 0.03131 \frac{Ql^2}{N} = 0.342 \frac{Ql^2}{Eh^3} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

但 P は分布荷重の全量である。

12. 正五角形板



第 11 圖

a) 一様分布荷重の場合：

第 11 圖の如く坐標軸を選ぶ。

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right)pr^2 + C_0 + C_1 r^5 \cos 5\theta \\ &\quad + C_2 r^{10} \cos 10\theta \end{aligned} \quad (66)$$

この場合には板の $\frac{1}{10}$ の部分に就て積分を行へば宜敷い。即 (25) の C_k を決定すべき式中に表はれる積分の値は次の様になる。

$$\iint dx dy = 0.363271 l^2,$$

$$\iint r^5 \cos 5\theta dx dy = -0.0499141 l^7$$

$$\iint r^{10} \cos 10\theta dx dy = 0.0458260 l^{12},$$

$$\iint r^2 dx dy = 0.213595 l^4$$

$$\iint r^{10} \cos^2 5\theta \, dx dy = 0.104468 l^{12}, \quad \iint r^{15} \cos 5\theta \cos 10\theta \, dx dy = -0.107980 l^{17}$$

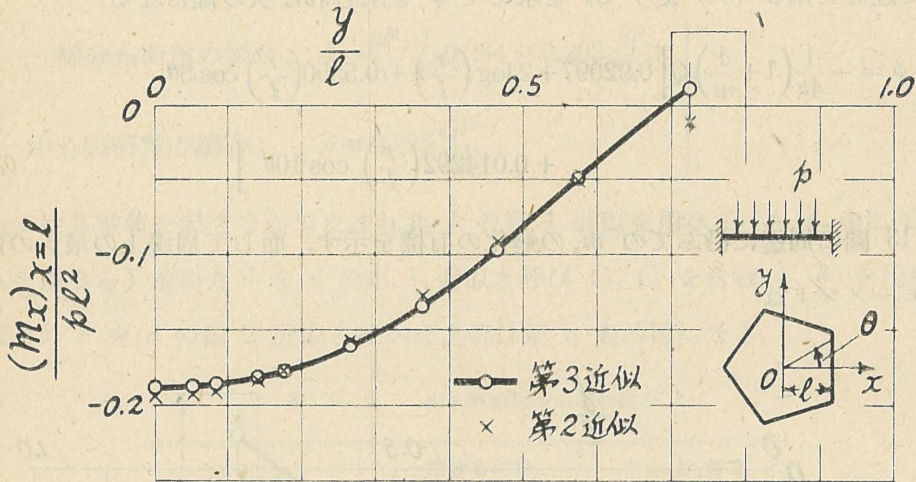
$$\iint r^7 \cos 5\theta \, dx dy = -0.06112419 l^9, \quad \iint r^{20} \cos^2 10\theta \, dx dy = 0.236116 l^{22}$$

$$\iint r^{12} \cos 10\theta \, dx dy = 0.0618594 l^{14}$$

之等を用ふれば

$$\phi = - \left(1 + \frac{1}{m} \right) pl^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 0.13598 + 0.07849 \left(\frac{r}{l} \right)^5 \cos 5\theta - 0.0036850 \left(\frac{r}{l} \right)^{10} \cos 10\theta \right] \quad (67)$$

第 12 圖には固定周邊に於ける m_x を示す。而して最大のモーメントは



第 12 圖 一様分布荷重を受ける正五角形板

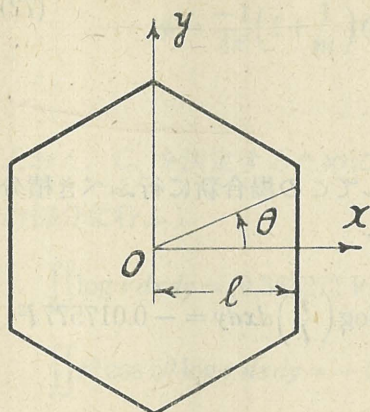
$$(m)_{\max} = (m_x)_{x=l} = -0.189 pl^2 \quad (68)$$

又板の中心では $m = \frac{10}{3}$ とすれば

$$(m_x)_{x=0} = \frac{1}{2} (\phi)_{x=0} = 0.0884 pl^2 \quad (69)$$

となる。

b) 中心点荷重の場合：



第 14 圖

一様分布荷重の場合には

$$\phi = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right)pr^2 + C_0 + C_1 r^6 \cos 6\theta + C_2 r^{12} \cos 12\theta \quad (74)$$

