

## 粗滑遷移領域に於ける管流の抵抗法則に就いて(II) : Colebrookの抵抗注則の一般化に就いて

栗原, 道德  
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7159377>

---

出版情報 : 流體工學研究所報告. 7 (4), pp.1-7, 1951-04-07. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



# 粗滑遷移領域に於ける管流の 抵抗法則に就いて (II)

## Colebrook の抵抗法則の 一般化に就いて

所員 栗原道徳

(昭和26年3月21日受理)

§1. 緒言. 粗面を持つ管流に於ては粗度によって惹き起される乱れ  
の場が重要な役割を持つてゐる。従つて粗い管の抵抗法則を知るためには  
粗度の形状や配列とその乱れの場の性質との関係を探らなければならない。  
特に遷移領域に於ける抵抗法則は粗面の構造に依つて著しい相違を示して  
ゐる。然しながら本質的には粗面が密におかれた砂粒から或る場合と疎に  
おかれた砂粒から成る場合の2つの特徴的な性質を区別することが出来る。  
前者は前論文<sup>1)</sup>(I)に於て前者は砂粒から直接に剝離される渦に、後者は砂  
粒の後流による渦による乱れの場に起因するものである事を指摘し、此等  
に夫々 vortex type 及び wake type の名を與へた。

(I)に於て更に粗度による乱れの場を一樣な厚さ $k$ なる乱流底層を以つて  
代表して、これを層流底層の上に重ね、粗管内の流束の流体力学的取扱いを  
なして $K$ と粗度の構造 Reynolds 数との関係を考察することに依つて  
vortex type 或は wake type の抵抗法則の解析を試み測定事実の説明  
に成功した。然しながら其の理論的計算は複雑に過ぎて實際利用面からは  
程遠いものである。

他方 C.F. Colebrook<sup>1)</sup> が次元解析の助を籍りて理論的に導いた遷移領

脚註 1) 栗原道徳、流体力学研究所報告、第7巻第3号(昭和26年1月)頁23~41

脚註 1) C.F. Colebrook, "Turbulent Flow in Pipes, with particular  
reference to the Transition Region between the Smooth and  
Rough Laws" J. Inst. Civ. Eeng. 11 (1938) 133-156.

(2)

域に於ける抵抗法則は簡單でもあり Commercial pipes の總括的な平均法則としてよく其の特性を示して居る。そして近來實用に供せられんとしている傾向にある。着者のこの論文に於ける目的は計算を複雑化する嫌はあるが、Colebrook の式の誘導に際して上述の粗面による乱れの場の機構を考慮に入れるならば各種の commercial pipes に就いて夫々椅応し且つ vortex type に対してもよく成立する様に比較的簡單にこれを一般化することの出来る可能性を示せんとするにある。着者はこれによつて流体工学者が今後に於て実用的な抵抗法則を探し求めんとする際に多少とも貢献するところがあれば幸と思ふものである。

§2 Colebrook の理論 固体壁附近の流速分布はよく知られてゐる様に

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{1}{y} \dots\dots\dots (2.1)$$

で與えられる。茲に  $U$  は管の固定壁から  $y$  だけ離れた点に於ける流速、 $\tau$  は壁面に於ける剪断力、 $\rho$  は流体密度であり、 $K$  は数値係数で實驗的に 0.4 であることが知られてゐる。

(2.1) を積分すれば流速分布の対数法則として知られてゐる。

$$U = 576 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \log \frac{y}{y_1} \dots\dots\dots (2.2)$$

が得られる。茲に  $y = y_1$  に於て  $U = 0$  であることは、流体粘性を無視した場合に流体力学的な有効壁が實際の壁より内側に向つて  $y$  だけ移れることを示してゐる。

C.F. Colebrook に従つて平均流速  $\bar{U}$  は  $y = 0.113d$  に於ける流速に等しいとおけば (茲に  $d$  は管の直径である)、抵抗係数  $\lambda$  に対して

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( = \sqrt{\frac{\rho \bar{U}^2}{8\tau}} \right) = 2 \log \frac{0.113d}{y_1} \dots\dots\dots (2.3)$$

