

非線型振動を解く一つの試み

山田, 彦児
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7159367>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 7 (2), pp.8-16, 1950-11-20. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



非線型振動を解く一つの試み

所 員 山 田 彦 晃

(昭和二十五年 七 月 三十 日 受理)

§ 1 方 法

微分方程式，特にその非線型のもの，の近似解を得る目的で一試案を示し⁽¹⁾之を実用問題に用いた結果の一つをも既に報告した⁽²⁾のであるが，此の同じ方法は原理的に非線型振動にも適用し得る筈であつて，之に就いて今迄に取扱つた一二の例を此処で報告しておきたいと思ふ。但し今回は問題を一つの振動型に限定して，平衡位置からの変位を s とする時，

$$\ddot{s} + B(s, \dot{s})\dot{s} + C(s, \dot{s})s = 0 \dots\dots\dots (1)$$

なる形で表はされる振動のみを扱ふ事とする。此処に文字の頭小は時間に対する微分を意する事勿論である。

従来解法は一つの表式に依つて幾往復もの運動を記載するのを常とするが此処では，之に反して，一端から次の端迄の一振れを，之に続く前後の振動との関係を顧慮する事なく，一表式に依つて近似するといふ方法を採用。即ち此処に問題とするのは， $(\dot{s}=0, s=-\lambda)$ から始まり次の $(\dot{s}=0, s=\lambda)$ に終る一経過であつて，此処に λ は所与， λ は計算から決定せらるべき常数である。全振動過程は，前後に並べられた斯る解の一聯から成るべき事勿論である。

$s = \lambda \sigma$ に依つて変数を σ に変換すれば振動の存在域は $(-1, \lambda)$ となり，更に σ を σ の函数と見做して方程式を書換へれば，

$$\Delta(\sigma) \equiv \ddot{\sigma} + F(\sigma, \dot{\sigma}; \lambda)\dot{\sigma} + G(\sigma, \dot{\sigma}; \lambda)\sigma = 0 \dots\dots\dots (1)'$$

となるが，此処に $'$ は σ に就ての微分を示してゐる。即ち問題は， σ を σ の函数として近似すると同時にその解の存在域の端 (λ) を決定する事となり，此の爲に既述の積分法を利用するのであるが，此処に振動問題の特徴として，両端が解の特異点である事を考慮しなければならぬ。即ち

$$(\dot{\sigma}\dot{\sigma}')_{\sigma=-1} = G(-1, 0; \lambda) > 0; (\dot{\sigma}\dot{\sigma}')_{\sigma=\lambda} = -\lambda G(\lambda, 0; \lambda) < 0$$

に依つて解は

$$\sigma = \sqrt{(1+\sigma)(\lambda-\sigma)} \cdot P(\sigma) \dots\dots\dots (2)$$

の形を持つべく，此の時 $P(\sigma)$ は $(-1, \lambda)$ の間及び端に於て常に有限の正值

⁽¹⁾ 微分方程式の一近似解法，本誌第3巻第3号(1947)，29～35頁

⁽²⁾ 層流境界層方程式の一近似解法，本誌第4巻第3号(1948)，27～42頁，同第5巻第2号(1949) 1～10頁

を持つべき事明かである。

$P(\sigma)$ の充すべき方程式は

$$\Delta(\sigma) \equiv -\left(\sigma + \frac{1-\lambda}{2}\right)P^2 + (1+\sigma)(\lambda-\sigma)P \cdot P' + F(\sigma, P; \alpha, \lambda) \sqrt{(1+\sigma)(\lambda-\sigma)} \cdot P + G(\sigma, P; \alpha, \lambda) \cdot \sigma = 0 \quad (3)$$

