

粗滑遷移領域に於ける管流の抵抗法則に就いて(Ⅰ)

栗原, 道德
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7159373>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 7 (3), pp.23-41, 1951-01. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



粗滑遷移領域に於ける管流 の抵抗法則に就いて (I)

(昭和26年1月13日受理)

栗原道徳

§1 緒言

円管内の流れに於て粗度が極めて小さいとは或は Reynolds 数が小さくて粗度の大きさ K 及び摩擦速度 U_{τ} に就いての Reynolds 数 $\frac{U_{\tau}K}{\nu}$ (以下簡単に粗度の Reynolds 数と稱することにする) が小さい場合には流体抵抗は滑法則に従い、これが充分大きいときには粗法則に従う。そして滑法則は流体粘性の影響が大きく粗度の存在にも拘らず壁面附近の流れが余り乱されない様な場合に成立し、粗法則は粗度による乱れが充分に発達して一つの恒久型を示すに至った状態に対応するものと考えられている。従つて吾々は粗度により惹起される附加的な乱れの場の性質を知ることが出来るならば滑法則と粗法則との中間領域に於ける遷移法則を知ることが出来る筈である。

扱つて J. Nikuradse¹⁾ の一様な砂粒を密に敷きつめた人工粗度に就いての測定結果及び C. F. Colebrook, C. M. White²⁾ の同様の粗度及び疎らに置かれた砂粒人工粗度更にこれ等の組合せによる人工粗度に就いての測定結果によれば遷移領域に於ける抵抗法則の砂粒の配列及び組合せに依つて種々異つてゐるが、それ等の基本的傾向から見ると2種類に大別することが出来る。即ち、その一つは、(i) 密に敷きつめられた粗度に対応する場合で、流体抵抗は $\frac{U_{\tau}K}{\nu} = 3$ 附近で滑法則からはびれ出し一つの極小を経て $\frac{U_{\tau}K}{\nu} = 60$ 附近で漸近的に粗法則になる。その間抵抗に絶えず粗法則よりも小さい。他の一つは、(ii) 疎らに置かれた砂粒粗度に対応し、前同様に $\frac{U_{\tau}K}{\nu} = 3$ の附近から滑法則をはびれだし絶えず粗法則によるよりも大なる抵抗を示しながら $\frac{U_{\tau}K}{\nu} = 60$ の附近に於て漸的に粗法則に収斂する(第一図参照)

この2種類の変化の様子の著しい相違は当然粗度による乱れの場に2つの

脚註 1) J. Nikuradse, Ver. deutsch. Ing. Forschungsheft 361 (1933)

2) C. F. Colebrook and C. M. White, Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipes, Proc. Roy. Soc. London A. 161 (1937) 367-381

着しく相違したもののあることを示すものである。そして一方が密に敷きつめられた砂粒に、他の一方が疎らに敷かれた砂粒によることを思うならば、(i)は砂粒が流れの中に置かれた場合に直接に剝離されて渦からなる乱れの原因とし、(ii)は砂粒の後流に発達した乱れの場合によるものであることが推測される。即ち、(i)の場合には1つの砂粒による後流はこれに近接した砂粒に遮られて発達することが出来ない。従つて砂粒の表面に沿つて発達した渦度が剝離されて生ずる渦が乱れの場合を構成することになる。従つて場の拓りも Reynolds 数と共に増大することは明かである。結果として(i)の性質が諒解される。(ii)の場合には砂粒の後流は充分発達し、その内部の速度分布に起因する乱れの場合も共に充分発達する。然しながらその拓りは Reynolds 数の小さい程大きい。従つて(i)の特性即ち遷移領域に於て抵抗は粗法則によるよりも常に大ではあることが説明される。

以上の様な意味に依つて(i)を Vortex Type, (ii)を Wake Type と呼ぶことが出来るであらう。前者はこゝに少しくこれ等2つの型の遷移法則に就いて考察してみたいと思ふ。

I. 粗管内の流速分布

§2. 粗度に起因する乱流底層

管 水路内の流速分布は壁面が粗であつても滑であつても壁面に近接した狭い領域を除いては同じ法則に支配されている。この事は速度差の分布が乱れの場合にも同一であることから明かである。即ち粗度の影響は壁ぎわに限られて居り、少しく離れるならば乱れの場合は殆んど速度勾配に起因する乱れから成つて居るのである。従つて吾々は平均的に考えて次の様に管内を3つの層に分けることが出来る。

(I) : 層流底層 滑な管の場合には壁面に沿つてその中の渦動粘性が殆んど役割をもたない様な層流底層が存在する。表面に凹凸がある場合でも同じ様にその凹凸に沿つてその中では流体粘性のみが考えられる様な薄い層がある筈で、従つて平均的に底面に沿つて一様な厚みをもつ見かけ上の層流底層が考えられる。そしてその厚み Δ は滑面の場合と較べて小さいが同じ程

度のものである筈である。

(II): 乱流底層 底面の附近では前節に述べた様に粗度に起因した強い乱れの間を生じている。然し少しく壁面から離れて行くとその影響は消えて外側の乱れの間と接續して仕舞う。従つて各々は層流底層と外層との間に粗度の流体力学的特性を示す相当乱流底層を導入することが出来る。そして乱流底層内では、乱れが粗度自身に起因するが或はその後流によるものであり層自身極めて薄いものであるから、乱れのエネルギー及び渦動粘性を一様な分布とする方が妥当である。

粗度の大きさ(砂粒の平均直径)を K とし、乱流底層の厚みを K' と記号することにする。 K, K' の比は砂粒の配列及び Reynolds 数の函数であり、その函数形は今日のところ理論的に知ることは出来ない。

(III): 外層(中心部) 粗度の影響のない上層部或は中心部では乱流の場に與えられる空間に対応する混合離をもつる速度勾配の存在のために生ずる乱流機構に依つて乱れの間は支配される。乱れの間、流れの様子は滑かな管の場合と同じである。この様な部分を外層と呼んでおく。

乱流底層と外層との境界に於ては両層の乱れのエネルギー従つて渦動粘性が等しく(何んとなれば乱れの尺度は何れの層に就いても K' に依り同じ法則で定められるであらうから)流速も等しいとして接續される。

§3. 壁ぎわの流速分布は平均流速に大きな影響をもたらす。この領域では流体粘性が可成の重要性をもつてゐる。従つて各々は流体粘性を無視することが出来ない。この様な場合には著者が滑かな管内の乱流の研究¹⁾に際して用ひた方法に従うのが便利である。

壁面からの垂直距離を y として I) に用いた無次元距離 χ を導入する:

$$\chi = 2K \frac{U_{\tau} y}{\nu} \dots \dots \dots (3.1)$$

茲に U_{τ} は摩擦速度、 ν は流体の動粘性係数であり、 K は後に実験的に定めらるべき数値常数である。然るときは論文(I)に依つて III)の領域に於ける流速 U に対して

脚註. 1) 栗原道徳, 「滑かな管内の乱流に就いて」, 流研報告, 第 卷, 第 号 (194) 以下これを論文(I)と略記する。

(26)

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{K} \left[-\Psi(x - \lambda_1) + \log \frac{1 + \Psi(x - \lambda_1)}{1 - \Psi(x - \lambda_1)} \right] + A \quad (32)$$

が成立つことを知る。こゝに A は積分常数であり、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 2K \frac{U_c A}{V}, & \Psi(x) &= -\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ \Psi(x) &\sim \frac{x}{2}, \text{ for } x \ll 1; & \Psi(x) &\sim 1 - \frac{1}{x} \text{ for } x \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