を得る<sup>1)</sup>。

粗度が極めて小さいとか Reynolds 数が極めて小さい場合には抵抗は所謂滑法則に従い  $U_\tau$  を摩擦速度 ( $= \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ )、 $\nu$  を流体の動粘性係数として

$$y_1 = \frac{1}{10} \frac{\nu}{U_\tau} \text{ である}$$

Nikuradse の人工粗度の場合に Reynolds 数が極めて大きいか或は砂

脚註 1) C.F. Colebrook, loc. cit. P. 138, equation (8)

粒の直径  $K$  が極めて大きいときには抵抗は所謂粗法則に従つて、その時、 $\gamma_1 = \frac{K}{33}$  である。一般の粗面に就いては  $\gamma_1 = \frac{K_s}{33}$  とおき、この  $K_s$  を相当粗度と称する ( $K_s$  は実験的に定められる)。

滑法則は  $\frac{U_{\tau} K}{\nu} \leq 3$  の場合に、粗法則は  $\frac{U_{\tau} K_s}{\nu} \geq 60$  の場合に成立する。この中間領域が即ち遷移領域である。

以上の様に (2.3) に於ける  $\gamma_1$  は粗面の性質や流れの状態に依つて  $\frac{1}{10}$  から  $\frac{K_s}{33}$  まで変化する。遷移領域に於ける其の変化の様様に就いて C.F. Colebrook は次の様に考察を進めた：一般に  $\gamma_1$  は壁の相当粗度  $K_s$ 、剪断応力  $\tau$  及び流体の密度  $\rho$ 、動粘性係数  $\nu$  の函数である。従つて次元解析に依つて一般に  $\gamma_1/d = \Phi\left(\frac{K_s}{d}, \frac{\nu}{U_{\tau} d}\right)$  と考えられる。然るに上述の様に  $\frac{K_s}{d}$  或は  $\frac{U_{\tau} d}{\nu}$  が極めて小さいとき  $\gamma_1/d = \frac{1}{10} \frac{\nu}{U_{\tau} d}$  に、逆の場合には  $\frac{1}{33} \frac{K_s}{d}$  にならねばならぬことから

$$\gamma_1/d = \Phi\left(\frac{K_s}{d}, \frac{\nu}{U_{\tau} d}\right) = \frac{1}{33} \frac{K_s}{d} + \frac{1}{10} \frac{\nu}{U_{\tau} d} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

なる線型式を仮定した。

(2.4) を (2.3) に代入すれば遷移領域に於ける抵抗法則として

$$-\frac{1}{\lambda} + 2 \log \frac{3.7d}{K_s} = 2 \log \left( \frac{3.28}{U_{\tau} K_s} + 1 \right) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

を得る。これは Colebrook's formula に他ならない。

(2.5) は  $\frac{U_{\tau} K_s}{\nu}$  が極く小さい時には滑法則に、大きい時には粗法則に夫々漸近的に一致し、中間領域に於ては論文 (I) の理論に於ける  $\beta_0 = \frac{K_s}{K} = \frac{1}{20}$ , fineness factor<sup>1)</sup>  $\epsilon = 3$  なる wake type のものと殆んど一致し、又種々の commercial pipes の平均的な抵抗法則として (特に tar-coated cast iron に対して) よく其の性質を表わしてゐる。(Colebrook, Fig 1; (I), Fig 5 参照)

§3. Colebrook's formula の一般化 Colebrook の式 (2.5) は若し彼の次元考察 (2.4) が當を得てゐるものならば commercial pipes の平均的性質を示すばかりでなく、一般に wake type 更に vortex type の抵抗法則をも示すべきであるが、この式はこれ等のものを表現すべき多様性をもつてゐない。然しなから commercial pipes 特に tar-evalated cast-iron pipes の特性をよく示してゐる点から見れば (2.4) なる

脚註 1) 論文 (I), 37 頁参照

(4)

線型表式は信頼し得べき一般関係の1つの特別な場合を示すものであると考へられる。そこで吾々は(2.4)がもの線型表式を採用し、これを物理的な意味に於て拡張することを試みてみる。