で在つて、此の $P(\sigma)$ を近似する爲には、領域 $(-1, \lambda)$ に於て完全系をなす任意函数系を採り、その幾つかの函数の一次結合を以てする事が出来る。振動の型に応じて之に適合する（即ち最初の數個の函数に依つて高い近似度が期待出来る）函数系は存在するであらうけれども、今直ちにはその知識を持ってゐない。それ故此処では最も簡単な函数系即ち

$$1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^N, \dots$$

を用ひる事とし、従つて $P(\sigma)$ を σ の polynomial で近似する方法に就て述べよう。此の polynomial を

$$P(\sigma) = \sum_{n=0}^N a_n \sigma^n \quad (4)$$

と仮定すれば、決定せらるべき常数は

$$\lambda; a_0, a_1, \dots, a_N,$$

の $N+1$ 個であり、之等の値は (3) がなるべく正確に成立つやうに撰定せらるべきである。即ち吾々の場合、

$$\int_{-1}^{\lambda} \sigma^m \Delta(\sigma) d\sigma = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots, N+1, \quad (5)$$

の条件に依つて之等の値を決定するのである。

(4) を (3) に代入し、(5) の積分を実行した結果は $N+2$ 個の未知数に対する同数の代数方程式となる。問題が非線型の爲に此の連立方程式の形が複雑となり、之を解く爲の手續が多々となる事は避けられないけれども、微分方程式の解法を連立代数方程式のそれを以て近似し得る事自身に意義があるものと考へて良いであらう。

σ を (2), (3) の形に得る事は次段の積分に対して好都合であつて即ち

$$t = \int_{-1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1+\sigma)(\lambda-\sigma)} \cdot P(\sigma)} \quad (6)$$

なる関係は必ず初等的に積分され、 σ と t の間の函数関係が解析的に与へられる事となる。この事は取扱ふ問題に依つては本質的な利点となるであらう。上述の積分法は所謂 平均法 を一般化したものに外ならない。之に対して 換算法 を運用し、即ち特に任意に撰んだ数 σ に於て $\Delta(\sigma) = 0$ を要求し、之から出る関係の数だけ (5) 中の式の数を減らす事が考へられる。例へば、

を持つべき事明かである。

$P(\sigma)$ の充すべき方程式は

$$\Delta(\sigma) \equiv -\left(\sigma + \frac{1-\lambda}{2}\right)P^2 + (1+\sigma)(\lambda-\sigma)PP' + F(\sigma, P; \alpha, \lambda)\sqrt{(1+\sigma)(\lambda-\sigma)} \cdot P + G(\sigma, P; \alpha, \lambda) \cdot \sigma = 0 \quad (3)$$

で在つて、此の $P(\sigma)$ を近似する爲には、領域 $(-1, \lambda)$ に於て完全系をなす任意函数系を探り、その幾つかの函数の一次結合を以てする事が出来る。振動の型に応じて之に適合する（即ち最初の数個の函数に依つて高い近似度が期待出来る）函数系は存在するであらうけれども、今直ちにはその知識を持ってゐない。それ故此処では最も簡単な函数系即ち

$$1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^N, \dots$$

を用ひる事とし、従つて $P(\sigma)$ を σ の polynomial で近似する方法に就て述べよう。此の polynomial を

$$P(\sigma) = \sum_{n=0}^N a_n \sigma^n \quad (4)$$

と仮定すれば、決定せらるべき常数は

$$\lambda; a_0, a_1, \dots, a_N,$$

の $N+1$ 個であり、之等の値は (3) がなるべく正確に成立つやうに撰定せらるべきである。即ち吾々の場合、

$$\int_{-1}^{\lambda} \sigma^m \Delta(\sigma) d\sigma = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots, N+1, \quad (5)$$

の条件に依つて之等の値を決定するのである。

(4) を (3) に代入し、(5) の積分を実行した結果は $N+2$ 個の未知数に対する同数の代数方程式となる。問題が非線型の爲に此の連立方程式の形が複雑となり、之を解く爲の手續が多くなる事は避けられないけれども、微分方程式の解法を連立代数方程式のそれを以て近似し得る事自身に意義があるものと考えて良いであらう。

σ を (2), (3) の形に得る事は次段の積分に対して好都合であつて即ち

$$t = \int_{-1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1+\sigma)(\lambda-\sigma)} \cdot P(\sigma)} \quad (6)$$