とおき板面の $\frac{1}{12}$ に就て積分を行ふ事にする。

即

$$\iint dxdy = 0.288675 l^2,$$

$$\iint r^2 dxdy = 0.160375 l^4$$

$$\iint r^6 \cos 6\theta dxdy = -0.024438 l^8, \quad \iint r^{12} \cos 12\theta dxdy = 0.017824 l^{14}$$

$$\iint r^{12} \cos^2 6\theta dxdy = 0.0528059 l^{14}, \quad \iint r^{18} \cos 6\theta \cos 12\theta dxdy = -0.0389675 l^{20}$$

$$\iint r^8 \cos 6\theta dxdy = -0.0278775 l^{10}, \quad \iint r^{24} \cos^2 12\theta dxdy = 0.0813711 l^{26}$$

$$\iint r^{14} \cos 12\theta dxdy = 0.0218837 l^{16}.$$

之等を用ひて C_0, C_1 等を計算し ϕ の第 3 近似を求むれば次の様になる

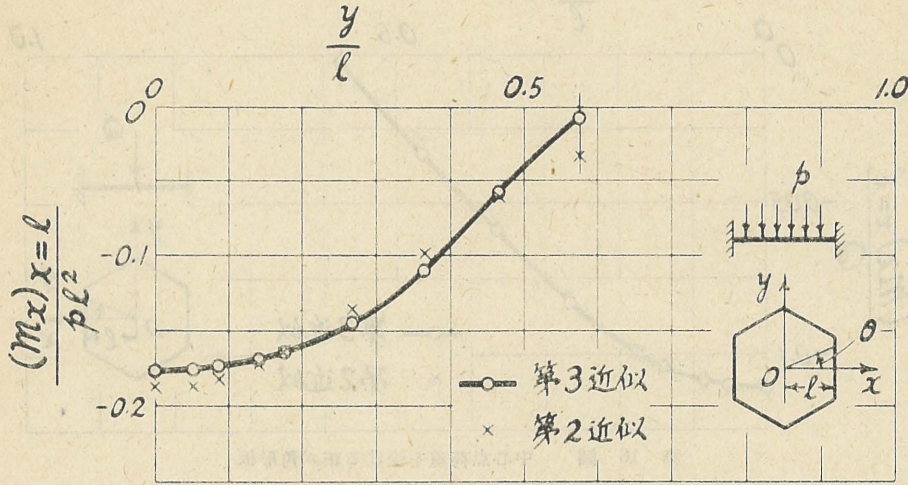
$$\phi = -\left(1+\frac{1}{m}\right)pl^2 \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2 - 0.13293 + 0.06547\left(\frac{r}{l}\right)^6 \cos 6\theta - 0.006763\left(\frac{r}{l}\right)^{12} \cos 12\theta \right] \quad (75)$$

第 15 圖に一邊上の m_x の値を示す。又第 6 表には第 1 近似, 第 2 近似及第 3 近似に依る周邊の最大曲げモーメント及 (45) より計算される板中心の

第 6 表 一様分布荷重を受ける正六角形板

曲げモーメント pl^2	第 1 近似	第 2 近似	第 3 近似
$(m_x)_{x=l, y=0}$	-0.1110	-0.187	-0.176
$(m_x)_{x=0, y=0}$	0.0903	0.0865	0.0865

曲げモーメントの値を示す。而して設計には第 3 近似の数値にて充分と思ふ。



第 15 圖 一様分布荷重を受ける正六角形板

b) 中心点荷重の場合：

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q - \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \log \left(\frac{r}{r_0}\right) \\ & + C_0 + C_1 r^6 \cos 6\theta + C_2 r^{12} \cos 12\theta \end{aligned} \quad (76)$$