初てColebrookは彼の次元解析に於て粗度の彼割を相当粗度 $K_s$ を通じて考へてゐる。然し(I)に述べた様に粗度は乱流底層の厚み $K'$ を通じて管流に影響を及ぼすもので、 $\Phi\left(\frac{K_s}{d} \cdot \frac{V}{U_{\tau d}}\right)$ を(2.4)の右辺の形におく場合には $K_s$ ではなく $K'$ を用ゐる方が合理的である。實際(2.4)に於て $K_s$ を $K'$ におき代へるならば

$$\frac{y_1}{d} = \Phi\left(\frac{K_s}{d} \cdot \frac{V}{U_{\tau d}}\right) = \frac{1}{33} \cdot \frac{K'}{d} + \frac{1}{10} \cdot \frac{V}{U_{\tau d}} \quad (3.1)$$

を得る。そしてwake typeの1つの極限としてfineness factor  $\epsilon$ が無限に大きい即ち極めて滑かな形の粗度の場合には論文(I)に依つて $K' = K_s$ である。従つて(3.1)は(2.4)に帰着して仕舞う。この様にして(3.1)は(2.4)のcommercial pipesに対する実用性を理論的に裏付けてゐると同時に(2.4)の一般化と見ることが出来るであらう。

斯くて(3.1)を(2.3)に代入し、吾々は一般化されたColebrook's formula

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2 \log \frac{3.28}{K_s} = 2 \log \left( \frac{3.28}{U_{\tau} K_s} + \frac{K'}{K_s} \right) \quad (3.2)$$

を得る。

§4. Vortex Type. 一般式(3.2)がfineness factor  $\epsilon$ の充分大きいwake typeに就いて論文(I)の理論に近い値を示すことは上述の如くその誘導の過程より明かであるが、一般に種々のwake typeを表はし或は更にvortex typeをも表はし得るかに就いて以下少しく数値的に檢べて見る。

(1) Nikuradseのvniform sand roughness. この場合に乱流底層の厚み $K'$ は(I)に於ける(5.4)及び(6.1)に依りて與へられてゐる。

即ち

$$K'/K = \beta_0 \left(1 - \frac{\delta}{K}\right) \quad (4.1)$$

$$\delta/K = e^{-\frac{0.055}{\beta_0} \xi}, \quad \xi = \left(\frac{U_{\tau} K}{V} - 3\right) \quad (4.2)$$

Nikuradseのvniform sand roughness に対しては $\beta_0 = 1$ ,  $K = K_s$

である。

此等の関係を用いた計算の結果は (I) の結果及び実測結果とよい一致にあるが、若し極く僅かの補正を行つて (4.2) を

$$\delta/k = (1 + 0.088 \xi) e^{-0.055 \xi} \dots \dots \dots (4.3)$$

とするならば一そうよい一致にある。(第一図参照)

(2) Colebrook, White の uniform sand roughness, Surface I,  $\beta_0 = 1.36$  の場合にも (4.1) 及び (I) の (6.4) を用いた計算の結果は (I) の結果及び実測結果とよい一致にあるが、前同様に (4.3) と同一係数を以つて  $\delta/k$  の補正を行うならば、即ち

$$\delta/k = (1 + 0.088 \xi) \left(1 - \left(\frac{\xi}{50}\right)^2\right) e^{-\frac{0.055}{\beta_0} \xi} \dots \dots \dots (4.4)$$

とおくならば更により一致にある (Fig 1 参照)

§5. Wake Type 論文 (I) に述べた様にこの粗面の流体力学的特性は相当粗度比  $\beta_0 (= \frac{k_s}{k})$  と fineness factor  $\xi$  の2つの parameters に依つて表はされる。 $\beta_0$  は粗度の形状及び表面密度の函数であり、 $\xi$  は主として粗度の形状に依つて定まる。粗度の表面密度が一樣な場合には  $\beta_0$  は  $\xi$  の函数と考えられる (I), (5.7) が示す様に  $\beta_0$  は粗度の抵抗係数  $C_w^\infty$  の  $4/3$  乗に比例し、 $C_w^\infty$  は粗度の形状特に滑かさに着しく支配される)。然しながら一般には表面密度の変化を考慮して  $\beta_0$ ,  $\xi$  は独立な parameters である。Wake type に於ける乱流底層の厚み  $K'$  は (I) の (6.7)

即ち

$$\beta = \frac{K'}{k} = \beta_0 \left(1 + \frac{19}{\xi} e^{-0.017 \frac{U_{\tau k}}{V}}\right) \dots \dots \dots (5.1)$$