なる関係は必ず初等的に積分され、 σ と t の間の函数関係が解析的に与へられる事となる。この事は取扱ふ問題に依つては本質的な利点となるであらう。上述の積分法は所謂 平均法 を一般化したものに外ならない。之に対して 撰定法 を運用し、即ち特に任意に撰んだ数處に於て $\Delta(\sigma) = 0$ を要求し、之から出る関係の数だけ (5) 中の式の数を減らす事が考へられる。例へば、

面振動端に於ては、

$$P(-1) = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} G(-1, 0; \lambda) \quad , \quad P(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} G(\lambda, 0; \lambda)$$

が $\Delta(\sigma) = 0$ の条件であつて、之に依つて $P(\sigma)$ の未知数が二つ減少する事となり、代数方程式の解法が格段に容易となる事が期待される。然し一方、 $\Delta(\sigma)$ の零点を人為的に指定する事は、全体としての近似を大きく害ふ場合の在るべき事を予め考慮しておく必要がある。

近似度の推定に就いては確實な方法を持ち合はさないけれ共、本来 $\Delta(\sigma) \equiv 0$ が要求であるから、得られた $P(\sigma)$ を用いて計算した $\Delta(\sigma)$ が零から外れる度合 ($\Delta(\sigma)$ の中の代表的な一頂との比較に於て) を以て一つの目安とする事が出来よう。之が微分方程式中の各項の測定誤差内に入るならば、得られた解は物理的に正確と考へ得るであらうけれ共、斯る精細な近似が得られる事は稀である。今一つの考へ方は、 $P(\sigma)$ を近似する polynomial の次数を更に一つ増す時に各係数に現れる変化、従つて又 σ の数値の受ける変化は、

$$S \equiv \int_{-1}^{\lambda_1} \sigma^{N+2} \Delta_1(\sigma) d\sigma \quad (7)$$

の order であるべき事は容易に判る如くである。但し此処に $\lambda_1, \Delta_1(\sigma)$ は元の近似解に於ける夫々の値を示すものとする。それ故に、媒介常数に依る展開法の場合に依つて、近似の誤差は S の order であるとも言ひ得るであらう。然し本報告に於ては斯る誤差の推定の論議には之以上立入らない事とする。

§2 例題 1 減衰振動

振動に逆う抵抗が、速さの一乗と自乗に比例する二つの頂の和から成る際の單振動は、前節の変換に依つて

$$\sigma \sigma' + (A + B\sigma) \sigma + \sigma = 0 \quad (8)$$

となり、此処に文字の頭の σ は純粹單振動の際の面転角 $\theta (= \omega_0 t)$ に就ての微分を意味する事容易に読取られる如くである。 σ の存在域 $\sigma(-1, \lambda)$ を特に本節に於てのみ

$$1 + \lambda \equiv \mu, \quad (1 + \sigma)/\mu = \eta \quad (9)$$

に依つて $\eta(0, 1)$ に変換すれば、(8) は

$$\Delta(\eta) = \frac{1}{\mu} \sigma \frac{d\sigma}{d\eta} + (A + B\sigma) \sigma + \mu\eta - 1 = 0 \quad (10)$$

となり、その解としては極めて簡単に

$$\sigma = \sqrt{2\mu\eta(1-\eta)} (a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2) \quad (10)$$

を假定する。

未知常数 μ, a_0, a_1, a_2 の中, $\eta = 0$ ($\sigma = -1$) に於て $\Delta = 0$ の条件を採用すれば $a_0 = 1$ となり、他の三つを

$$\int_0^1 \eta^m \Delta(\eta) d\eta = 0, \quad m = 0, 1, 2 \dots \dots \dots (11)$$