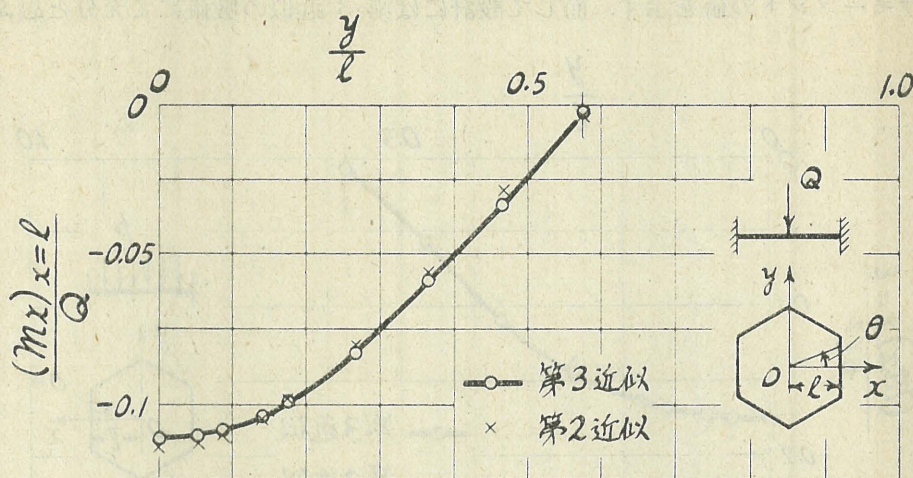
依て新に行ふべき積分は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \iint \log r \, dx \, dy &= (0.288675 \log l - 0.129690) l^2 \\ \iint r^6 \cos 6\theta \log r \, dx \, dy &= -(0.024438 \log l + 0.0015810) l^8 \\ \iint r^{12} \cos 12\theta \log r \, dx \, dy &= (0.0178238 \log l + 0.0018321) l^{14} \end{aligned} \right\}$$

依て例の通り C_* を決定すれば結局 ϕ の第 3 近似は次の様になる。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{m}\right) Q \left[0.94042 + 2 \log \left(\frac{r}{l}\right) \right. \\ & \left. + 0.47920 \left(\frac{r}{l}\right)^6 \cos 6\theta - 0.021543 \left(\frac{r}{l}\right)^{12} \cos 12\theta \right] \end{aligned} \quad (77)$$

第 16 圖に周辺の曲げモーメントを示す。而して周辺に生ずる最大曲げモーメントは (77) より次の様になる。



第 16 圖 中心点荷重を受ける正六角形板

$$(m_x)_{x=l} = -0.111 Q \quad (78)$$

c) 撓 み:

板中心の撓みを求むるには次の積分が必要となる.

$$\frac{1}{2} \iint \left(\frac{r}{l} \right)^2 \log \left(\frac{r}{l} \right) dx dy = -0.015665 l^2, \quad \iint \log \left(\frac{r}{l} \right) dx dy = -0.12969 l^2$$

$$\iint \log^2 \left(\frac{r}{l} \right) dx dy = 0.13068 l^2$$

依て板中心の撓みに就ては ϕ_1 及 ϕ_2 の第 1 近似, 第 2 近似及第 3 近似を用いた場合の δ 即 δ の第 1 近似, 第 2 近似及第 3 近似値を示すと第 7 表の様になる.

第 6 表 正六角形板中心の撓み

近 似	一様分布荷重 pl^4/Eh^3	中心集中荷重 Ql^4/Eh^3
第 1 近 似	0.212	0.240
第 2 近 似	0.1939	0.2301
第 3 近 似	0.1937	0.2300

即第 3 近似で充分と思はれる.

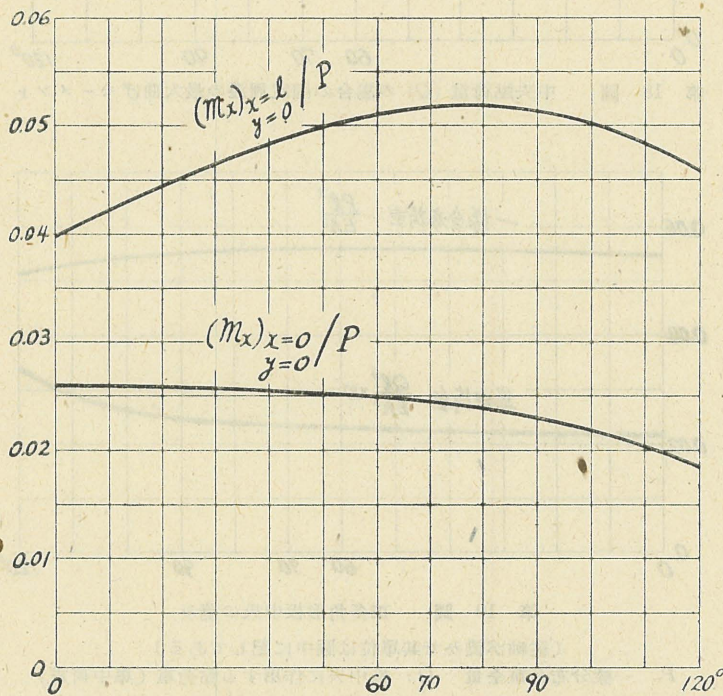
14. 正多角形板

正 n 多角形板が全面に一樣分布荷重を受けるか或は其中心に集中荷重を受ける場合の最大應力並に板中央の撓みは

$$\sum C_n \varphi_n = C + C_1 r_n \cos n\theta + C_2 r_n^2 \cos 2n\theta + \dots \quad (79)$$

と置く事に依り容易に求める事が出来る. n が大なる場合 C_2 迄探れば充分である事は上の諸例から容易に想像出来る.