である。

II) に対しては θ を流体粘性の渦動粘性に対する比として

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\tau}{\nu P} \cdot \frac{\theta}{1 + \theta} \quad (34)$$

が成立つ。仮定に依つてこの層の内部では θ は一定である。III) 層との境界面に於ける値 $\theta = \theta(K')$ に等しい。

論文 (I) に依つて

$$\theta'(K') = \frac{2}{\lambda' \Psi(\lambda')}, \quad \lambda' = 2K \frac{U_c K'}{V} \quad \text{である。}$$

(34) は (3.1) を用い

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{U}{U_c} \right) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'}{1 + \theta'} \quad \text{となる。}$$

従つて積分常数を A' として吾々は次の流速分布を得る：

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{2K} \frac{\theta'}{1 + \theta'} \xi + A' \quad (35)$$

I) に対しては (35) に於て $\theta' \rightarrow \infty$ とし、 $A' = 0$ とおいて次式を得る：

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{2K} \xi \quad (36)$$

(3.2)、(3.5) 及び (3.6) を夫々境界面に於て接続させるならば

$$\frac{\theta}{1 + \theta} \lambda = 2 \Psi(\lambda)$$

なる関係を用いて外層に対して

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{K} \left[-\Psi(x - \lambda_1) + 2 \Psi(\lambda') + \log \frac{1 + \Psi(x - \lambda_1)}{1 - \Psi(x - \lambda_1)} \frac{1 - \Psi(\lambda')}{1 + \Psi(\lambda')} + \frac{\lambda_1}{2} \right] \quad (37)$$

壁ぎわを除いた流れの大部分の領域に対しては $\lambda \gg \lambda_1$ であるから (37) は

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} - 1 + \log 4K + \log \frac{U_c \xi}{V} + 2 \Psi(\lambda') - \log \frac{1 + \Psi(\lambda')}{1 - \Psi(\lambda')} \right\} \quad (38)$$

となる。初て K が小さいとか Reynolds 数が小さくて $\lambda' \ll 1$ となる場合に (38) は滑かな管内の流速分布を示す筈である。又逆の場合即ち $\lambda' \gg 1$ のときは粗な管内の流速分布を示す筈である。実際これらのことは (3.3) を用いてこれ

を確かめることが出来る。

壁ぎわの流速分布は主流の流速を全体として増加し或は減少す点で著しく平均流速に影響を及ぼすが、吾々が積分に際してその領域を無視しても平均値への影響は極めて僅かである。従つて半径 a なる円管内の平均流速 \bar{u} は (3.8) を用いて

$$\frac{\bar{u}}{u_c} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\chi_1}{2} - \frac{5}{2} + \log 4K + \log \frac{u_c a}{\nu} + 2\psi(\chi_1) - \log \frac{1+\psi(\chi_1)}{1-\psi(\chi_1)} \right\} \quad (3.9)$$

滑かる管に対しては

$$\frac{\bar{u}}{u_c} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\chi_1}{2} - \frac{5}{2} + \log 4K + \log \frac{u_c a}{\nu} \right\} \quad (3.10)$$

完全に粗る場合には

$$\frac{\bar{u}}{u_c} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\chi_1}{2} - \frac{1}{2} + \log \frac{a}{K'} \right\} \quad (3.11)$$

となる。

II 抵抗法則

§4. Parameters β, δ . 吾々の問題は K' が粗度の形状配列或は Reynolds 数に依つて如何に変化するかを知らねばならないことである。

Nikuradse によれば一様に敷きつめられた砂粒の場合に $\frac{u_c k}{\nu}$ が 3 より小さい場合には砂粒は渦を剝離しないで流れの模様は滑かる場合と殆んど区別されない。又 Colebrook 及び White の論文の第 1 図を見れば、この事は砂粒が球に敷かれている場合にも成立のことが確かめられる。従つて一般に直径 k なる砂粒が有効な渦を剝離し始めるのは $\frac{u_c k}{\nu} = 3$ の附近からであると考へて差支えないであらう。そして吾々は一般に粗面構成粒の有効直径は実際の直径よりも δ だけ小さく $k - \delta$ であると考え、 δ/k は $\frac{u_c k}{\nu}$ 及び砂粒の形状配列の函数であるが、 $\frac{u_c k}{\nu} = 3$ にて 1、 $\frac{u_c k}{\nu} \rightarrow \infty$ にて $\delta/k \rightarrow 0$ となるものと仮定することが出来るであらう。

極めて砂粒に起因する乱流底層の厚み K' は砂粒の有効直径 k の大きい程大きい筈であるが、その他に後流の発達過程にもよる筈であるから一般に

$$K' = \beta (k - \delta) \quad (4.1)$$

(28)

とおき、 $\beta \equiv \frac{U_{\tau c} K}{\nu}$ 及び砂粒の形状配列の函数であると考えることが出来るであろう。

Reynolds数 $\frac{U_{\tau c} K}{\nu}$ が充分大きい時には K は一定値に収斂し、又 δ/K も零となるから β は一定値 β_0 に収斂しなければならぬ。即ち粗法則の場合の相当粗度を K_s とすると $\beta_0 = K_s/\kappa$ である。普通には Nikuradse の用いた一様な砂粒を標準に取つて粗法則がこれに一致する様に各種の粗度に就いて相当粗度 K_s が実験的に定められている。従つて測定される K_s/κ の意味には多少の任意性が含まれて居り直接に吾々の β_0 と比較することは正しくない。然しながらこの問題は (3.11) に於ける χ_1 の値を系統的に変化させるだけに過ぎないからこゝに於ても Nikuradse の一様な砂粒を標準に採用してこの場合に $\beta_0 = 1$ と定義することにする。然るときは粗法則 (3.11) は

$$\frac{\bar{U}}{U_{\tau c}} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \chi_1 - \frac{1}{2} + \log \frac{a}{K_s} \right\} \quad (4.2)$$

となる。茲に $K_s = \beta_0 \kappa$ である。

Colebrook 及び White の実験結果との比較の便のために粗法則として

$$\sqrt{\frac{\rho \bar{U}^2}{8\tau}} = 2 \log_{10} 3.7 + 2 \log_{10} \frac{d}{K_s} \quad (4.3)$$

滑法則として

$$\sqrt{\frac{\rho \bar{U}^2}{8\tau}} = 2 \log_{10} 1.13 + 2 \log_{10} \frac{U_{\tau c} K}{\nu} \quad (4.4)$$

を採用する。茲に d は管の直径を示している。

(3.10)、(4.2) を夫々 (4.4) 及び (4.3) と比較するならば κ 及び χ_1 の値として

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 0.406 \\ \chi_{1,r} &= 5.00 && \text{粗法則} \\ \chi_{1,s} &= 5.67 && \text{滑法則} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

を得る。予期していた様に χ_1 は滑より粗に向つて少しく減少している。

(3.9) を (4.5) の数値を用い少しく書き直せば次の如くなる。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\rho \bar{U}^2}{8\tau}} - 2 \log_{10} \frac{3.7d}{K_s} &= \square \left(\frac{U_{\tau c} K_s}{\nu}, \chi' \right) \\ \square \left(\frac{U_{\tau c} K_s}{\nu}, \chi' \right) &\equiv 0.87 \left\{ \frac{\chi_1 - \chi_{1,r}}{2} - 2 + 2 \psi(\chi') \right\} \\ &+ 2 \log_{10} \frac{4 \kappa U_{\tau c} K_s}{\nu} - 2 \log_{10} \frac{1 + \psi(\chi')}{1 - \psi(\chi')} \quad (4.6) \end{aligned}$$