に依つて定める事とすれば次の三方程式となる。即ち

$$\left. \begin{aligned} & \frac{B}{10} \mu a_1^2 + \frac{2B}{15} \mu a_1 a_2 + \frac{B}{21} \mu a_2^2 \\ & + \left(\frac{B}{3} \mu + A' \sqrt{\mu} \right) a_1 + \left(\frac{B}{5} \mu + \frac{5A'}{8} \sqrt{\mu} \right) a_2 + \left\{ \left(\frac{B}{3} + \frac{1}{2} \right) \mu + 2A' \sqrt{\mu} - 1 \right\} = 0 \\ & \left(\frac{B}{15} \mu - \frac{1}{20} \right) a_1^2 + \left(\frac{2B}{21} \mu - \frac{1}{15} \right) a_1 a_2 + \left(\frac{B}{23} \mu - \frac{1}{42} \right) a_2^2 \\ & + \left(\frac{B}{5} \mu + \frac{5A'}{8} \sqrt{\mu} - \frac{1}{6} \right) a_1 + \left(\frac{2B}{15} \mu + \frac{7A'}{16} \sqrt{\mu} - \frac{1}{10} \right) a_2 + \left\{ \left(\frac{B}{6} + \frac{1}{3} \right) \mu + A' \sqrt{\mu} - \frac{2}{3} \right\} = 0 \\ & \left(\frac{B}{21} \mu - \frac{1}{15} \right) a_1^2 + \left(\frac{B}{14} \mu - \frac{2}{21} \right) a_1 a_2 + \left(\frac{B}{36} \mu - \frac{1}{28} \right) a_2^2 \\ & + \left(\frac{2B}{15} \mu + \frac{7A'}{16} \sqrt{\mu} - \frac{1}{5} \right) a_1 + \left(\frac{2B}{21} \mu + \frac{21A'}{64} \sqrt{\mu} - \frac{2}{15} \right) a_2 + \left\{ \left(\frac{B}{10} + \frac{1}{4} \right) \mu + \frac{5A'}{8} \sqrt{\mu} - \frac{1}{2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

但し記載の簡単な爲に

$$A' = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} A \dots \dots \dots (13)$$

とあかれている。

(12) を一般的に解くのは困難であるから、此処で数値例を挙げる事としよう。

一例として $A = 1/4$, $B = 1/2$ と採る。

之は抵抗の一乗項と自乗項が略、同程度に利いて、それらに依る減衰が相當に大きい場合に當つてゐる。此の値に対して (12) を解けば、

$$\mu = 1.4196 \quad (\lambda = 0.4196); \quad a_1 = -0.5347, \quad a_2 = 0.2553$$

となり従つて、

$$\begin{aligned} \sigma &= 1.6850 \sqrt{\eta(1-\eta)} (1 - 0.5347\eta + 0.2553\eta^2) \\ &= \sqrt{(1+\sigma)(0.4196-\sigma)} (0.8902 - 0.1463\sigma + 0.1504\sigma^2) \end{aligned} \dots (14)$$

次段の積分は既述の如く容易に遂行される。結果のみを記せば

$$\begin{aligned} \theta &= 1.0317 \tan^{-1} \left(\frac{0.1598 \sqrt{(1+\sigma)(0.4196-\sigma)}}{\sigma + 0.2317} \right) \\ &\quad - 0.1555 \ln \left(\frac{1 - 0.1191\sigma + 0.3801 \sqrt{(1+\sigma)(0.4196-\sigma)}}{1 - 0.1191\sigma - 0.3801 \sqrt{(1+\sigma)(0.4196-\sigma)}} \right) \dots (15) \end{aligned}$$

である。

(14), (15) の近似度を知る爲に、之等と比較する目的を以て、(8) の $A=1/4$, $B=1/2$ の際を、数値的に詳しく積分した。即ち Runge-Kutta 法を用いて $\dot{\sigma}$ を一步一步計算し、又求められた $\dot{\sigma}$ を用い Simpson 規則に依つて θ を、 σ の函数として計算した。積分の歩みを極めて小さく撰んだが爲に多大の労力を費したけれども、従つて又正確度の基準と見做す事が出来るであらう。⁽³⁾ 此処にはその詳細を省き、唯数個の点で両方法の数値を比較したものが表乃至表一図である。但し表中の exact と添字したものが Runge-Kutta 法及び Simpson 規則に依るものを、approx と添字したものが吾々の近似積分法に依る値を示し、図に於ては実線が前者を、黒点が後者を示してゐる。表又は図に依つて、吾々の得た結果が充分に正確であることを認める事が出来る。

Table 1.