にて與えられる。

前述の様に粗度の形状が極めて滑かざり  $\xi \rightarrow \infty$  と考えられるが、或は  $\frac{U_{\tau k}}{V} \gg 1$  ではあるが  $\beta_0$  が極めて小さい場合には  $K'/k = \beta_0$  となつて抵抗法則は單に  $\frac{U_{\tau k}}{V}$  のみの函数として一義的に定められる。この場合は (I) に於て limiting case と稱したところのものである。他方この時に (3.2) は Colebrook の式に帰着して仕舞い、(I) の理論に於ては  $\beta_0 = \frac{1}{20}$ ,  $\xi = 3$  の場合に対応してゐる。従つて吾々はこの食い違ひを補正しなければならぬ。(I) の Fig 5 を見れば分る様に wake type 特に commer

(6)

eial pipesに就いては $\beta_0$ は小さく fineness factorが重要な役割を  
もつてゐるので(5.1)に対する簡単な補正された式として

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{K}{K_s} = 1 + 1.9 \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{3} \right) e^{-0.017 \frac{V_{c,k}}{V}} \quad (5.2)$$

を採用することにする。

(5.2)に於て $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{3}$ とおけばこれは(5.1)と全く同一になるが、こ  
の様に定義された fineness factor  $\epsilon$  に対しては便宜的に質の値をも許  
さねばならない。

(1) Colebrook, White の surface  $V$ ,  $\beta_0 = 0.11$ . 吾々は(I)に於  
てこの粗面に対し fineness factor  $\epsilon$  を1と定義した。 $\epsilon = 1$ ,  $\beta_0 = 0.11$   
として(3.2)及び(5.2)を用いて計算した結果は第一図に(I)の結果及び  
測定値と共に示してある。

(2) Limiting Case (I)に於ける $\epsilon \rightarrow \infty$ 或は $\beta_0 \rightarrow 0$ なる極限の抵  
抗法則は層流底層の厚みに関する半実験式(6.3)の他には何等の仮定も含  
まれてゐない理論的結果である。その結果は實際的にこの条件に対応する  
と考えられる tar-coated cast-iron pipes に就いての実際結果と  
よく一致してゐる。Generalized Colebrook's formula (3.2)の場合  
には若し $K/K_s$ に対し(5.1)を用うれば上記の極限はColebrook's formula  
に帰着し tar-coated cast-ironに近いが少しく異なり、 $\beta_0 = \frac{1}{20}$ ,  $\epsilon = 3$   
の理論曲線に殆んど一致することは既に述べた通りである。若し(5.2)を  
採用するならば理論的には $\epsilon \rightarrow \infty$ の極限が $\beta_0$ により変化することになる  
が、實際的に小さい $\beta_0$ の値に対しては殆んど一定と見做すことが出来る。  
第2図には $\beta_0 = 0.08$ の場合にこの極限抵抗法則が示されてゐる。

(3) Commercial Pipes. C.F. Colebrook に依つて整理された  
commercial pipes (galvanized-iron, wrought-iron, tar-  
coated cast-iron) に就いて実測された遷移領域に於ける抵抗法則は  
parameters  $\beta_0, \epsilon$  を適当に選んで(I)の理論法則に依つて表わすこと  
は可能である。然しながら實際的な取り扱いに際して2つの parameters  
を用うことは極めて不便であり、更にこれ等の値は他の方法に依つて決  
定することが出来ないため次の様な便宜的な系列を用うることにする。

多くの理論計算の結果によれば上述の commercial pipes の抵抗法則  
群は余り大きくない $\beta_0$ の一定値に対し $\epsilon$ のみを副変数とした理論曲線群

に依つて実用的にそれ等の特性を充分表わすことが出来る。又 tar-coated cast-iron から始つて wrought iron, galvanized-iron 最後に砂粒粗面えの一連の系列は粗度の fineness に就いての直観的な系列を示してゐる。従つて経験的に仮りに  $\beta_0 = 0.008$  を選ぶことにすれば、(5.2) は

$$\frac{K'}{K_s} = 1 + 1.9 \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{3} \right) e^{-0.213 \frac{U_r K_s}{V}} \dots \dots \dots (5.3)$$