§5 砂粒により惹起される乱流の場合

Vortex Type と Wake Type. 1つの物体が流れの中におかれた時流速が次第に増加して Reynolds 数が或値に達すると vortex layers は安定を失つて物体は vortexes を後方に剥離し始める。この限界 Reynolds 数は物体の形状及び主流の乱れの程度に依り異なるばかりでなく壁面の存在に依つて着しく変化を受ける。自由な流れの中に置かれた円筒に就いては略々 30 である。主流の乱れが強い程小さく壁が近い程大きい。そこで一様に敷かれた砂粒からなる粗面に就いて仮に円筒に関する値を採用してみると、粒の附近に於て U/U_c を 8~10 とし限界 Reynolds 数 $(\frac{U_c k}{\nu})$ には 3~4 となる。これは実験事実を説明するものであり。即ち実測に依れば $\frac{U_c k}{\nu}$ が 3 以上となつた場合に抵抗は滑法則をはずれ始める。これは砂粒が剥離される vortexes の直接的な混合作用によるものと考えられる。

(1) Vortex Type. Reynolds 数が次第に増大して自由な流れの中ならば充分に後流が発達し得る様な場合にも、粒が密につめられて居るときには後流は後方の粒のために直ちに崩さぬ形づくられない。従つてこの様な粗面に就いては砂粒より剥離される vortexes のみを考慮すれば充分である。そこでこの種の粗面及びそれに依る抵抗法則を "vortex Type" のものと稱することにする。

假ら vortex Type に於て 1つの砂粒より剥離される乱れのエネルギーは $\pi \rho k^2 \psi(\frac{U_c k}{\nu})$ とおくことが出来る。ここに $\psi(\frac{U_c k}{\nu})$ は粒の形及び粒間の空間形状、容積即ち粒の形と配列により定まる函数であり、 U は粒の附近に於ける流速である。他方流体粘性に依つて消失するエネルギーは λ を最小渦の大きさとして粗面の単位面積毎に $\nu \frac{E}{\lambda^2} \phi(\frac{K'}{K}) K'$ とおくことが出来る。茲に E は乱流底層内の乱れのエネルギー密度であり、 $\phi(\frac{K'}{K})$ はこの層にある砂粒間の空間の平均断面の粗面の面積に対する比である。

外層と乱流底層との境界面に於ける乱れのエネルギーの交換は、両層内の乱れの性質が似ていることから余り大きくない事が想像される¹⁾。従つて乱流底層内で発生されるエネルギーと粘性により消失されるエネルギーとを等しいとすれば、単位面積毎の粒の数を N とし次式を得る。:

$$\pi \rho k^2 \psi(\frac{U_c k}{\nu}) N = \nu \frac{E}{\lambda^2} \phi(\frac{K'}{K}) \cdot K' \dots \dots \dots (5.1)$$

論文(I)によれば $E = \frac{\tau}{\sqrt{\nu}} \psi(\chi')$ (η は数値常数) である¹⁾。又一般に

$$U/U_\tau = f\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right) \text{ とおけば (5.1) は}$$

$$\psi\left(2R \frac{U_\tau k}{\nu} \cdot \frac{K'}{K}\right) \cdot \frac{K'}{K} = \sqrt{\eta} (\lambda^2 N) \frac{U_\tau k}{\nu} \cdot \frac{f\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)}{\phi\left(\frac{K'}{K}\right)} \cdot \psi\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right) \dots (5.2)$$

となる。これは一般に K'/K を Reynolds 数 $\frac{U_\tau k}{\nu}$ の函数として表せる式である。

右の函数 $\phi\left(\frac{K'}{K}\right)$ はその定義から知られる様に Reynolds 数 $\frac{U_\tau k}{\nu}$ により $\frac{K'}{K}$ を通じて徐々に変化し $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が充分大きくなれば一定値に収斂する。

又 $f\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)$ も $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が極く小さい場合を除いてその変化は緩かきゆかき一定値に収斂する。¹⁾ 同じ様に $\psi(\chi')$ も $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が少しく大きくなると殆んど 1 に等しい値をとる。最後に $\lambda^2 = K^2 F\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)$ とおくことが出来る。茲に $F\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)$ は $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が小さい間は一定で $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が大きくなるとこれに逆比例して減少する。²⁾ 従つて $\frac{U_\tau k}{\nu} \cdot F\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right) = f\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)$ とおけば f は始めは増加しゆかき一定値に収斂する。この様にして (5.2) は

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\eta} (K^2 N) \frac{f}{\phi \psi} \cdot \psi\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right) \dots (5.3)$$

と表せる。右辺に於て $f\psi/\phi\psi$ は Reynolds 数が小さい場合にもその増加は緩かきゆかき大きく Reynolds 数に対しては殆んど一定値をとる、従つて砂粒の vortex を発生する機構に関する函数 $\psi\left(\frac{U_\tau k}{\nu}\right)$ が $\frac{K'}{K}$ の決定に際して支配的である。そして $\frac{U_\tau k}{\nu}$ の充分大きくなつた場合に K'/K は一定値 β となる。この様にして vortex type に対し一般に

$$\frac{K'}{K} = \beta \cdot \left(1 - \frac{\delta}{K}\right) \dots (5.4)$$

とおいて $K - \delta$ を砂粒の有効直径と見做すことの可能性が確かめられる。(見4)

脚註 1) 境界面附近に於て両層内の乱れの発生機構の大きさは同程度であり、従つて混合距離も同程度と考えられ、更に境界面に於ては両層の乱れのエネルギ-は等しい。従つて交換係数も同程度のものと考えられる。

脚註 2) $\frac{U_\tau k}{\nu}$ が大きくて $\frac{K'}{K} \geq 1$ なる場合には (3.5) (3.6) に依つて、砂粒の中心に対して $\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{2R} \left\{ \psi(\chi') \cdot \frac{K}{K'} + \frac{1}{1+\theta} \chi_1 \right\}$ を得る。従つて $\frac{U_\tau k}{\nu} > 1$

$$\text{のとき } \frac{U}{U_\tau} \sim \frac{1}{2R} \left[\frac{K}{K'} + \chi_1 \right] \doteq \frac{\chi_1}{2R}$$

2) G.I. Taylor, Statistical Theory of Turbulence V, Proc. Roy. Soc. A 156 (1936)

参照)

以後の研究に際しては上述の理由に依つて函数 ψ の重要性に主眼をおき $\delta/k \approx \frac{\sigma_{ck}}{V} - (\frac{\sigma_{ck}}{V})_c$ を変数とする Laguerre の多項式 L_n を用いて表はすのが適当と思われぬ。即ち

$$\delta/k = \sum A_n L_n(\frac{\alpha}{\beta_0} \xi) e^{-\frac{\alpha}{\beta_0} \xi}, \quad \xi \equiv \frac{\sigma_{ck}}{V} - (\frac{\sigma_{ck}}{V})_c \dots (5.5)$$