σ	$\dot{\sigma}_{\text{exact}}$	$\dot{\sigma}_{\text{approx}}$	θ_{exact}	θ_{approx}
-1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.9	0.4089	0.4155	0.4640	0.4584
-0.8	0.5385	0.5450	0.6736	0.6650
-0.7	0.6143	0.6180	0.8464	0.8363
-0.6	0.6593	0.6591	1.0030	0.9924
-0.5	0.6825	0.6788	1.1517	1.1412
-0.4	0.6887	0.6822	1.2973	1.288
-0.3	0.6804	0.6725	1.4431	1.436
-0.2	0.6591	0.6516	1.5922	1.586
-0.1	0.6252	0.6197	1.7477	1.743
0.0	0.5783	0.5767	1.9137	1.910
0.1	0.5165	0.5200	2.0961	2.092
0.2	0.4354	0.4450	2.3058	2.300
0.3	0.3255	0.3390	2.5680	2.553
0.4	0.1326	0.1417	3.0042	2.966
λ	0.0000	0.0000	3.3100	3.241

N.B. $\lambda_{\text{exact}}=0.42015$, $\lambda_{\text{approx}}=0.4196$.

⁽³⁾ 此の数値計算は森次雄氏に依つて遂行された。此処に感謝の意を表し度い。

§3 例題 2. Relaxation Oscillation

次に Van der Pol の振動体.

$$\ddot{s} - \epsilon(1-s^2)\dot{s} + s = 0 \quad (16)$$

が行ふ定常振動を取上げよう. その未知の振幅を α とし, $s = \alpha\sigma$ と置換すれば

$$\dot{\sigma}\dot{\sigma}' - \epsilon(1-\alpha^2\sigma^2)\dot{\sigma} + \sigma = 0 \quad (16')$$

となり. 解の存在域が $\sigma(-1, 1)$ に変化する. §1 に述べた如く此の解を

$$\dot{\sigma} = \sqrt{1-\sigma^2}P(\sigma), \quad P(\sigma) = \sum_{n=0}^N a_n \sigma^n \quad (17)$$

とおけば, P の充たす方程式は

$$\Delta(\sigma) \equiv (1-\sigma^2)PP' - \sigma P - \epsilon(1-\alpha^2\sigma^2)\sqrt{1-\sigma^2}P + \alpha = 0 \quad (16'')$$

であるから

$$\int_{-1}^1 \sigma^m \Delta(\sigma) d\sigma = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N+1, \quad (18)$$

は容易に書下す事が出来る.

周知の如く, ϵ が大きい時の此の振動は極めて歪んだ積分曲線を持つ為には, polynomial の次数 N が十分に大きくないと良い近似を期待する事が出来ない. 然し一方 N の大きい事は代数方程式の解法を煩雑にするから. 此処では $N=5$ と撰び, 更に両端 ($\sigma = \pm 1$) で $\Delta = 0$ の条件を課して簡化化する事とした. 結果から見れば此の両端に重負をおいた事が全体としての一致を相当に害つた模様である.

$a_n = \epsilon x_n$ と書きかへ, 尚一時的に $y_x = \sum_{u=0}^x x_{x-u} x_u$ なる補助未知数を導入すれば (18) は容易に書下す事が出来る

$$m \sum_{k=0}^{10} \{1 - (-1)^{k+m}\} \beta_{k+m} y_x - \sum_{n=0}^5 \{d^2 \gamma(m+n+2) - \gamma(m+n)\} x_n - \frac{1-(-1)^m}{m+2} \epsilon^{-2} = 0 \dots (18')$$

$$m = 0, 1, 2, 3, 4.$$

但し β, γ は

$$\beta_p = \frac{1}{p(p+2)}; \quad \gamma(p) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\sigma^2} \cdot \sigma^p \cdot d\sigma \quad (19)$$