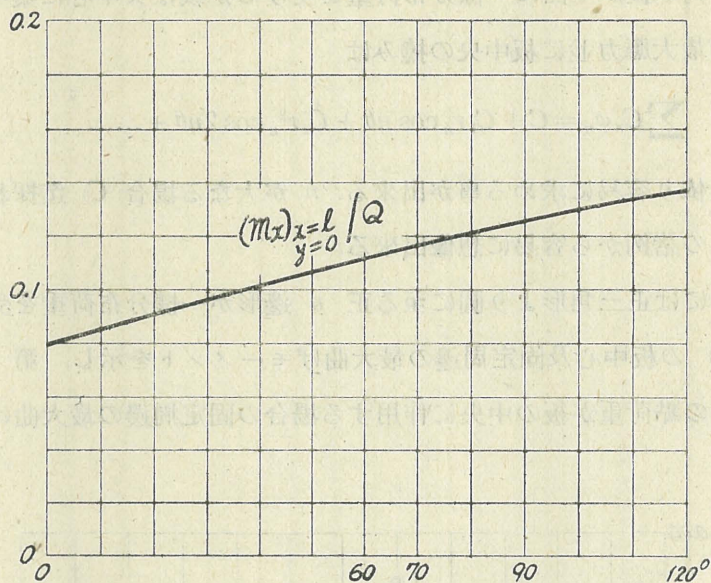
第 17 圖には正三角形より圓に至る正 n 邊形が一樣分布荷重を受けた場合 (全荷重 P) の板中心及固定周邊の最大曲げモーメントを示し, 第 18 圖には Q なる大さの點荷重が板の中央に作用する場合の固定周邊の最大曲げモーメントを示す.



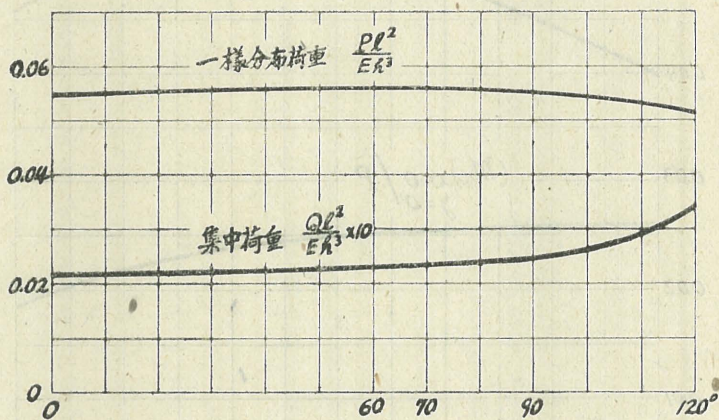
第 17 圖 一樣分布荷重 (全荷重 P) を受ける正 n 邊形の板中央並に固定周邊の最大曲げモーメント

第 19 圖には板中心の撓みを示す. 但 P は一樣分布荷重の全量で Q は點荷

重の大きさである。(縦軸が撓みで其単位は圖中に記してある)。



第 18 圖 中央點荷重 (Q) の場合の固定周邊の最大曲げモーメント



第 19 圖 正多角形板中央の撓み

(縦軸が撓みで其単位は圖中に記してある)

P : 一様分布荷重全量 Q : 板中央に作用する點荷重 (集中荷重)

本方法は上に示した様に、特別の場合を除けば、收斂は非常に宜敷い故種々の場合に利用出来ると思はれる。

本論文中 12, 13 の數値計算は本學田中重雄, 生井武文兩講師が行つて呉れたもので此機會に兩君に深く感謝し度い.

文 献

- 1) H. HENGST: Zeits. f. Angew. Math. u. Mech., 18, 1938, 44 頁.
- 2) E. TREFFTZ: Handbuch d. Physik, VI, 90 頁.
- 3) 小野鑑正: 材料力學(2版) 543 頁.
- 4) S. TIMOSHENKO: Theory of Plates and Shells 228 頁.