と仮定し、実験結果との比較により α 及び A_n を定める。

こゝに各々は次の事を注意しておきたい： 函数中 β_0 は砂粒

間の空隙の大きい程大きいから同じ様に密につめられた場合でも砂粒の形状に依つて異なる。従つて(5.3)により β_0 は粗面構造の空隙率が大きい時には小さいことが解る。又 Reynolds 数 $\frac{\sigma_{ck}}{V}$ が増加した場合に粒間の空隙が大きい時には乱れの模様は速かに変化し易い筈である。従つて仮にこの空隙の影響を β_0 を通じて導入するならば β_0 の小さい程函数 $\psi(\frac{\sigma_{ck}}{V})$ の変化は急である。この事情を考慮する意味で(5.5)に於て $\frac{\alpha}{\beta_0}$ なる変数が用いられている。

(II) Wake Type. 砂粒間の距離が大きい場合にも Reynolds 数 $\frac{\sigma_{ck}}{V}$ が小さい場合には vortex type に於けると同様の機構が行われている筈である。然しながら $\frac{\sigma_{ck}}{V}$ が大きくなるに従つて粒による後流は発達し全く別の機構による乱れの場合を生ずる。この後流の性質を知ることは其れ自身一つの大きな問題を提示するので、今は砂粒間の距離が充分大きく後流が充分に発達し得る場合を考え後流同志の干渉を度外視し、更に單に定性的な性質を知る目的を以つて自由な流れの中に置かれた球の後流に就いて考察して見る。

1つの円筒の後流に就いての H. Schlichting¹⁾ の研究に従うならば、球の場合には velocity defect u_1 及び後流の中 b に就いて $u \propto U(\frac{x}{\sqrt{C_w k}})^{\frac{2}{3}}$ $b \propto (x C_w k^2)^{\frac{1}{3}}$ の成立することを知る。茲に C_w は球の抵抗係数、 x は球より距離を表はす。従つて次元的に見て乱れの energy E 及び後流の中 B に就いて

$$E \propto \rho U^2 (\frac{x}{\sqrt{C_w k}})^{\frac{4}{3}} \psi, \quad B \propto (x C_w k^2)^{\frac{1}{3}} \phi \dots (5.6)$$

1) H. Schlichting, Ingenier Archiv, Bd. 1 (1930) SS 533-571

を得る。茲に Φ, Ψ は Reynolds 数の函数であるが、それ等の変化は C_w の大きな変域に対しても極く小さく、常数と考えられる。(この事は円筒の場合には Schlichting の測定結果より確かめられる)

球より距離 x の間に含まれる後流内の乱れのエネルギーは (5.6) によつて $\rho U^2 (C_w k^2)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{1}{3}}$ に比例する。1つの砂粒に與えられた自由な壁面の面積は、砂粒間の平均距離を P とすれば平均的に P^2 である。従つて乱流底層の厚み K は上式に於て $x = P$ と置き、 $E(K) P^2$ にて除して $K' \propto (C_w k^2)^{\frac{4}{3}} P^{-\frac{5}{3}}$ $f\left(\frac{U_{cr} k}{V}\right) \Psi^{-1}(x)$ にて與えられる。従つて、 $\frac{U_{cr} k}{V}$ が余り小さい範囲に於て f, Ψ は常数と見做せるから、 $K' \propto (C_w k^2)^{\frac{4}{3}} P^{-\frac{5}{3}}$ が成立する。 C_w を Reynolds 数が充分大きい場合の抵抗係数 C_w の値とすれば定義に依つて

$$\beta_0 \propto (C_w^\infty)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{P}{k}\right)^{-\frac{5}{3}} \quad (5.7)$$

従つて

$$\beta = \frac{K'}{k} = \beta_0 \left(\frac{C_w}{C_w^\infty}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (5.8)$$

を得る。

(5.9) は極く疎らにおかれた人工粗度に就いて相当砂粒粗度と配列の関係を示すもので、実験的に確かめることが出来る。實際 H. Schlichting²⁾ の粗面に関する測定結果は大体に於て (5.8) の関係を示している³⁾

(5.8) は乱流底層の砂粒の抵抗係数 C_{M1} を通じて Reynolds 数 $\frac{U_{cr} k}{V}$ により変化する様子を示す。一般に自由な流れの中に置かれた物体の抵抗係数は Reynolds 数と共に始めは著しく減少しやがて一定の値に収斂するが、

脚註

2) H. Schlichting Ing. Archiv 7 (1936) 1

3) Schlichting の測定結果の内 P/k の大きいものとして Rugel (dia = 0.41^{cm}) 及び Kalotten (dia = 0.8 cm 高さ $k = 0.26$ cm)

の配列面に関するものより、次の如き結果が得られる：

Rugel	P	40m	20m	10m
	K_s	0.093	0.344	1.26
	$K_s/(K_s)_0$	0.27	1.00	3.7
	$(P/2)^{-\frac{5}{3}}$	0.31	1.00	3.2
Kalotten	P	40m	30m	20m
	K_s	0.031	0.049	0.149
	$K_s/(K_s)_0$	0.63	1.00	3.0
	$(P/3)^{-\frac{5}{3}}$	0.62	1.00	2.0

更に Reynolds 数が増大すると主流の乱れに依じた値に於て不連続的に急激に減少しその後一定となる。この不連続的变化は主流中の乱れにより境界層が乱流となるためである。従つて限界 Reynolds 数は主流の乱れの強い程小さい。實際粗面附近の乱れは普通の風洞実験に際してのものに較べて極めて大きく、G. I. Taylor の境界層に及ぼす乱れの影響の研究論文¹⁾の第一図より推測すれば砂粒表面の境界層は $\frac{U_{\tau k}}{V}$ の小さい値の中から乱れて居るのであることが想像される。従つて C_w も $\frac{U_{\tau k}}{V}$ の増加に従つて次第に減少し或一定値に収斂すると考えられる。

斯くの如くして β/β_0 は Reynolds 数の増加に際して、始めの極く狭い領域を除いては單調に減少し次第に 1 に収斂して行くものと考えられる。従つて d/k に於けると同様に Laguerre の多項式を用いて

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 1 + \sum_n A_n \text{Ln}(\alpha' \frac{U_{\tau k}}{V})^{\alpha'} \frac{U_{\tau k}}{V} \dots \dots \dots (5.9)$$

の如く表はす事が可能である。茲に A_n 、 α' は実測値との比較により定められる。

1) G. I. Taylor. Statistical Theory of Turbulence V, Proc. Roy. Soc. A 156 (1936)

III 数値的考察 (半実験式)

§6 吾々は前節に於て vortex type 及び Waka type における乱流底層の性質を定性質に知ることが出来た。この節以下に於ては此等の性質を保ちつつ乱流底層を特長付ける量 δ/k 及び β/β_0 表式(5.5)及び(5.9)に於ける諸係数を適当に定め(5.4)、(5.9) 及び抵抗法則(4.6)により計算した遷移領域に於ける抵抗変化が Colebrook 及び White の実験結果 (Fig 1) とよく一致する様に試みるものである。然しながら計算が比較的簡單でないため得られた結果が直ちに実用に役立つとは期待出来ない。單に吾々の粗面抵抗に関する物理的解釈が妥当であるか否かを確かめるのが主要な目的である。

