

浅い水路に於ける転波について

栗原, 道德
九州大学流體工學研究所

椿, 東一郎
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7157276>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 6 (1), pp.1-27, 1950-04-15. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



浅い水路に於ける転波について

所 員 栗 原 道 徳
椿 東 一 郎

§ 緒 言

Vaughan Cornish が雄大な自然の背景に、まれたアルプ地方の人口水路に於て親しく観察した Roll Waves はどの様に美しかったであろうか、そして自然科学者である彼に如何なる印象を与へたであろうか。彼の著書¹⁾を読む同好の士に与へる銘感は極めて深い。そして誰でもがこれを研究室に移して研究の対象とすることに興味を感ずるであらう。

この様な意味に於て著者はこの美しい自然の背景を脳裏に浮かべながら Harold Jeffreys²⁾ 及び日高孝次³⁾の研究の後を追つて Roll Waves に現代流体力学のメスを加へて見たいと思ふ。然しなからこの問題の完全なる解答は微分方程式の解法にまつゐる数学的な困難を別としても尚今後その発展を期待される流体力学的に極めて重要な開水路内の乱れの状態とか抵抗法則に関する現代的な研究の成果を俟たねばならない事に深い意味を感ぜさせられる。

Jeffreys は roll waves は乱れた水路の流れの不安定性によるものとの見解のもとに 1925 年に自から開水路に於ける流速法則を実験的に求め、その測定結果を用ひて勾配が $1/100$ 以上の場合に roll waves は発生し得る筈であると結論して居る。然しなから後に至つて前記 Cornish の著の解説に於て彼自身この結果は「roll waves は普通に $1/10$ 程度以上の勾配に際して出現してゐる」と言ふ経験事実に反する故を以つて疑はしい roll waves はむしろ bore として考へべきではないかと述べてある。然しなから

1) V. Cornish, Ocean Waves and kindred geophysical Phenomena, Cambridge at the University press (1934)

2) 日高孝次訳, H. Jeffreys, Phil. Mag. Vol 49 (1925) P. 793.

3) 日高孝次, 農業と物理 日本農業気象学会, 鈴木教授記念論文集 昭和23年

ら後に述べる様に、roll waves の発生には底面の粗さ及び水深等も重要な要素となつてゐる筈であり、又には水路の勾配のみが後割をもつものではないと考へられるばかりでなく、更に現代流体力学は其の後に於て実験及び理論的に著しい発達して来てゐる。著者が roll waves を流れの不安定性に起因するものとしてこゝに再び問題として取り上げるのも主としてこの様な理由によるものである。

Cornish が観察した roll waves の主なものは i) Montreux に於けるケーブルカーの側に沿つた水路、ii) Grünbach の水路、iii) Guntenbach の水路に於けるものである、特に ii) に就いて 1904 年の夏期 8、9 月を通じて詳しく観察してゐる。

彼の著書の第 21 図を眺めるならば、誰でもが Grünbach の美しい流れも川底の粗さのために著しく乱れて居ることに気がつくであらう。

これに就いて Cornish は (i) の水路がセメント水路であることから Grünbach の転波の発生を底面の著しい凹凸に歸することの危険を警告して居る、然しながら (i) の場合の水深が又極めて浅い (平均 0.15) ことを思へば相対粗度は両者の場合に就いて余り著しい差違のある様に思はれない更に又 i) 及び iii) に就いて水深が増大した場合に roll waves が消失したことを観察して居る、従つて roll waves の発生のためには或程度以上に相対粗度の大きいことが必要であると考へるのが自然であらう。

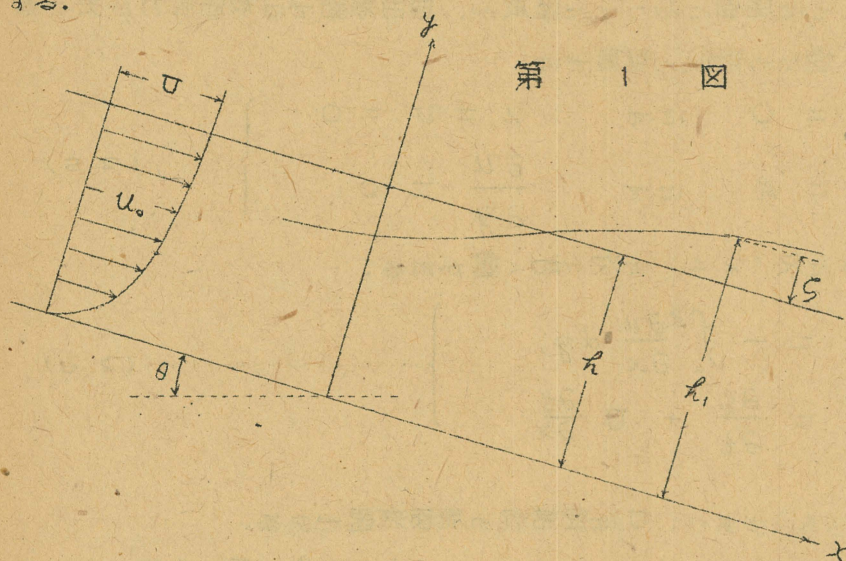
他方、水路の勾配は i) の場合に $1/75$ 、ii) 及び iii) の場合に夫々 $1/4$ 、 $1/22$ で、極めて急勾配の水路は居してゐる、これ等の事項を合せ考へるならば、roll waves の発生のためには底面の強い抵抗に打ち勝つて相当の流速を以て流れ得るため適当な関係にあることが必要なものと考へられる。物理的に見れば Cornish が既に指摘してゐる様に充分に発達した転波は底面摩擦に依つて足拂ひを受けながら重力の作用により流体が流下すると言ふよりもむしろ流体塊となつて転が落ちて行く現象に近いものであらう。この様な意味に於ては充分に発達した roll waves は Jeffreys の言ふ如く bore の性格を多分に持つて居るものであらう。然しながら Grünbach の Conduit の取り入れに附近に於ける roll waves の発性状態に関する Cornish の記述は明かに roll waves は流れの不安定による微小攪乱の増強に起因するものであらうことを示唆してゐる。従つて解析的に言ふな