となる。

(3.2), (5.3) により  $\epsilon$  の種々の値に就いて計算した抵抗曲線群は第2図に示されてゐる。又参考のために tar-coated cast-iron, wrought t-iron 及び galvanized iron pipes に就いて測定結果も同図に記入されてゐる。図から知られる様に commercial pipes に就いては近似式(5.3)の採用は略々妥当であり、上記の pipes は夫々  $\epsilon = 5, 1.3$  及び 1 に対応してゐることが知られる。

最後にこの研究は文部省科学研究費の援助によるものなることを附記する。

昭和26年3月

於 流体工学研究所



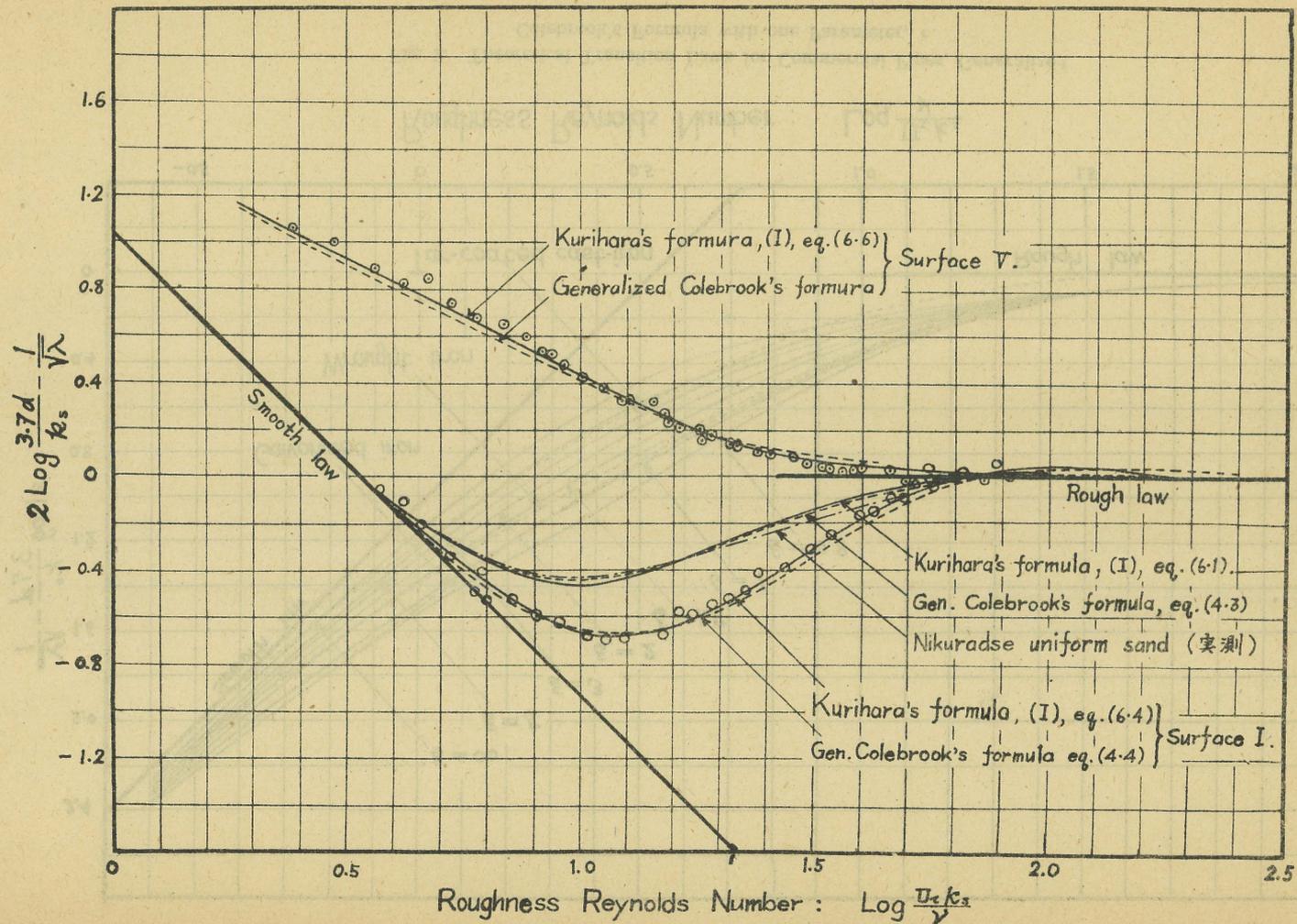


Fig. 1. Theoretical and Experimentally Determined Transition Laws for Vortex and Wake Type.