実用化に就いては次の機会に論じたい。¹⁾

便宜のために必要な式を茲に纏めておく。

$$\sqrt{\frac{\rho \bar{u}^2}{\tau}} - 2 \log_{10} \frac{3.7d}{K_s} = \Xi \left(\frac{U_{\tau} K_s}{V} \cdot \chi' \right)$$

$$\Xi \left(\frac{U_{\tau} K_s}{V} \cdot \chi' \right) \equiv 0.87 \left\{ \frac{\chi_{1,r} - \chi_{1,r}}{2} - 2 + 2\psi(\chi') \right\}$$

$$+ 2 \log_{10} \frac{4K U_{\tau} K_s}{V} - 2 \log_{10} \frac{1 + \psi(\chi')}{1 - \psi(\chi')}, \quad \chi' = 2K \frac{U_{\tau} K'}{V} \quad (A)$$

$$K_s = \beta_0 k \quad (4.6)$$

$$K = 0.406, \quad \chi_{1,r} = 5.00, \quad \chi_{1,s} = 5.67 \quad (4.5)$$

$$\psi(\chi') = -\frac{1}{\chi'} + \sqrt{1 + \frac{1}{\chi'^2}} \quad (3.4)$$

$$\text{vortex type: } \frac{K'}{K} = \beta_0 \left(1 - \frac{\delta}{K} \right) \quad (5.4)$$

$$\frac{\delta}{K} = \sum_n A_n \text{Ln} \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \xi \right) e^{-\frac{\alpha}{\beta_0} \xi}, \quad \xi = \left(\frac{U_{\tau} K}{V} - \left(\frac{U_{\tau} K}{V} \right)_c \right) \quad (5.5)$$

Wake type :

$$\beta = \frac{K'}{K} = \beta_0 \left(1 + \sum_n A_n \text{Ln} \left(\alpha \frac{U_{\tau} K}{V} \right) e^{-\alpha \frac{U_{\tau} K}{V}} \right), \quad \frac{U_{\tau} K}{V} \gg \left(\frac{U_{\tau} K}{V} \right)_c \quad (5.8), (5.9) \quad (C)$$

1) 最も近い機会に於て発表の予定

(I) Vortex Type. vortex typeに於て δ/k は Reynolds 数が $(\frac{U_{\infty} k}{\nu})_c$ より小なる場合は常に 1 に等しく、これより大なる場合に (5.5) に従うものと考えている。この限界 Reynolds 数は粗面の種類に関係なく殆んど一定で C.F. Colebrook¹⁾ によれば 3 である。吾々もこの値を採用することにする。

扱て (5.5) の展開式に於て α の係数は vortex type を通じての常数と見做し、砂粒の形状及び配列の相違は各項の係数 A_n に表わされるものと仮定する。この事は大体に於て A_n が β_0 の函数であると考えることと同じ意味を有する。然しながら吾々は vortex type に就いての資料として僅かに Nikuradse の uniform sand roughness 及び Colebrook, White のそれに関する 2 組を有するのみであるため A_n の函数形を実験的に定めることは不可能である。

先づ $\beta_0 = 1$ の場合として第一図に示されている Nikuradse の uniform sand roughness に就いて最も簡単に (5.5) に於て第一項だけを採りし入りの影響の小さいと考えられる $\frac{U_{\infty} k}{\nu}$ の大なる部分に於て計算の結果が実測値によく合う様にするならば、吾々は $\alpha = 0.055 \xi$ を得る。従つて (5.5) は

$$\frac{\delta}{k} = 2^{-0.055 \xi} \quad \xi = \left(\frac{U_{\infty} k}{\nu} - 3 \right) \quad (6.1)$$

扱て吾々はこゝで層流底層の厚み δ_1 の変化に就いて推定を行わねばならない。滑らかな面に於ける層流底層と較べて粗面に於けるものは大なる外部より圧力変動及び剪断力変動を受けるからその厚みも多少とも滑面のものより小さくなる筈である。勿論 δ_1 は乱流底層の厚み δ_1' の函数であり、元来 δ_1 は極めて小さいものであるから少しく δ_1 が増加すれば極限值 $\delta_{1,r}$ に近づくものと想像され、而もその変化の様子は Types に就いて普遍的であることが考えられる。

今 $\delta_1 - \delta_{1,r}$ に対して $(\delta_{1,r} - \delta_1) / (1 + \alpha \delta_1')$ なる函数形を仮定し、(6.1) 及び (A), (B) により計算した結果が δ_1' の比較的小なる領域に於て Nikuradse の一様砂に就いてその結果と一致する様にするならば、吾々

1) C.F. Colebrook, "Turbulent Flow in Pipes, with particular reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws",
J. Inst. Civ. Engrs. 11 (1938) 133-156. Refer to p 135

は $\alpha = 2$ を得る。斯くて：

$$0.817 \left\{ \frac{\chi_{1,r} - \chi_{1,r}}{2} \right\} = \frac{0.292}{1 + 2\chi'} \quad (6.3)$$

(6.2), (6.3), (5.4) を用い (A) により計算した Nikuradse - Uniform sand に対する結果は第3図に示されている。

Colebrook 及び White の uniform sand の粗面 Surface I ($\beta_0 = 1.36$) に就いては (5.5) に於ける函数 $\rho^{-\frac{\alpha}{\beta_0}} \xi$ は既に求めた $\alpha = 0.055$ を用い $\rho^{-0.0404} \xi$ となる。そこで (5.5) を

$$\frac{f}{K} = \left(1 - \left(\frac{\xi}{50} \right)^2 \right) \rho^{-0.0404} \xi \quad (6.4)$$

と置いて、(6.3), (A), (B) により抵抗を計算した結果は同じく第3図に示されている。

Nikuradse - Uniform sand 及び Surface I 何れに就いても計算の結果はよく実測の結果を表わしている。

(II) Wake Type (i) Limiting Case. 粗面の構成要素が砂粒の場合でも其等の間隔が大きくなると β_0 は小さくなり、従つて相当粗度 K_s に就いての Reynolds 数 $\frac{U_{\infty} K}{\nu}$ が実際に用いられている様な範囲にある場合には β の変化は無視される ($\frac{U_{\infty} K}{\nu}$ は非常に大きいから wake は充分に発達し不変型となつてゐるから)、或は粗面の構成要素が滑かな流線形をなし、壁面になららかに接してゐる様な場合には後流の厚みが小さくなるると同時に Reynolds 数に依る変化は極く少なくなる。¹⁾ 即ち (C) に於ける係数 An' は小さい。従つて粗度の高さ K に就いての Reynolds 数は大きいが β が限りなく小となる場合とか或は粗度が限りなく大らかになると言ふ様な極限的な場合には $\beta = \beta_0$ となる。

この limiting case の抵抗変化は (A) に於て $K' = K_s$ とし (6.3) の補正を行えば容易に計算される。具体的な例として Tar-coated cast-iron pipes はこの場合に近いものと考えられるので Colebrook 測定²⁾ のこの種の管に就いての測定結果²⁾ と共に第4図に計算の結果が示され

1) 例えは S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamic II, Fig 147 (P 415) 参照

2) C.F. Colebrook 前出, Fig 6

ている。両者の一致は吾々の推論を確かめるものと言える。

(ii) Surface ∇ ($\beta_0 = 0.11$) Wake type の人工粗度に就いては Colebrook 及び White の surface ∇ に関する資料が一つあるだけである。この面に就いて (A), (C) 及び (6.3) により計算した抵抗法則が測定値とよく合う様に諸係数を定めるならば

$$\alpha' = 0.017 \quad A_0 = 1.9 \quad A_1 = A_2 = \dots = 0 \quad (6.5)$$

を得る。従つて (C) は次の如くなる：

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 1 + 1.9 \rho^{-0.017} \frac{U_{\tau k}}{V} \quad (6.6)$$