うば、重力の作用を考慮するために導入さるべき流速分布が乱れの粘性と共に重要な役割を待つべきであり、これ等を同時に考慮した場合の流れの不安定性こそ roll waves の初期の発生条件を支配するものと考えられる。

吾々はこの論文に於て微小攪乱の方法を用ひ roll waves の発生条件を吟味し、Comish の観察事実に就いて若干の解説を行つて見たいと思ふ。

§2 2次元問題として、もともとの流れは水平と角 θ をなす斜面を水深 h で流れる定常流であつたとする。

流れの方向に底面に沿つて x 軸を、これと垂直に上方へ y 軸をとることにする。



然るときは流速 u_0 は勿論 y の函数であつて、 ν を一般に粘性係数として

$$\frac{d}{dy} \left(\nu \frac{du_0}{dy} \right) = -g \sin \theta \quad (2.1)$$

から定められる。

この様な定常流に極めて僅かな擾乱が与へられたと考へるのだが、こゝに水深の浅い場合のみに興味があるのであるからこれを長波として取り扱うことにする。従つて u , v を一般に x , y 方向の速度成分として

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + g \sin \theta \quad (2.2)$$

(4)

が成立つ。茲に h_1 は攪乱された場合の水深であつて

$$h_1 = h + \delta \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

と置くことにする。

連続の條件は二様に書くことが出来る。即ち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} &= -u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \int_0^{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

境界條件としては底面に沿つては速度が、自由表面では剪断応力が夫々零であることで、若々の近似の程度では

$$\left. \begin{aligned} y=0 \quad \text{にて} \quad u=v &= 0 \\ y=h \quad \text{にて} \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

となる。従つて又(2.4)は次の如く書かれる：

$$\left. \begin{aligned} v &= - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy, \\ v_1 &= \frac{\partial \delta}{\partial t} + U \frac{\partial \delta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

茲に $U = U(h_1)$ であり、 U は定常流の表面流速である。

扱て(2.2)に於て $u = u_0 + u'$ とおいて高次の微小量を省略し、(2.1)の關係を用ふれば若々は次式を得る(紛れることのないので結果式からは δ, δ_1 を取らる)：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{du_0}{dy} = g \cos \theta \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (2.7)$$

Viscosity ν は一定と考へられる場合と然らざる場合とあるが、後者の場合には近似法として適當な平均値 $\bar{\nu}$ を用ゐることにし以下 ν は常数として取扱ふことにする。

こゝに於て small oscillation として

$$\left. \begin{aligned} u &= f(y) e^{i(\sigma t - \lambda x)} \\ \delta &= \delta_0 e^{i(\sigma t - \lambda x)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

を導入するならば、(2.6)は

(5)

$$v = i f e^{i(\sigma t - \lambda x) \int_0^y f(y) dy} \quad (2.9)$$

$$S_0 \left(\frac{\sigma}{\lambda} - U \right) = \int_0^h f(y) dy \quad (2.10)$$

を与へる。更にこれ等の関係を用ゐれば (2.7) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dy^2} - i \frac{\lambda}{v} \left\{ \left(\frac{\sigma}{\lambda} - u_0 \right) f(y) + \frac{du_0}{dy} \int_0^y f(y) dy \right\} \\ = -i \frac{\lambda}{v} g S_0 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。(2.10) 及び (2.11) は以下の計算に於て用ゐる基礎式である。

§ 3. 一様な流れの場合。転波の物理的機構を探る意味に於て最も簡単な場合即ち $u_0 = U$ とし、 u_0 の変化に依る作用を度外し粘性の擾乱波に及ぼす影響だけを先づ調べて見る。これは又 (2.11) に於ける du_0/dy を無視することになるので問題の第一近似解を求めることになつてゐる。このとき (2.11) は

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - i \frac{\lambda}{v} \left(\frac{\sigma}{\lambda} - U \right) f(y) = -i \frac{\lambda}{v} g S_0 \cos \theta \quad (3.1)$$

となる。境界条件 (2.5) を満す (3.1) の解として昔々は容易に

$$\begin{aligned} f(y) = C_1 (e^{P_1 y} - e^{-P_1 y}) - \frac{g S_0 \cos \theta}{2 \left(\frac{\sigma}{\lambda} - U \right)} (e^{P_1 y} + e^{-P_1 y} - 2) \\ C_1 = \frac{g S_0 \cos \theta}{2 \left(\frac{\sigma}{\lambda} - U \right)} \cdot \frac{e^{P_1 h} - e^{-P_1 h}}{e^{P_1 h} + e^{-P_1 h}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る。茲に P_1 は次式の根である：

$$P_1^2 = i \frac{\sigma - \lambda U}{v} \quad (3.3)$$

最後に (2.10) は

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda} - U \right)^2 = g h \cos \theta \left\{ 1 - \frac{1}{P_1 h} \frac{e^{P_1 h} - e^{-P_1 h}}{e^{P_1 h} + e^{-P_1 h}} \right\} \quad (3.4)$$

を与へる。

極て粘性のない場合には P_1 の実数部も無限大になる。従つて (3.4) は良く知られた関係

$$\frac{\sigma_0}{\lambda} - U = \pm C_0 \quad C_0 = \sqrt{g h \cos \theta} \quad (3.5)$$

(6)

に帰着して仕舞ふ。そこで一般の場合に第一近似として傳播速度を C_0 とすれば、(3.3)は $(P_1 h)^2 \equiv \pm i 2\pi \frac{R}{M} \frac{h}{\lambda}$ となる。茲に入は波長が $\lambda = \frac{2\pi}{\chi}$ であり、 R 及び M は夫々表面速度に関する Reynolds 及び mach 数である。即ち $R = \frac{hU}{\nu}$ 、 $M = \frac{U}{C_0}$ である。こゝで簡單のために

$$2\pi \frac{R}{M} \cdot \frac{h}{\lambda} \equiv \mu^2, \quad \mu > 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