で定義せられる数係数である. 上述に依つて, (18') の方程式の数は二つ減らされて居り, その代りに両端からの条件.

$$x_0 + x_2 + x_4 = 1/\epsilon; \quad x_1 + x_3 + x_5 = 0 \quad (20)$$

が補はれる.

$$\lambda_n = d^2 \gamma(n) - \gamma(n-2); \quad \lambda_2/\lambda_4 = a, \quad \lambda_6/\lambda_4 = b \quad (21)$$

の記号を導入し, 且

$$x_4/x_0 = p \quad \dots\dots\dots (21')$$

とおけば, (18') の第一式 ($m=0$) と (20) の両式から

$$x_0 = \frac{1}{\epsilon \{(1-a) + (1-b)p\}}, \quad x_1 = -(x_3 + x_5), \quad x_2 = -\frac{a + bp}{\epsilon \{(1-a) + (1+b)p\}} \quad (22)$$

を得, 従つて未知数が a, p, x_3, x_5 の四つに還元される. そして之等を決定するものが (18') の残る四式 ($m=1 \sim 4$) である. 稍: 煩はしい書換えの後、夫等は次の如くなる.

$$\left. \begin{aligned} & \{ (0.1015873a - 0.3047619) + (0.1015873b - 0.0461761)p \} x_3 \\ & + \{ (0.1477634a - 0.4063492) + (0.1477634b - 0.0710401)p \} x_5 \\ & = (\lambda_4 - \lambda_6 a) + (\lambda_8 - \lambda_6 b)p, \\ & \{ (0.0923522a - 0.2031746) + (0.0923522b - 0.0497280)p \} x_3 \\ & + \{ (0.1420802a - 0.2955267) + (0.1420802b - 0.0795648)p \} x_5 \\ & = (\lambda_6 - \lambda_8 a) + (\lambda_{10} - \lambda_8 b)p. \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{(0.6095238a^2 - 1.0666667a) - (1.2698413a - 1.2190476 \sqrt{1+a^2} + 1.0666667b)p}{((1-a)^2 + 2(1-a)(1-b)p + (1-b)^2 p^2) \cdot \epsilon^2} \right. \\ & = 0.0507937x_3^2 + 0.1292929x_3x_5 + 0.0838273x_5^2 + (\lambda_4 - \lambda_6)x_3 + (\lambda_4 - \lambda_8)x_5, \\ & \left. \left\{ \frac{(0.3047619a^2 - 0.4571428a) - (0.6787879a - 0.6095238 \sqrt{1+a^2} + 0.4571428b)p}{((1-a)^2 + 2(1-a)(1-b)p + (1-b)^2 p^2) \cdot \epsilon^2} \right. \right. \\ & = 0.0415584x_3^2 + 0.1150849x_3x_5 + 0.0809857x_5^2 + (\lambda_6 - \lambda_8)x_3 + (\lambda_8 - \lambda_{10})x_5. \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

(23) 式の構造から明かなやうに, 所与の ϵ に対して此等の式を解く事はかなり困難であるから, 問題を逆にして, 与へられた振幅 ϵ に対して ϵ, p, x_3, x_5 を定める事とする. 即ち α を与へれば λ_n, a, b , が数値となり, 従つて (23a) から p を媒介変数として x_3, x_5 が求められる. (23b) の両式から ϵ を消去したものに之等の値を代入すれば p に関する六次の整方程式を得るから, 之を解いて p が定まり, 従つて問題が解決する. 例へば次表の如くである.

Table 2

α	p	x_3	x_5	ϵ
2.02	-0.05594	0.51063	-1.35315	1.0356
2.04	-0.13325	0.52452	-1.36395	1.5399
2.10	-0.71992	0.34939	-1.18660	4.0130

$\alpha = 2.00$ が $p = 0$, $\epsilon = 0$ に対応し, 振動は純粋単弦的であつて, この時近似解は完全に正確である. α と共に ϵ が次第に大きくなり, それと共に近似は次第に粗くなつて来る. $\epsilon = 1.0356$ に対する σ は

$$\sigma = \sqrt{1 - \sigma^2} \left\{ \begin{array}{l} 1.10077 + 0.37251\sigma - 0.03919\sigma^2 \\ + 0.52880\sigma^3 - 0.06158\sigma^4 - 1.40131\sigma^5 \end{array} \right\} \dots\dots (24)$$

であつて, 之を図示したものがオニ図中の実線である.