(18. 6. 材料強弱學教室)

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
54 EAST LAKE STREET, CHICAGO, ILL. 60607
LONDON: 10 BEDFORD SQUARE, W.C.1A 3EF

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
54 EAST LAKE STREET, CHICAGO, ILL. 60607
LONDON: 10 BEDFORD SQUARE, W.C.1A 3EF

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

Eine Methode zur angenäherten Berechnung von dem Randmomente und der Durchbiegung einer ringsum eingespannten Platte.

Von

Tadashi ISHIBASHI

Zusammenfassung.

Resumé: In der vorliegenden Arbeit hat der Verfasser ein Näherungsverfahren der Berechnung von dem Randmomente und der Durchbiegung einer ringsum eingespannten Platte durch willkürliche Potentialfunktionen, die die Randbedingungen nicht erfüllen, entwickelt.

Das Wesentliche dieser Methode besteht darin, dass man zuerst den Näherungswert der Summe zweier Biegemomente die auf zwei senkrecht zueinander stehenden Schnitte wirken, so abschätzt, dass ein gewisses Integral (5) ein Minimum wird, und man erhält dem Randmoment daraus. Um die Durchbiegung eines Punktes (x_0, y_0) auf der Platte zu erhalten, benutzt man den "Castiglianoschen" Satz.

Kurze Erläuterung der Methode: Bezeichnet man die Biegemomente der Platte mit m_x, m_y (die Zeiger x und y von m_x and m_y deuten die Normalenrichtung der Schnitte an, auf welche sie wirken), so erhält man.¹⁾

$$\left. \begin{aligned} m_x + m_y &= -N \left(1 + \frac{1}{m} \right) \Delta w \\ \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo w : die Durchbiegung der Platte,

N : die Plattensteifigkeit,

E : der Elastizitätsmodul,

h : die Plattendicke,

m : die Poissonsche Zahl.

$$N = \frac{m^2 E h^3}{12 (m^2 - 1)},$$

Setzt man nun

¹⁾ Vgl. z. B. A. Ono, Zairyo Rikigaku (Japanisch).

$$\phi = m_x + m_y \quad (2)$$

so geht die sogenannte Plattengleichung in die folgende Form über:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= p_0 \\ p_0 &= -\left(1 + \frac{1}{m}\right)p \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(p ist die spezifische Belastung der Platte).

Wir machen einen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \sum_{\kappa} C_{\kappa} \varphi_{\kappa} \\ \Delta\varphi_{\kappa} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und bestimmen den Koeffizient C_{κ} so, dass das Integral

$$\varepsilon = \iint \left[\Delta w + \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m}\right)} \left(\phi_0 + \sum_{\kappa} C_{\kappa} \varphi_{\kappa} \right) \right]^2 dx dy \quad (5)$$

möglichst klein wird, wo ϕ_0 ein Integral der nichthomogene Gl. (3) und mit φ_{κ} die Potentialfunktionen bezeichnet sind.

Es ist leicht zu verstehen, dass ε gleich Null wird, wenn die Näherungsfunktion ϕ mit der exakten Lösung des Problems zusammenstimmt, aber sonst ε stets positiv werden muss.

Aus (5) folgt notwendig

$$\left. \begin{aligned} \iint \varphi_h \Delta w dx dy + \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m}\right)} \iint [\phi_0 + \sum_{\kappa} C_{\kappa} \varphi_{\kappa}] \varphi_h dx dy &= 0 \\ h &= 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nach dem Greenschen Satze gibt es die Beziehung

$$\iint (\varphi_h \Delta w - w \Delta \varphi_h) dx dy = \oint \left(\varphi_h \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds$$

(n ist die äussere Normale der Plattenrandskurve und s die Länge derselben).

Auf dem eingespannten Plattenrande sind w sowie $\frac{\partial w}{\partial n}$ gleich Null und ferner $\Delta\varphi_h = 0$, so wird

$$\iint \varphi_h \Delta w dx dy = 0.$$

Also ergibt sich aus (6)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\kappa} C_{\kappa} \iint \varphi_{\kappa} \varphi_h dx dy + \iint \phi_0 \varphi_h dx dy &= 0 \\ h &= 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wenn die Platte eine gleichmässig verteilte Last (Last-intensität= p) trägt, wird die Partikularlösung der Gl. (3)

$$\phi_0 = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{m}\right)pr^2$$

sein. Daher erhält man

$$\phi = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{m}\right)pr^2 + \sum_x C_x \varphi_x \quad (8)$$

Den Koeffizient C_x kann man aus folgenden x linearen Gleichungen (9), die sich aus (7) ergeben, berechnen

$$\sum_x C_x \int \int \varphi_x \varphi_h dx dy = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{m}\right)p \int \int r^2 \varphi_h dx dy \quad (9)$$

$h=1, 2, 3 \dots \dots \dots x$

Das Integral erstreckt sich auf die ganze Oberfläche der Platte.