とおけば (3.3) は P_1 を実数部が正である根として

$$(P_1 h)^2 \equiv i \frac{\sigma_0 - \chi U}{\nu}, \quad P_1 h \equiv \frac{\mu}{\sqrt{2}} (1 \pm i) \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

を与える。茲に符号 $\pm$ は夫々正負の方向に進む波に関してある。(3.7) を (3.4) の右辺に代入すれば傳播速度 C の第二近似値を知ることが出来る。

1 に対して $e^{-\sqrt{2}\mu}$ を無視することが出来るならば、(3.4) は

$$\left(\frac{C}{C_0}\right)^2 \equiv 1 - \frac{1}{P_1 h} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

を与える。従つて吾々は正及び負の方向に進む波に対して夫々

$$\begin{aligned} C/C_0 &= \pm \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\mu} (1 \mp i) \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}\mu} + \frac{i}{2\sqrt{2}\mu} \\ &\quad - (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}\mu}) + \frac{i}{2\sqrt{2}\mu} \end{aligned}$$

を得る。これより傳播速度は何れの方角にも $\frac{C_0}{2\sqrt{2}\mu}$ だけ減少し、何れの波も $e^{-\frac{C_0 \chi}{2\sqrt{2}\mu} t}$ なる damping factor を以つて減衰して行くことが知られる。即ち波が波長の $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \mu$ 倍だけ進行する向に振幅は $1/e$ に、

energy は $1/e^2$ に減少して仕舞ふ。後に知らせる様に普通波動の生ずる場合には $\mu \geq 2$ であるから、吾々の近似も成立し従つて同時に waves も波長の程度を進行する方向に殆んど消滅して仕舞ふ。又この程度の近似に於て速度分布は (3.2) に依つて次の如くなる：

$$f(y) = \frac{g C_0 \cos \theta}{\frac{\sigma_0}{\chi} - U} (1 - e^{-P_1 y}) \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

§ 4 前節の解析から明かな様に定常流の流速が底面から表面まで一様なものであつたならば Cornish は何等の注意をいわれる事なく Grünbach の conduit を通ぎ去つたに違いない。即ち roll waves が発生するためには流速分布が一様でない事が必要なのである（全く異つた層流境界層内の振動現象もこの点に就いて軌を同じくして居ることは興味深いことである）。既に述べた様に乾波の生ずるためには摩擦と重力の作力が最も重要なものである。前節に於ても吾々にはこれ等2つの要素を取り入れては居るが元来定常流自身も亦粘性と重力の作用を受けて底面より表面に向つて次第に増大する底面勾配に沿つた流速分布を持つてゐる。従つてこの様な u_0 の分布を取り入れなければ重力の作用を十分に考慮したとは言へないのである。以上の事は (2.11) を次の如く、書き代へて見るならば容易に理解される：

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - i \frac{\chi}{\nu} \left(\frac{\bar{c}}{\chi} - U \right) f(y) = \frac{i\chi}{\nu} \left\{ (U - u_0) f(y) + \frac{du_0}{dy} \int_0^y f(y) dy - g s_0 \cos \theta \right\} \quad (4.1)$$

水路に於ては $U - u_0$ 及び du_0/dy は正であるから、(4.1) を (3.1) と比較するならば、右辺の括弧内の初めの二項は振幅 $f(y)$ を増大させるところ流速分布に起因する仮想的な作用力に對應してゐることが解る。この様にして概して言ふならば waves は粘性に依つて減衰すると同時に流速分布が一様でないと言ふ事に依つて増大されて行く。従つて或適當な条件のもとに流れは不安定となり乾波を生ずるものと考へられる。

又て (4.1) を一般に解くことは極めて困難である。そこで上述の様な考へ方に従つて、先づ流速を一様に U とした場合の解を勿論境界条件 (2.5) を満足してゐるを第一近似として、これを用ひて速度分布に起因する假想力を求め (4.1) に依り第二近似を計算する解法を採用することにする。

流速分布 u_0 は水路の條件が与へられた場合には (2.1) を解いて得られる。

その結果は ν が一定ならば拋物線型であり、一般乱流の場合には Nikradse の実験により確められた約数法則に従つてゐる。これ等の分布則を厳密に採用することは計算を極めて複雑化するものであり、吾々の重視するのは底面で零であつた流速が次第に増大して行く模様にあるから1つの

(8)

Parameter α に依つてこの度合を求し得て、而も境界条件を満たす最も簡単な形として

$$u_0 = U(1 - e^{-\alpha y}) \quad (4.2)$$

を採用することにする。但しこゝでは α は充分に大きき 1 に対し $e^{-\alpha h}$ を無視出来るものとする。この様な場合には $1/\alpha$ は displacement thickness δ になつて居り、 αh は δ を測つた水深を表わしてゐる。従つて又上の省略は普通の流れに際しては充分許さるべきものである。

(3.9), (4.2) を用ひて (4.1) は次の如くなる:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - i \frac{\chi}{U} \left(\frac{\sigma}{\chi} - U \right) f(y) = \frac{i \chi}{U} g S_0 \cos \theta \left[\frac{U}{C_0} e^{-\alpha y} \left\{ 1 - e^{-P_1 y} + \alpha h \left(\frac{y}{h} - \frac{1 - e^{-P_1 y}}{P_1 h} \right) \right\} - 1 \right] \quad (4.1)$$