Table 3

σ	σ	$-\epsilon(1 - \alpha^2)\sigma$	$\sigma\sigma'$	Δ
0.00000	-1.00	0.00000	1.00000	0.00000
0.2149	-0.97	0.6318	0.5729	0.2347
0.2789	-0.93	0.7306	0.2562	0.0567
0.2987	-0.9	0.7131	0.1376	-0.0493
0.3245	-0.8	0.5416	0.0796	-0.1788
0.3643	-0.7	0.3771	0.2100	-0.1129
0.4399	-0.6	0.2137	0.4052	0.0189
0.5443	-0.5	0.0113	0.6228	0.1341
0.6639	-0.4	-0.2387	0.8148	0.1761
0.7862	-0.3	-0.5152	0.9452	0.1301
0.9022	-0.2	-0.7818	1.0027	0.0208
1.0075	-0.1	-1.0008	1.0005	-0.1003
1.1008	0.00	-1.1400	0.9604	-0.1795
1.1822	0.1	-1.1743	0.8935	-0.1608
1.2516	0.2	-1.0846	0.7860	-0.0985
1.3063	0.3	-0.8560	0.5943	0.0383
1.3394	0.4	-0.4815	0.2503	0.1688
1.3386	0.5	0.0279	-0.3121	0.2159
1.2860	0.6	0.6245	-1.1025	0.1220

σ	σ	$-\epsilon(1-\alpha^2\sigma^2)\sigma$	$\sigma\sigma'$	Δ
1.1593	0.7	1.1999	-1.9870	-0.0872
0.9360	0.8	1.5620	-2.6046	-0.2425
0.5980	0.9	1.4276	-2.3451	-0.0675
0.4715	0.93	1.2349	-2.0966	0.0683
0.2759	0.97	0.8114	-1.5272	0.2542
0.0000	1.00	0.0000	-1.0000	0.0000
N. B $\epsilon=1.0356, \alpha=2.0200.$				

その数値は才三表才一列に与へられている。此処には示さないけれども、等傾斜法に依る図式積分の結果と比較して、此の際の近似はさほど悪くはない。

しかし ϵ が更に大きいと近似の不良が目立つて来、 $\epsilon=1.5399$ に於て既に

σ に異の部分を生じ（この

模様は才二図に実線で示さ

れている）、 $\epsilon=4.0130$

に於ては σ そのものに僅か

ながら異の部分が見れる。

此の近似不良の原因の一つ

は $\sigma = \pm 1$ に於て強制し

た $\Delta = 0$ であらう。

然し本質的には顕著な歪に

應じて $P(\sigma)$ の次数を更に

上げる事が是非とも必要な

のである。そして此の事

は代数方程式の解法に多大

の労力を課する結果となる。

(24)の近似度を判断する

一つの目安として、之から

計算した $d\dot{s}/ds$ と、方

程式が同じ $s, \dot{s}$ に対して与へる $d\dot{s}/ds$ とを比較したものが才四表である。

近似積分の微分であるから両者の開きは相当に大きいけれども、概略の一致は顯

かである。尚此の際に微分方程式が満足される程度を計算してみた。

第三表の二、三、四、五列及び第三図にそれが示されている。

Table 4

s	$(\frac{d\dot{s}}{ds})_{\text{exact}}$	$(\frac{d\dot{s}}{ds})_{\text{approx}}$
-2.020	∞	∞
-1.818	0.6255	0.4607
-1.414	0.8863	0.5764
-1.010	0.8977	1.1440
-0.606	1.0369	1.2024
-0.202	1.0928	0.9931
0.202	0.9090	0.7568
0.606	0.4256	0.4550
1.010	-0.3943	-0.2332
1.414	-1.6388	-1.7140
1.818	-3.8922	-4.0051
2.020	$-\infty$	$-\infty$