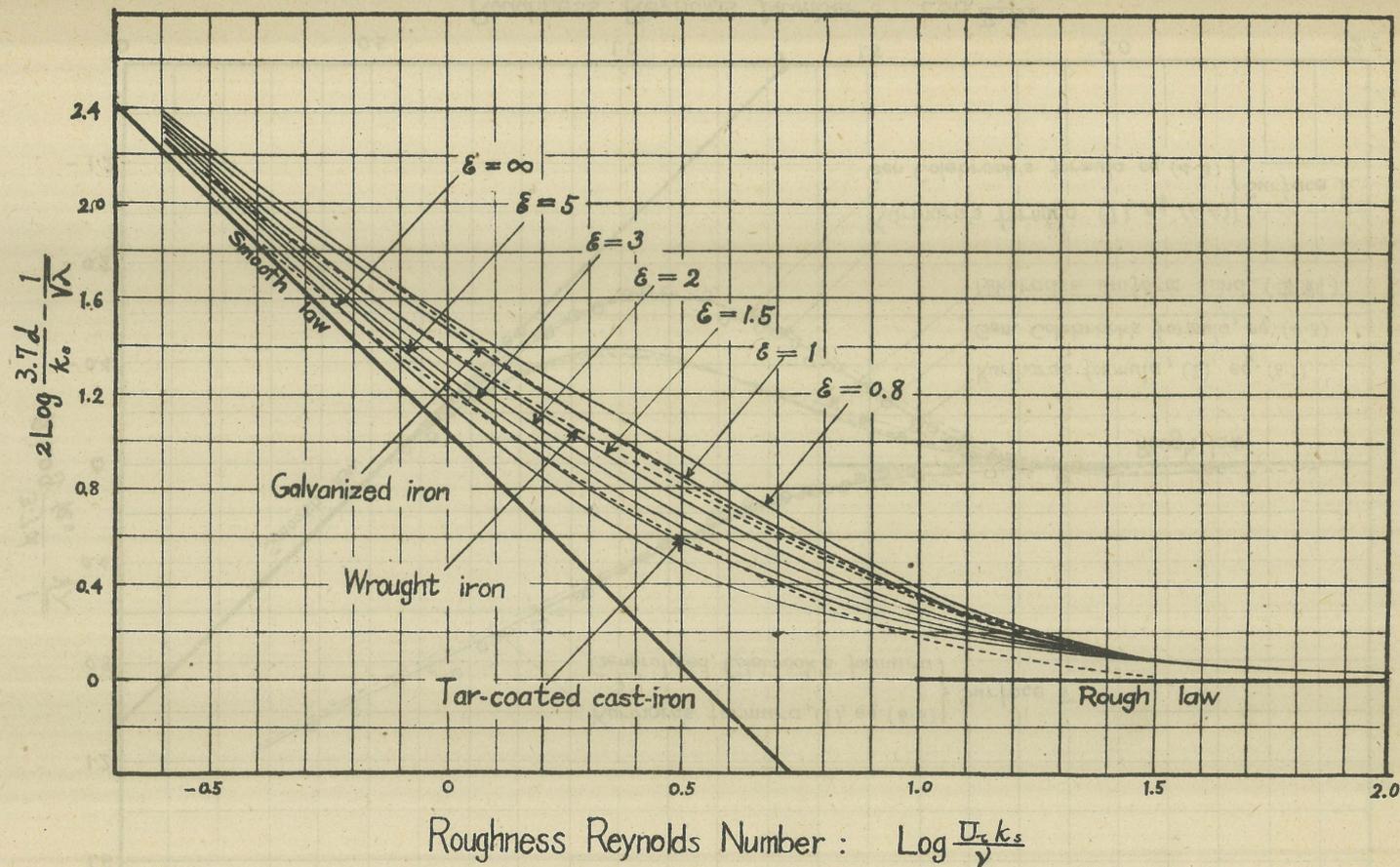


Fig. 2. Theoretical Transition Laws for Commercial Pipes, Generalized Colebrook's Formula with one Parameter,  $\epsilon$ .