右辺を零とおいた linear equation の2つの解は、(3.3) にて与へられる P_1 を用ひて、 $e^{P_1 y}$ 及び $e^{-P_1 y}$ である。従つて $f(0) = 0$ を満す (4.1)' の解 N として若干の代数演算の後に

$$f(y) = C_1 (e^{P_1 y} - e^{-P_1 y}) + \frac{g S_0 \cos \theta}{2 \left(\frac{\sigma}{\chi} - U \right)} \left\{ 2 - e^{P_1 y} - e^{-P_1 y} \frac{U P_1}{\frac{\sigma}{\chi} - U} (I_1 + \alpha I_2) \right\} \quad (4.3)$$
$$I_1 = \frac{1}{P_1 - \alpha} (e^{-\alpha y} - e^{-P_1 y}) - \frac{1}{P_1 + \alpha} (e^{P_1 y} - e^{-\alpha y})$$
$$= \frac{1}{\alpha} (e^{-P_1 y} - e^{-(\alpha + P_1)y}) + \frac{1}{\alpha + 2P_1} (e^{P_1 y} - e^{-(\alpha + P_1)y})$$
$$I_2 = -\frac{I_1}{P_1} + \frac{y e^{-\alpha y}}{P_1 - \alpha} + \frac{1}{(P_1 - \alpha)^2} (e^{-P_1 y} - e^{-\alpha y}) + \frac{y e^{-\alpha y}}{\alpha + P_1}$$
$$- \frac{1}{(\alpha + P_1)^2} (e^{P_1 y} - e^{-\alpha y})$$

を得る。

以下の計算に於ては簡単のために $\mu \gg 1$ として $e^{-2P_1 h}$ を $e^{-\alpha h}$ と共に 1 に対して無視することにする。

(4.3) に対して表面の条件、即ち $\left(\frac{df}{dy} \right)_h = 0$ を用ひ C_1 を定めるならば、吾々は流速分布として次式を得る:

$$f(y) = \frac{g s_0 \cos \theta}{\frac{\sigma}{\lambda} - \bar{U}} \left\{ 1 - e^{-P_1 y} - \frac{\bar{U} P_1}{2(\frac{\sigma}{\lambda} - \bar{U})} (L_1 + \alpha L_2) \right\}$$

$$L_1 = \frac{2P_1}{P_1^2 - \alpha^2} e^{-\alpha y} - 2P_1 \left(\frac{1}{P_1^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2(\alpha + 2P_1)} \right) e^{-P_1 y} + \frac{2P_1}{2(\alpha + 2P_1)} e^{-(\alpha + P_1)y} \quad (44)$$

$$L_2 = -\frac{L_1}{P_1} + \frac{2P_1}{P_1^2 - \alpha^2} y e^{-\alpha y} + \frac{4\alpha P_1}{(P_1^2 - \alpha^2)^2} (e^{-P_1 y} - e^{-\alpha y})$$

最後に傳播速度を与へるものとして (2.10) は

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda} - \bar{U} \right)^2 = g h \cos \theta \left\{ 1 - \frac{1}{P_1 h} - i 2\pi R \frac{h}{\lambda} \frac{5\alpha h + 4P_1 h}{\alpha h (\alpha h + P_1 h)^2 (\alpha h + 2P_1 h)} \right\} \quad (45)$$

となる。

以上この節に於ては吾々は流れの方向に進む waves のみを取り扱つて来た。そこで $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ (σ_1, σ_2 : real) とおくと $\frac{\sigma}{\lambda} - \bar{U}$ は positive である。従つて右辺の imaginary part が positive なるか negative なるかに従つて σ_2 も亦 positive 或は negative となる。

即ち流れは stable か unstable となる。

P_1, R に対する近似値 (3.7) を用ひて計算すれば

$$\text{Imaginary part of } \left\{ 1 - \frac{1}{P_1 h} - i 2\pi R \frac{h}{\lambda} \frac{5\alpha h + 4P_1 h}{\alpha h (\alpha h + P_1 h)^2 (\alpha h + 2P_1 h)} \right\}$$

$$= \bar{\Psi} / \Psi$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi} / \sqrt{2} \mu - 2\pi R \frac{h_0}{\lambda} \sqrt{2} \mu$$

$$\left\{ (5\alpha h + 2\sqrt{2} \mu \alpha h + \sqrt{2} \mu)^2 \alpha h - 2\mu^2 (\alpha h + \frac{\mu}{\sqrt{2}}) (5\alpha h + 2\sqrt{2} \mu) \right.$$

$$\left. + 4\mu^2 (\alpha h + \frac{\mu}{\sqrt{2}}) (\alpha h + \sqrt{2} \mu) + 4\mu^2 \alpha h (\alpha h + \sqrt{2} \mu) \right\}$$

$$\Psi = \sqrt{2} \mu \alpha h \left\{ (\alpha h + \sqrt{2} \mu)^2 \bar{\alpha} h^2 + 2(\alpha h + \frac{\mu}{\sqrt{2}})^2 \mu^2 \right\} \left\{ \bar{\alpha} h^2 + 2\sqrt{2} \bar{\alpha} h \mu + 4\mu^2 \right\}$$

..... (4.6)

を得る。こゝで $\bar{\Psi}$ は常に positive であるから $\bar{\Psi} / \Psi$ の符号は Ψ のみに依つて出来る。

こゝで Parameter を置きかへて

(10)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu}{\alpha h} \quad \dots \dots \dots (4.7)$$

更に

$$N = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{R}{(\alpha h)^2} \cdot \frac{h}{\lambda} \quad \dots \dots \dots (4.8)$$

とおけば (4.6) は

$$\begin{aligned} \mu/(\alpha h)^2 \equiv E(N, \xi) = & 1 - (25N-8)\xi - (120N-32)\xi^2 - (160N-72)\xi^3 \\ & - 100(N-1)\xi^4 + 80\xi^5 + 32\xi^6 \quad \dots \dots \dots (4.9) \end{aligned}$$

$$\mu/\sqrt{2}\mu(\alpha h)^2 \equiv F(\xi) = 1 + 8\xi + 32\xi^2 + 72\xi^3 + 100\xi^4 + 80\xi^5 + 32\xi^6$$

と \dots \dots \dots (4.10)

となつて、 σ_2 に対し吾々は近似的に

$$\sigma_2 = \frac{\pi}{2\alpha h} \cdot \frac{E(N, \xi)}{F(\xi)} \cdot \frac{1}{T} \quad \dots \dots \dots (4.11)$$