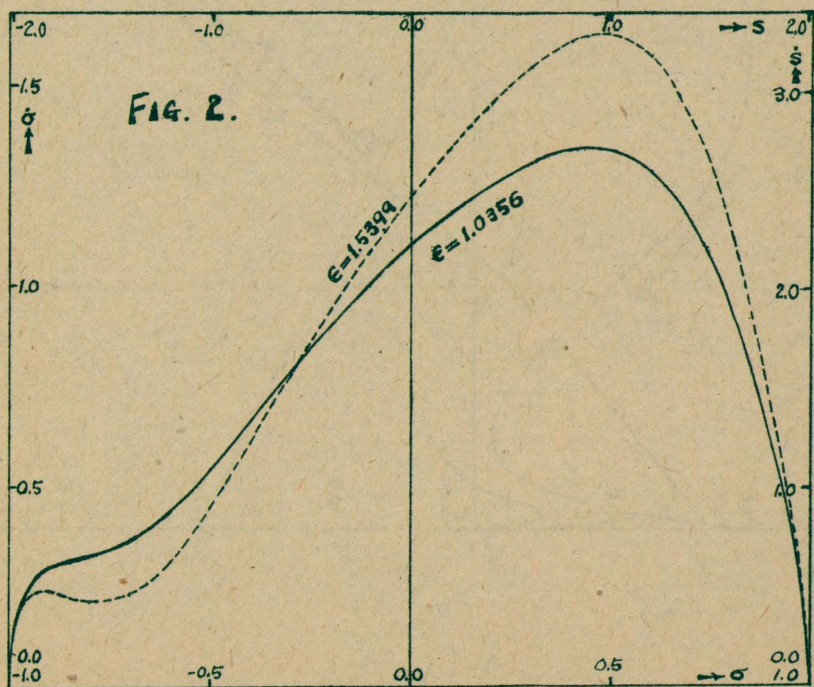
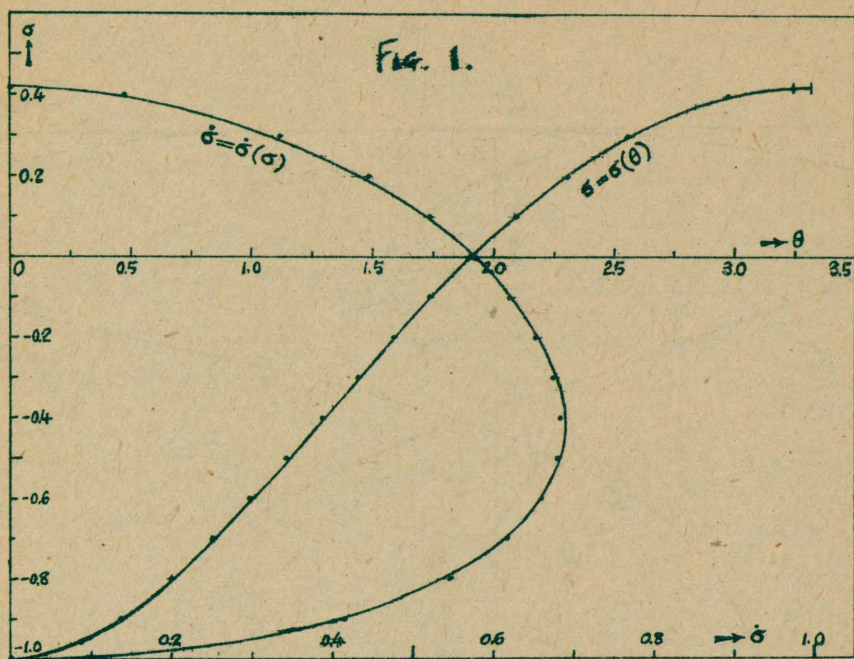


Fig. 3.