計算の結果は第3図に示す如である。

Fineness factor Limiting case に於いて述べた様に係数 A_0 は粗度の形状特に底面との接触部分をも考慮に入れて流れに対するなだらかさに深い関係がある。吾々が一般的に wake type の粗度を取り扱う場合に一般式 (C) を用うることは如何にも不便である。そこで簡単に (6.6) の形を仮定して次の様に現象を解釈する。：粗度の後流の厚みの Reynolds 数による変化は右辺第二項の乗素 $\rho^{-0.017} \frac{U_{\tau k}}{V}$ に依つて近似的に表わされ、厚みの変化の領域は粗度が高だらかる程小さく、Colebrook 及び White の用いた砂粒を標準に採用し其の ϵ^{-1} 倍であると定義し、 ϵ を考えている粗度の fineness factor と呼ぶことにする。即ち吾々は一般に Wake type に対して

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 1 + \frac{1.9}{\epsilon} \rho^{-0.017} \frac{U_{\tau k}}{V} \quad (6.7)$$

を採用し、2つの常数 β_0 , ϵ に依つて Wake type の粗面を特徴づけるものと仮定する。

(iii) Commercial Pipes Wake type に就いて (6.7) は $\epsilon = 0$ とおけば Tor-coated cast-iron pipe となり、 $\epsilon = 1$ とおけば、 $\beta_0 = 0.11$ として、surface ∇ の場合となり。計算の結果は実測の結果とよく一致する。Commercial pipes はその粗度の構造から見ても、又測定結果から見ても wake type のものである。従つて種々の (β_0, ϵ) の値に対し (6.3) (6.7) 及び (A) により遷移領域に於ける抵抗法則を計算し、各種の commercial pipes に就いての測定値と比較してそれ等に固有の (β_0, ϵ) の値を

決定することは興味深い事であると同時に有用な事である。この詳細な仕事は次の機会に譲ることとしてここでは極めて簡単な比較を試みて見る。

Colebrookの遷移法則¹⁾ Colebrook は次元考察に依つて commercial pipe に就いて平均的に成立つと考えられる次の如き遷移法則を導いている：

$$2 \log_{10} \frac{3.7d}{k_s} - \sqrt{\frac{\rho \bar{U}^2}{8\tau}} = 2 \log_{10} \left(\frac{3.26}{\frac{\bar{U} \tau k_s}{\nu}} + 1 \right) \quad (6.8)$$

若し $\beta_0 = \frac{1}{20}$, $\epsilon = 3$ とおけば (6.7) は

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 1 + 0.633 \rho^{-0.34} \frac{\bar{U} \tau k_s}{\nu} \quad (6.9)$$

となり、これを用いて計算した遷移法則は図の上で (6.8) と区別することは困難である。

galvanized-iron Pipes, Wrought-iron Pipes

($\beta_0 = \frac{1}{20}$, $\epsilon = 1$) に就いて同様の計算を行った結果は Fig 5 (Colebrook の論文 Fig 1) に種々の測定された遷移法則及び今までに計算されたものと共に總括的に示されている。この結果は略々 galvanized-iron pipe 或は wrought-iron pipe に対応している (β_0, ϵ の値を適当に変えるならば個々の場合に就いて一層よい一致が得られる)

1) Colebrook, 前出

§7 總括 Vortex Type, Wake Type

粗い管の内の流れの抵抗は Reynolds 数が小さい時には滑法則に、これが大きくなると粗法則に従う。その遷移領域に於ける抵抗法則は粗面の構造に依つて著しい差を示しているが、本質的には密におかれた砂粒の場合及び疎におかれた砂粒の場合の二つの特徴的な性質に分けられる。著者は、前者は砂粒より直接に剝離される渦に、後者は砂粒の後流による渦に起因するものと考え、此等を夫々 vortex type 及び wake type の抵抗法則或は粗度と稱して區別した。

乱流底層

滑法則より粗法則への遷移は粗度に起因する附加的な乱れの場合が壁面附近に発生するために起る。従つて管内の流速分布を考える場合には、滑かな管に就いて普通に取扱つてゐる様な主流部分と層流底層の他に、更の上の附加的な乱れの場合を平均的に特徴づける乱流底層をこれ等の中間に挿入することが合理的である。各々の問題はこの乱流底層の厚み K' を研究することになるのだが、先の層流底層(厚み Δ)の上に乱流を付け加えた場合の管内の流速分布及び平均流速が流体粘性を考慮して計算された (I, §. 5. 2. 3)

乱流底層を特徴づける parameters α, β . 実測によると砂粒(直径 = K) は $\frac{\sigma \alpha K}{V} = 3$ の附近で渦を剝離し始める。そこで Reynolds 数が充分大きい場合を標準にとつて、一般には砂粒の直径が有効的に $K - \delta$ になつて居り、 δ は $\frac{\sigma \alpha K}{V} = 3$ で K に等しく、 $\frac{\sigma \alpha K}{V} \gg 1$ で零になるものと考え、そして K' はこの有効直径の β 倍であると考え、 $K' = \beta (K - \delta)$ とおいた ((4.1)) すると相当粗度 K_s は $\beta_0 = \lim_{\frac{\sigma \alpha K}{V} \rightarrow \infty} \beta = \frac{K_s}{K}$ で與えられる。そこで便宜的に Nikuradse の uniform sand を標準にとつて、その場合に $\beta_0 = 1$ とし、I に求められた平均流速の式を実測された滑法則及び粗法則と比較して必要なる係数の数値を定めた。その結果によれば層流底層の厚み $\frac{\sigma \alpha \Delta}{V}$ は滑より粗に向つて少しく減少していることが知られる。 ((4.5))

これ等の数値を用いて抵抗法則が粗法則のつれとしてその表式として求められた ((4.6))

乱流底層に就いての理論的考察 (II 55)

vortex type に就いては、砂粒により剝離される渦の全エネルギーは乱流底層内で流体粘性により消失される乱流のエネルギーに殆んど等しい筈である。この平衡条件のもとに k'/k の表式が形式的に求められている。その結果によれば k'/k は、一つの砂粒が剝離する渦のエネルギーを $\sigma^1 k^2 \psi(\frac{\sigma k}{V})$ とおいた場合に主として $\psi(\frac{\sigma k}{V})$ により定められ、これに比例する。従って $\frac{\sigma k}{V} \rightarrow \infty$ に対して $\frac{k'}{k} \rightarrow \beta_0$ となり一般に

$$\frac{k'}{k} = \beta_0 (1 - \frac{d}{K})$$

とおくことの妥当性が知られる。更に δ/k は $\frac{\sigma k}{V}$ が3のときに1であり單調に減少する。そこで一般に Laguerre の多項式を用いた表式 (5.5) が提案されている。

Wake type に就いては、砂粒同志の間隔が充分大きくて後流は充分に発達することが出来るものとし、定性的な乱流底層の性質を知らる意味で、この後流に球の後流に関する理論を適用して考察を行った。その結果粗面の相当粗度は砂粒間の平均距離 D の $5/3$ 乗に逆比例することを知った。((5.7))

この理論的法則は Schlichting の測定結果をよく説明している。更に β は砂粒の抵抗係数の $4/3$ 乗に比例する。従って Reynolds 数が増加すると β 或は $\frac{k}{K}$ は次第に減少しやがて一定値 β_0 に収斂することを知らる ((5.8)) 前同様に β/β_0 に対し Laguerre の多項式による表式 (5.9) が提唱されている。