を得る。茲に T は Wave の Period である。

吾々の近似は 1 に対して e^{-2Ph} が省略出来る範囲で成立する。そこで $|e^{-2Ph}| < 0.05$ 或は 0.1 として見ると、多くの場合に $\alpha h \geq 6$ であるから > 0.25 或は 0.4 となる。従つて吾々の結果は $\xi \geq 0.2$ の場合には先づ信用して差支へないであらう。

Roll waves が出来るためには少なくとも $E(N, \xi) < 0$ でなければならぬ。今 1 つの critical case として $E(N, \xi) = 0$ となる様な N と ξ との関係を求めるならば第 2 図の如くなる。図中曲線 N の左側が流れの不安定な領域である。又転波発生の程度に密接な関係があると思われる ξ の値を知るために N の幾つかの値に対して $E(N, \xi)/F(\xi)$ の値を ξ の函数として求めた結果を第 3 図に示しておいた。更にこれ等の曲線より求めた $E(N, \xi)/F(\xi) = \text{const}$ の曲線は第 2 図に N -曲線と共に示されて居る。

最後に、流れに対して夏の方向に向ふ波に就いては (3.7) の二重符号の内負を用ひて、全く同様にして

$$\sigma_2 = \frac{\pi}{2\alpha h} \cdot \frac{E'(N, \xi)}{F(\xi)} \cdot \frac{1}{T} \quad \dots \dots \dots (4.11)$$

$$\begin{aligned} E'(N, \xi) = & 1 + (25N+8)\xi + (120N+32)\xi^2 + (160N+72)\xi^3 \\ & + 100(N+1)\xi^4 + 80\xi^5 + 32\xi^6 \quad \dots \dots \dots (4.12) \end{aligned}$$

を得る。 $E'(N, \xi)$ は常に正であり、その値は (N, ξ) の絶対値に較べてはるかに大である。従つて波の方向に進む波は直ちに damp して仕舞ふ。参考のためは第三図に点線を以つて $N = 0.5$ に対する $E'(N, \xi)/F(\xi)$ の値を図示しておいた。

§ 5 流れの諸係數に就いて 吾々はこの節に於て理論に導入された流れに関する諸係數に就いて少しく考察を行つて見たいと思ふ。

1) Turbulent viscosity 吾々は數式の取扱ひの便宜のために運動方程式に現はれた粘性係數を流れの断面を通じて一定であると仮定した。これは着しい近似法であり特に断面を通じて見た場合に Wave motion の速度分布に及ぼす影響は局部的には甚しいと思はれる、然しながうこの近似は Wave 全体としての性質を知る上には左程の誤を犯すことにはならないであらう、そして如何なる平均値を用ふべきか、問題となる。然しながう最も適當な平均値を見出すことは逆に言つて問題を殆んど完全に解くこと、同意義になる。従つてこゝでは簡単な 2, 3 の平均値を検べて見る。

Nikuradse に依れば滑かな管内の turbulent viscosity を u_τ を摩擦速度として $u_\tau h$ を以つて測るならばその分布は Reynolds 數に依り余り変化せず、特に 10^5 以上の場合には一定の形をとる様になる¹⁾ 従つて $\bar{D}$ として D の断面を通じての幾何学的な平均値を採用することにすれば

$$\bar{D} = \overline{D}. \quad \text{urch} \quad \text{-----} \quad (5.1)$$

なる法則を得る。

試みに最も簡単な作爲なきものとして算術平均をとれば、 $\bar{D}_0 = 0.058$ となる。Wave motion に及ぼす viscosity の影響は壁ざめ程著しいと思はれるので、水表面で零で壁ざめで 1 である様な直線的 weight をつけた平均値を求めると $\bar{D}_1 = 0.0572$ を得る。最後に前二者の中間にあるものとして壁ざめで 1、水表面で e^{-1} になる様な Weighted mean は $\bar{D}_2 = 0.057$ となる。これ等の例から知られる様に $\bar{D}$ も D の幾何学的な平均値とする限り (5.1) は成立し、 $\bar{D}$ の値は略々一定してゐて平均の取り方に余り左右されない。

脚註 1) Nikuradse: Forschungsheft 356 (1932) Abb. 27

以上の結果は元来滑かな底面を有する水路に適用されるべきであるが、乱流の発生機構から見て一般に粗い底面の水路に適用して差支へない。更に開水路に就いても成立つと考へられる。

2) Displacement thickness. 管或は平行板間の流れに就いて流速分布は

$$\left. \begin{array}{l} \text{滑かな場合に: } u = u_{\tau} \left(A + B \log \frac{u_{\tau} y}{\nu} \right) \\ \text{粗な場合に: } u = u_{\tau} \left(A' + B \log \frac{y}{K} \right) \end{array} \right\} \dots \dots (5.2)$$

で与へられる。茲に A , A' 及び B は常數であつて夫々 5.50, 8.48 及び 5.75 である。 K は equivalent roughness であつて、一様な砂粒を敷きつめたとした場合のその砂粒の直径である。若し第二式の型を用ひて A' を kh/ν の函数と考へれば、これは一般化され粗、滑及びその中間領域をも包括させることが出来る。又これ等の関係は單に閉じた水路にのみ適用されるべきでなく開水路に就いても成立つものである¹⁾。以下簡單のために (5.2) を次の如く書くことにする:

$$u = u_{\tau} \varphi(y) \dots \dots (5.3)$$

(5.3) を積分して平均流速 $\bar{u}$ を求めると $\bar{u} = u_{\tau} (\varphi(h) - 2.497)$ を得る。他方平行板間の流れに就いての測定値より $\bar{u} = u_{\tau} (\varphi(h) - 2.51)$ が得られる。そこで若くは平均流速に対しては

$$\bar{u}/u_{\tau} = \varphi(h) - 2.50 \dots \dots (5.4)$$

を、表面速度に対しては、(5.3) により

$$\bar{u}/u_{\tau} = \varphi(h) \dots \dots (5.5)$$

を用ゐることにする、従つて1に対し e^{-2h} を省略すれば (4.2) により

$$\frac{1}{\alpha h} = \frac{2.50}{\varphi(h)} \dots \dots (5.6)$$

を得る。従つて層流の場合には常に3である αh も乱流の際には流れの状態により変化する。然しなから大体6以上の値をとるものである

他方 (5.1) 及び (5.5) により $R = \frac{\bar{u}h}{\nu} = \frac{\varphi(h)}{D_0}$ であるから、(5.6) を用ひ (4.8) より N を求めるならば次の如くなる:

脚註1) 橋 東 一 郎: 流研報告 4 卷 2 号

細 井 正 延: 土木研究 (I)

$$N = a \frac{h}{\lambda} \varphi^{-1}(h), \quad a = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}^2}{V_0} \dots\dots\dots (5.7)$$

最後に後の便宜のためは：(3.5), (3.6), (4.7)及び(4.8)により表面速度 U に就いての Mach 数 M はその他の量 N, δ 及び α, θ と

$$M = \frac{5}{4} N \delta^{-2} = \sqrt{\tan \theta} \cdot \varphi(h) \dots\dots\dots (5.8)$$

なる関係にあることが知られる。

3) λ/h の下限に就いて、或る1つの水路に於て水深が与へられた場合に如何なる波長の攪乱が最も成長し易いかに就いて少しく考察して見る。

Roll waves 発生領域は第2図に変数 N, δ で示されて居る。(5.8)に依つて勾配及び粗度と水深が与へられて居るならばこの図表中で考へて居る攪乱は、焦点を頂点とし N -軸を軸とする拋物線上の点で表示されることが解る。攪乱の波長が減少すれば(5.7)により表示点はこの拋物線に沿つて次第に上方に移動し、始めに Roll waves 発生領域外にあつたとしても、がこの領域内に入つて来る。従つて増強されるべき攪乱の最初の波長は物理的に許さるべき最小の波長のものである。従つて具体的に水流の不安定領域を定める際に用ひべき λ/h の値としてはその下限を用ひなければならぬであらう。

扱へ λ/h は攪乱が元來 long waves と仮定されてゐるので当然或限度以下の値は取り得ないが、この制限は本質的なものではない。何か他に物理的に意味のある制限はないであらうか。

攪乱の波長 λ に対応して吾々は先づそれが現象として現はれる乱れを流れそのものに就いての波長、Spectrum を思ひ付くであらう。そこでこの Spectrum と λ との間に關係はないであらうかを少しく吟味して見る。

入が乱流の Spectrum の強度の強い部分に落ちるならば waves は余程振幅が大きくない限り turbulence により攪乱されて仕舞ひ、取り扱ひ上からは吾々は turbulence の構成單位として其の後の変化を窮めなければならぬであらう。乱流の中を流速と異つた速度で進行する波が乱されて仕舞ひこともなく、明かに waves として認められ、巨視的な流体力学の法則を適用し得るためには、強度も或程度以上強い事も必要であり、更にその波長は turbulence の Spectrum の中で強度の相當に強い長波長 L の幾倍かではなければならぬであらう。この事は waves (λ) の中に含まれた乱

れの状態(L)の統計的取り扱いの可能なためには最小限度入はLの幾位ぞなければならぬかと言ふこと、略々同じ意味を有するであろう。従つて吾々は普通の様に入る10Lとして、これ以下の波長のものはやがてturbulenceそのものに吸収されて仕舞ふと考へてよいのではないか。

Prandtl Reichardt 及 w motzfeld¹⁾ は距離dが約25cmである2つの平行板間の乱流(流速 $U = 100 \text{ cm/sec}$)のspectrumを測定してある。このspectrumをenergyに従つて長短の波長の部分に分けるならば、長波長の部分の平均振動数は略々1である。従つて吾々は次元考察の助を藉りて次の関係式を得る：

$$L = \frac{U}{n} \doteq 4d \dots\dots\dots (5.9)$$

この関係を使用するに當つて先のこれを L. F. G. Simmons²⁾ の測定結果と比較して見る。実験は風洞におかれた3" meshの後で6' 10" に於ける乱流のspectrumを種々の風速の場合に測定したものである。

(5.9)に依つてmeshの直後に於ける波長は $L = 4 \times 3 \times 2.54 = 30.5 \text{ cm}$ である。ここにLも亦turbulenceのscaleと共にmeshを遠ざかる程増大するものとするれば、6' 10"の後方に於ては $30.5 \times \frac{0.147 + 0.0025 \times \frac{62}{3}}{0.147}$ $= 44.6 \text{ cm}$ となる³⁾ 従つて $\frac{1}{L} = \frac{n}{U} = 30.5/44.6 \text{ cm} = 0.69 \text{ ft}^{-1}$ を得る。これはSimmonsの測定結果から前と同じ様式で求めた値、 0.63 ft^{-1} と略々一致してゐる。

Turbulenceのscaleに就いては吾々はturbulenceの場として与へられる自由なspaceの広さを基準として考へべきであるから、open Channel Flowの場合には(5.9)に於てdを水深hにおきかへるならば

脚註 1) L Prandtl, Beitrag zum Turbulenz Symposium: Fifth International Congress for Applied mechanics (1938).

2) G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A. 164 (1938).
(粘性流体 I. 429 頁).

3) H. L. Dryden, G. B. Schubauer, W. C. Mack, and H. K. Skramstad N. A. C. A. Tech. Rep. No. 581 (1937).
(粘性流体 III. 349 頁). Fig. T. Table II.