Ist die Platte durch eine Einzelkraft belastet und wählt man den Koordinatenanfang am belasteten Punkt, so erhält man

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{m}\right)Q - \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{m}\right)Q \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \sum_x C_x \varphi_x \quad (10)$$

wobei der Koeffizient C_x aus folgenden x linearen Gleichungen bestimmt werden muss:

$$\sum_x C_x \int \int \varphi_x \varphi_h dx dy = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{m}\right)Q \left[(1 - 2 \log r_0) \int \int \varphi_h dx dy + 2 \int \int \varphi_h \log r dx dy \right] \quad (11)$$

$h=1, 2, 3 \dots \dots \dots x$

r_0 ist der Halbmesser eines Kreises, von dem man annimmt, dass die Einzellast darauf gleichmässig verteilt werde.

Was das Randmoment betrifft, so ist das Folgende zu bemerken. Am Plattenrande ist die Krümmung $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ bekannt (s ist die Länge der Randkurve), so wird das Biegemoment, das den Plattenrand entlang wirkt,

$$m_n = \frac{m}{m+1} \phi_R - \frac{m-1}{m+1} m_0 \quad (12)$$

sein, wobei ϕ_R den Randwert von ϕ bedeutet und

$$m_0 = -N \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)_{\text{Rand}} \quad (13)$$

Um die Durchbiegung eines Punktes (x_0, y_0) auf der Platte zu erhalten, wollen wir die Formänderungsarbeit ins Auge fassen, die bei einer ringsum

eingespannten Platte durch die folgende Form gegeben wird:

$$A = \frac{N}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy. \quad (14)$$

Bezeichnet man die durch die gegebene Last (gleichmässig verteilte od. konzentrierte) hervorgerufene Durchbiegung mit w_1 und die durch eine an der betreffenden Stelle (x_0, y_0) imaginär wirkende Einzellast Q mit w_2 , so wird die Formänderungsarbeit der Platte, die zugleich durch die gegebene Last P und durch die imaginäre Einzellast Q belastet ist,

$$A = \frac{N}{2} \iint (\Delta w_1)^2 dx dy + \frac{N}{2} \iint (\Delta w_2)^2 dx dy + N \iint (\Delta w_1)(\Delta w_2) dx dy \quad (15)$$

sein.

Die Durchbiegung des Punktes (x_0, y_0) wird durch $\frac{\partial A}{\partial Q}$ gegeben (nach dem Castiglianoschen Satz). Daher wird die von P selbst herrührende Durchbiegung des betreffenden Punktes

$$\delta = \left(\frac{\partial A}{\partial Q} \right)_{Q=0} = N \iint (\Delta w_1)(\Delta w_{20}) dx dy = \frac{1}{N \left(1 + \frac{1}{m} \right)^2} \iint \phi_1 \phi_{20} dy dx \quad (16)$$

wobei

$$\Delta w_{20} = \frac{1}{Q} \Delta w_2$$

bedeutet. ϕ_1 bzw. ϕ_{20} entspricht dem Näherungswerte von w_1 bzw. w_{20} .

Wenn die gegebene Last eine Einzellast ist und am Punkte (x_0, y_0) wirkt, so kann man $P=Q$ setzen und aus (16) ergibt sich die Durchbiegung der belasteten Stelle

$$\delta = \frac{N}{Q} \iint (\Delta w_1)^2 dx dy = \frac{1}{NQ \left(1 + \frac{1}{m} \right)^2} \iint \phi^2 dx dy \quad (17)$$

In dem japanischen Text hat man die physikalische Bedeutung unserer Methode aus energischer Betrachtung klargestellt (I-3).

Ferner zur Erläuterung der Methode hat man die zahlenmässige Berechnung von den Beispielen der gleichseitig polygenalen Platte ausgeführt (II-9—II-14).

彈性工學研究所報告
第1卷 第2號

昭和18年10月20日印刷

昭和18年10月25日發行

發行者 九州帝國大學彈性工學研究所

九州帝國大學內

印刷者 笹 生 亭 二

本誌ニ掲載ノ論文、報告等ハ發行者ノ
承諾ナクシテ他ニ轉載スルコトヲ禁ズ