Ⅲに於て理論的に得られた結果と Nikuradse, Colebrook 及び White の実測結果との比較を行い、必要な諸係数の数値を定め遷移領域に於ける半実験的な抵抗法則が求められている。

Vortex type に就いて、(6.1), (6.4) は夫々 Nikuradse の uniform-sand 及び Colebrook, White の surface I に関する δ/k の表式である。層流底層に就いては type の如何に拘らず (6.3) が採用される。

Wake type に就いては、粗度粒子の滑かさを表はす fineness factor ϵ を導入し、粗面の性質を β_0 と ϵ に依つて特徴づけられる様を試みられている ((6.7))。 $\epsilon = \infty$ は粗さが極めてなだらかな極限的な場合であり、その時の抵抗法則は理論的に計算される。その結果は Tar-coated cast-iron

pipes に就いての実測結果とよく一致している。 $e=1$ は Colebrook, White の使用した砂粒に対応している。

2, 3 の (β, E) の値に対する抵抗法則が計算され実測値と共に第5図に示されている。以上は於て

(5.9) に於ける諸係数は

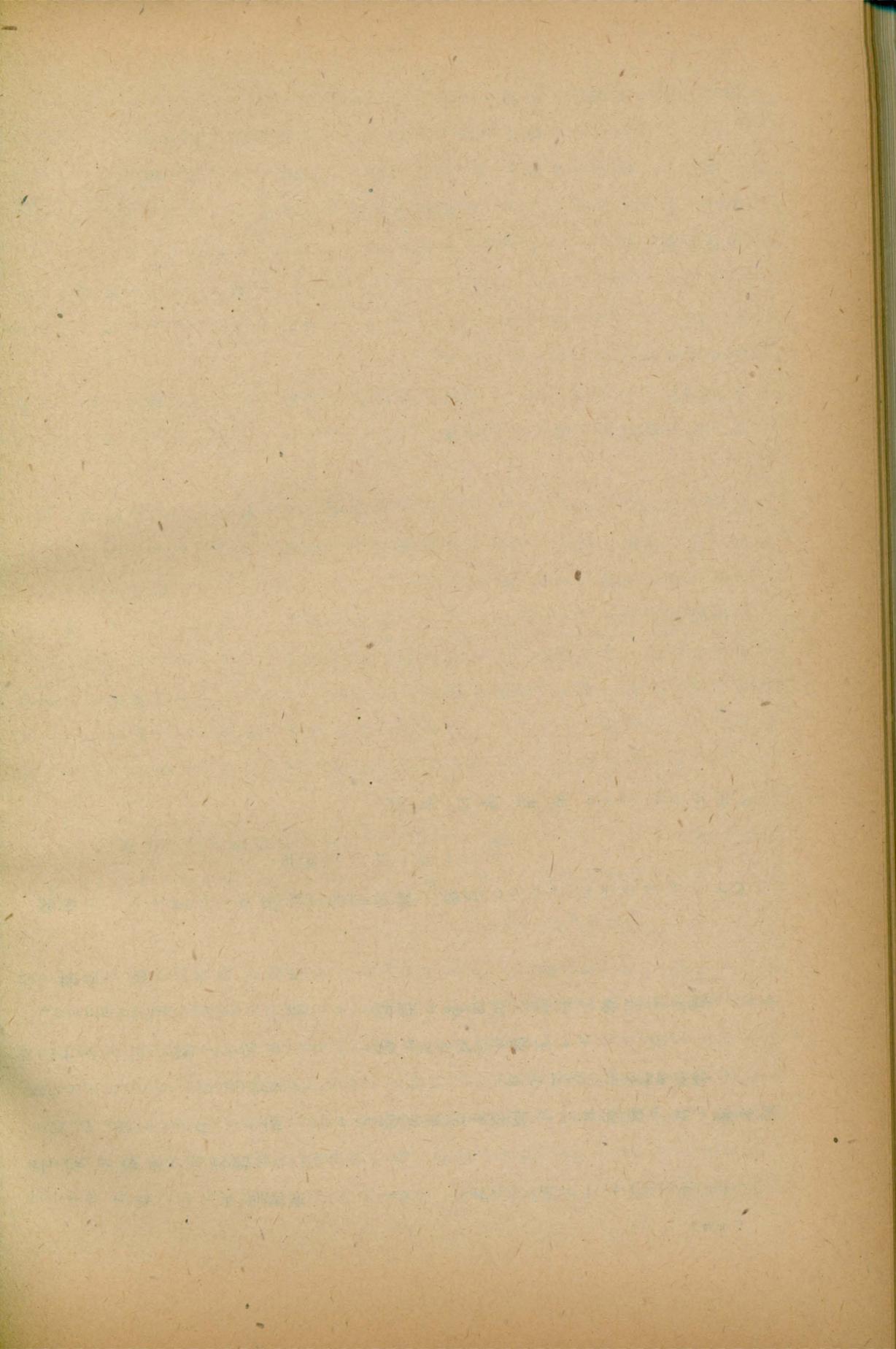
surface V に就いて定められ、一般に (6.7) が採用されている。

Commercial pipes に就いての詳細な吟味及び結果の実用化に就いては次の機会に述べられるであらう。

最後に、この研究は文部省科学研究費の援助のもとに行われたものである。

昭和26年1月12日

流体工学研究所に於て



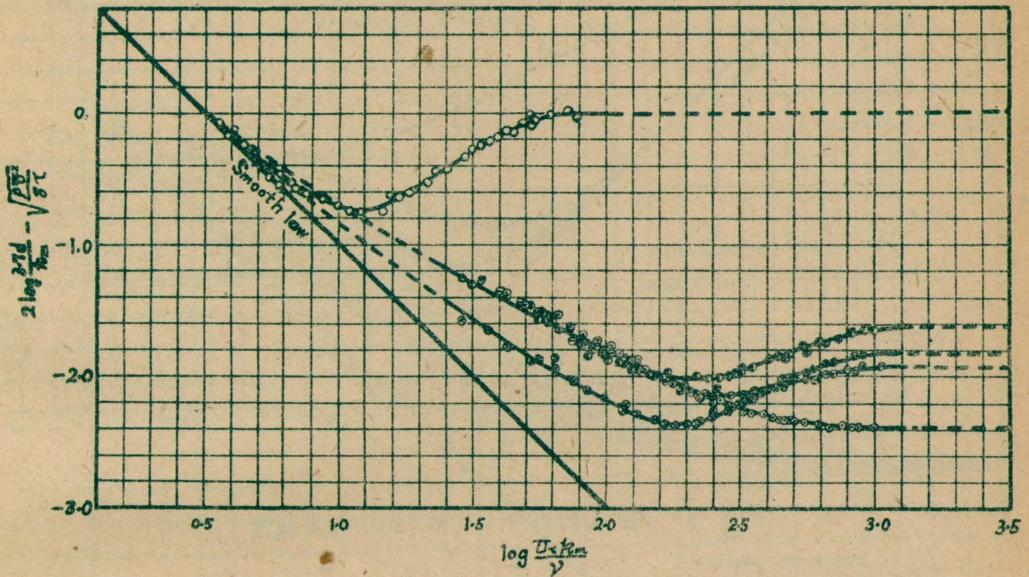


Fig. 1. (Colebrook, White, Fig. 11) $\frac{u_* k_m}{\nu}$ の函数として表はした場合の粗法則からのつづれ。ここに k_m は大きな砂粒の直径である。