λ/h の下限として 4×10 を得る。これは勿論大さの程度を示すに過ぎないが、他方後節に見る様に Grinnbach の水路に於ける発生期の roll waves に就いては $\lambda/h = 36$ である。従つてこれは下限に極く近いものと考えられるので、吾々は roll waves 発生のお體的條件を求める際には攪乱の波長として

$$\lambda/h = 35 \dots\dots\dots (5.10)$$

程度のものであるを採用することにする。

§ 6 第4節に於て吾々は水路の流れの不安定性従つて roll waves 発生の可能性を数式の取扱ひ上から parameters N, ξ を用ひて吟味したが、今吾々は前節に求めた流れに関する諸係数を用ひてその結果を水流に固有な量、即ち勾配 t_g 、水深 h 及び粗度 k を用ひて表はすことが出来る様になった。

故て parameters N, ξ の代りに $(H), \Lambda$ を

$$H \equiv \left(\frac{N}{\xi}\right)^2, \quad \Lambda \equiv \frac{5}{4} N^{-1} \dots\dots\dots (6.1)$$

と定義するならば、(5.7) 及び (5.8) により次の關係式を得る：

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{t_g} \theta &= \beta(H), \quad \varphi(h) = \frac{U}{u_x} = \beta^{-1}\Lambda, \quad M = \Theta\Lambda, \\ \beta &= \frac{5}{4a} \frac{\Lambda}{h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.2)$$

この様に具體的の意味も明瞭に、 (H) は水路の勾配のみ、 Λ は流れの函数のみに關係した parameters である。

第2図の N -曲線及び $F(N, \xi)/\xi F(\xi) = -0.2$ の曲線に対応する $(H), \Lambda$ の關係を (6.1) により計算した結果は第4図に示されてゐる (Λ -曲線は N -曲線に、 $\Lambda-0.2$ -曲線は $F/\xi F = 0.2$ 曲線に対応してゐる)。又此等の代表的な値は第1、2及び3表に次節に述べる水路の勾配、粗度及び水深と共に示されてゐる。

表中イタリックで書かれてゐるものは次の2つの極限を示すものである：その初めのものは第2図の曲線に原点より引かれた切線の切点に対応するので (H) の下限を示し、第2のものは同じく曲線の極小に対応し Λ の上限を示すものである。

(16)

第一表

$$\sigma_2 = 0, \quad \beta = \frac{1}{6.19}$$

(H)	Λ	M	$\sqrt{\tan \theta}$	φ	粗	滑	
					h/k	u_{th}/v	h, cm
0.634	180	1.14	0.102	11.15	2.91	9.6	0.097
0.68	230	1.56	0.110	14.23	10.0	33.0	0.21
0.8	2.67	2.13	0.129	16.54	21.1	83.4	0.35
1.0	2.95	2.95	0.162	18.27	50.4	166.	0.48
1.2	3.06	3.67	0.194	18.93	65.9	209.	0.49
1.4	3.12	4.37	0.226	19.30	76.1	251	0.50
1.6	3.16	5.04	0.259	19.56	84.6	279	0.49
1.8	3.17	5.71	0.291	19.63	86.5	285	0.46
2.0	3.17	6.34	0.323	19.63	86.5	285	0.43
2.5	3.14	7.86	0.404	19.45	81.0	269	0.36
3.0	3.11	9.33	0.485	19.25	74.6	245	0.30
3.5	3.08	10.8	0.566	19.07	68.4	229	0.26
4.0	3.04	12.2	0.646	18.80	62.3	204	0.217
4.5	3.00	13.5	0.726	18.57	56.8	186	0.189

$$(H) = \left(\frac{N}{g}\right)^2 = 6.19 \sqrt{\tan \theta}, \quad \Lambda = \frac{5}{4} N^{-1} = \frac{\varphi}{6.19}, \quad (H) \Lambda = M = \varphi \sqrt{\tan \theta}$$

$$\varphi = 8.48 + 5.75 \log \frac{h}{k}, \quad \text{粗なる場合}$$

$$\varphi = 5.50 + 5.75 \log \frac{u_{th}}{v}, \quad \text{滑なる場合}$$

第 2 表

$$\sigma_2 = 0, \quad \beta = \frac{1}{6.4}$$

(H)	Λ	M	$\sqrt{\tan \theta}$	φ	粗	滑	
					h/k	u_{th}/v	h, cm
0.634	180	1.14	0.099	11.52	3.4	11.2	0.11
0.68	230	1.56	0.106	14.72	12.1	40.1	0.24
0.8	2.67	2.13	0.125	17.09	47	105	0.42
1.0	2.95	2.95	0.156	18.88	65	214	0.58
1.2	3.06	3.67	0.188	19.58	85	252	0.61

1.4	3.12	4.37	0.219	19.97	100	331	0.62
1.6	3.16	5.04	0.250	20.22	107	363	0.60
1.8	3.17	5.71	0.281	20.29	112	373	0.56
2.0	3.17	6.34	0.313	20.29	112	372	0.53
2.5	3.14	7.86	0.391	20.10	105	347	0.43
3.0	3.11	9.33	0.469	19.90	96	317	0.36
3.5	3.08	10.8	0.547	19.71	89	295	0.31
4.0	3.04	12.2	0.625	19.46	81	270	0.27
4.5	3.00	13.5	0.703	19.20	73	240	0.23

$$\textcircled{H} = (N/5)^2 = 6.4 \sqrt{F_0 \theta}, \quad \Lambda = \frac{5}{4} N^{-1} = \frac{\varphi}{6.4} \quad \textcircled{H} \quad \Lambda = M = \varphi \sqrt{F_0 \theta}$$

$$\varphi = 8.48 + 5.75 \log \frac{h}{k} \quad \text{粗なる場合}$$

$$\varphi = 5.50 + 5.75 \log \frac{u_{gh}}{D} \quad \text{滑なる場合}$$

第 3 表 $\frac{E(N,5)}{EF(8)} = -0.2 \quad \beta = \frac{1}{6.4}$

H	Λ	M	$\sqrt{F_0 \theta}$	φ	粗 $\frac{h}{k}$	滑 $\frac{u_{gh}}{D}$	h-cm
0.848	1.79	1.52	0.132	11.46	3.3	10.86	0.09
0.90	2.20		0.141	14.07	4.4	30.9	0.17
1.0	2.54		0.156	16.24	22	74.1	0.25
1.2	2.77		0.187	17.70	39	133	0.28
1.4	2.86		0.219	18.30	51	168	0.39
1.6	2.93		0.250	18.74	61	202	0.40
1.8	2.97		0.281	19.00	68	223	0.40
2.0	2.99		0.313	19.13	71	235	0.39
2.36	3.01	7.11	0.369	19.25	74	247	0.36
2.5	3.01		0.391	19.25	74	247	0.34
3.0	2.99		0.469	19.13	91	235	0.29
3.5	2.97		0.547	19.00	68	223	0.26
4.0	2.95		0.625	18.87	64	212	0.23
4.5	2.92		0.703	18.68	59	196	0.20
5.0	2.89		0.781	18.50	55	182	0.18