○ surface I, 密に細い砂粒が敷きつめられたもの; ⊙ surface V, 疎らに大きな砂粒がおかれたもの; ⊗, ⊙, ⊖, surface I, V の種々の組合せ。

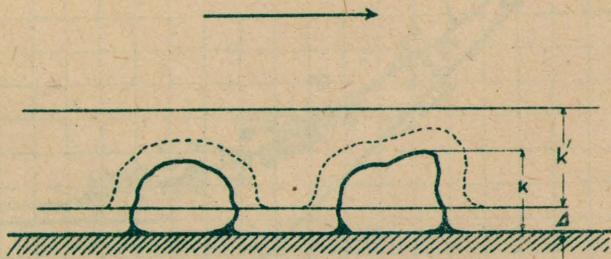


Fig. 2

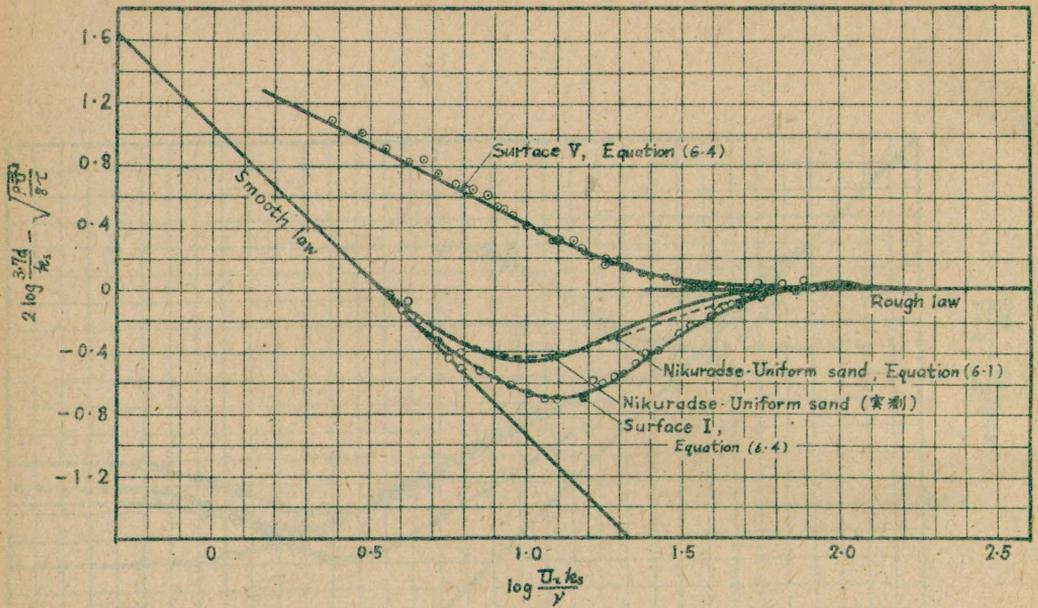


Fig. 3 粗法則からのはずれ, k_s : 相当粗度.

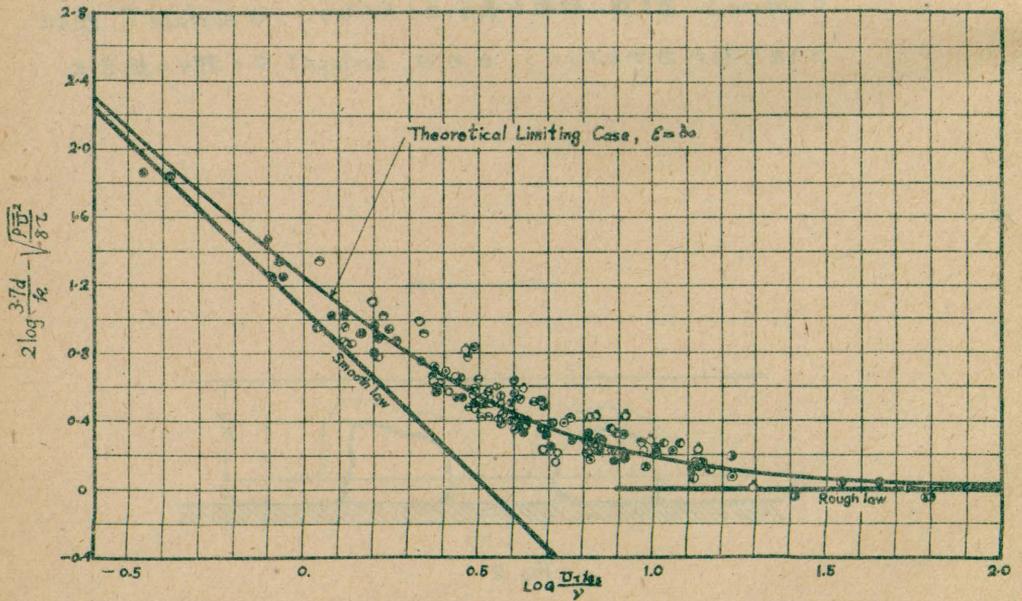


Fig. 4. 粗法則からのはずれ, Tar-coated Cast-Iron Pipes

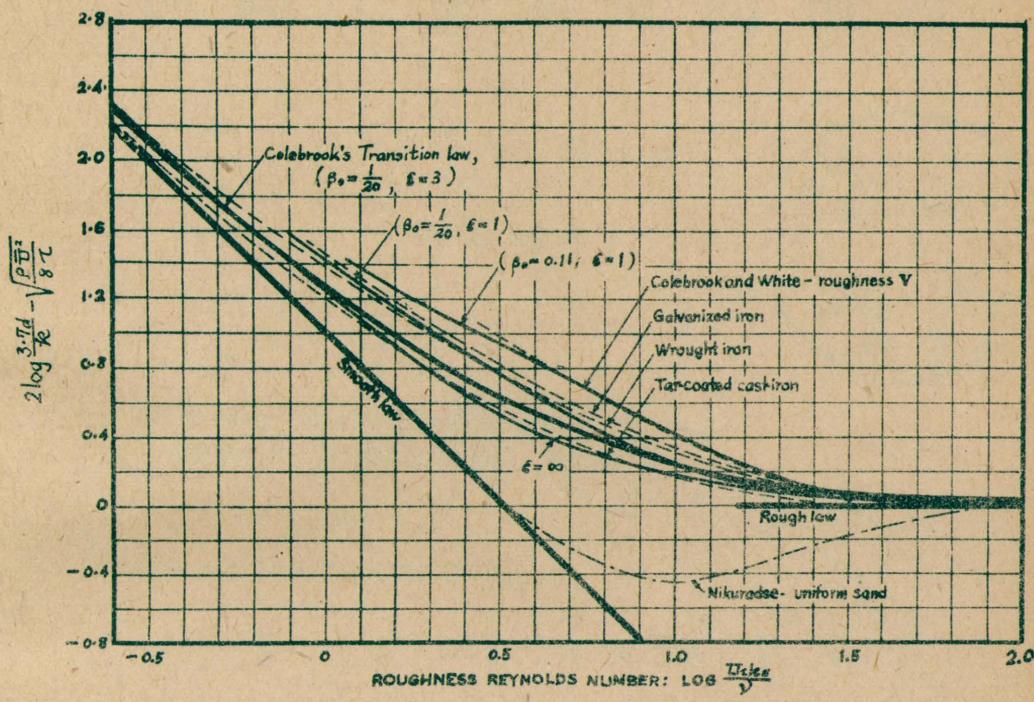


Fig. 5 種々の粗度に就いての理論及び実験遷移法則