(6.2)の關係は係數 β の數値を除いて、吾々が若し turbulent viscosity 及び流れの速度分布に就いて(5.1)及び(5.3)を許容するならば一般に成立する。従つて一般に Θ は $\sqrt{t_0 \theta}$ に Λ は ψ に比例してゐる、第4図の Λ -曲線は roll waves 發生の條件を定性的に勾配及び流れの函数で示してゐるものである。 Λ -曲線はそれに依つて囲まれた領域の外部では roll waves は發生し得ない限界を示してゐる。従つて $\Theta = 0.634$ に対応する勾配よりも小さい勾配の水路では水深、粗度の如何に拘らず roll waves は發生しない、又流れの函数 ψ が $\Lambda > 3.17$ を与える程に水深が深い場合には勾配の如何に拘らず roll waves は發生し得ない。一般には1つの勾配に対しては1つの critical な ψ があつて、 ψ がこの値以上になる様な水深では roll waves は發生し得ない。一般に ψ は水深と共に増加するから以上の事は勾配に対しては1つの下限があつて、この限界より強い勾配の水路に於ても水深が或限度以上に深い場合には roll waves は發生しない。そしてこの限度は勾配と粗度の函数である。

§ 7 Roll waves 發生の限界.

吾々は第4節に於て水流が微小攪乱に対して安定であるか或は不安定であるかの限界條件として、微小振動の damping coefficient が零となる條件を採用した。この限界は確かに流れの安定性に対しては1つの標準を与えるものと考へられる。然しながら第5節 3)に述べた様な乱れの機構に際してこの限界が同じく不安定性に対しても標準になり得るかは疑問が残される。

充分に乱れた状態の流れに際して与へられる微小攪乱が巨視的に見て永い間持続し得ると考へる事は困難に思われる。むしろ或時間の後には乱されてその energy は乱れの energy に変換されては異いと考へる方が自然である。従つて微小攪乱が流れの不安定性のために次第に増強されるためにもその増強率は或程度以上大きくなければならないであろう。roll waves 發生のためにはこの絶対値は小ではあるうか或數値以上でなければならぬ。そしてその値は乱れの強さ従つて $(=u^2 \times \rho)$ と共に増加すると考へるべきではなからうか。然しながらこの限界に就いて吾々は現在これを予測する妥當な方法を見出すことは出来ない。そこで極めて暫定的ではあるが憶

乱波が1波長進む間にそのenergyが10%増加し得ない場合には攪乱は発達し得ないと言ふ條件を1つの極端な場合として導入してみる。

今仮りにこの限界を採用するならば、普通には $\alpha \approx 0.2$ であるから(4.11)に依つてroll waves発生 of 1つの極端な限界條を得る。

$$-\frac{E(N, \alpha)}{F(\alpha)} \geq 0.2$$

この様な意味に於てroll waves発生 of 限界條件は第四図に於ける Λ_0 -曲線と $\Lambda_0 = 0.2$ -曲線との間に引かれた1つの曲線が示され、それは乱れの強さが小なるときには $\Lambda_0 = 0$ -曲線に、又大なる時には $\Lambda_0 = 0.2$ -曲線に近いものと考へられる。

§ 8. 数値的考察

(6.2)に於ける β の値を定めることが出来るならば、昔々は前節までの結果を直ちに具体的な水路に就いて数値的考察を行ふことが出来る。

先づ $\bar{U}_0$ の値として水路の断面を通じて算術平均値0.058を用ゐれば(5.1)により $\alpha = 0.271$ である。更に γ_h の値として(5.10)を用ゐれば(6.2)により $\beta = 1/6.19$ となる又 $\bar{U}_0$ として壁ぎわに重みをつけた平均値を、 γ_h として(5.10)より小さな値を採用すれば、何れも β を小さくする傾向がある。(例へば $\bar{U}_0 = 0.057$, $\gamma_h = 34$ とすると $\beta = 1/6.5$ となる)。そこで以下の計算では $\beta = 1/6.19$ 及び $\beta = 1/6.4$ を採用することにする。

この値を用ゐ(6.2)により計算した結果は第1, 2及び表に示されて居り、又第四図には $\beta = 1/6.4$ の場合の $\sqrt{A_0}$ と φ との關係が図示されてある。

表を一瞥して解ることは先づroll wavesは勾配が $1/100$ 程度より大きければ発生し得ること、この結果はJeffreys¹²⁾の理論の結果と一致してある。第二には底面の相対粗度が相當に着しいか、滑かな場合には水深が極めて浅いことが必要であり、その程度は勾配の弱い程甚しいことである。以下少しくこの模様を数値的に検べて見やう。

勾配の下限附近では乱れも極く弱いから $\alpha = 0$ をroll wavesの発生條件とし用ゐるならば、下限條件は第1, 2表の第2行に与へられてある。勾配は略々 $1/100$ であり、水深は滑かな場合には1耗程度である。然るにJeffreysによれば開水路に於ては層流から乱流への転移のCritical

Reynolds 数は 310 である。従つて今の場合には吾々が普通に経験し得る程度の粗底面に際しては流れは層流になつては舞ふことが知られる。

従つて吾々の結果は最早適用出来ないが、簡単な実験によればこの様な緩い勾配に於ける層流に於ては roll waves は発生しない。そこでこの下限より少しく勾配を増加した場合、 $\Theta = 0.68$ $\Lambda = 2.30$ に対する具体的條件を調べて見る。第 1, 2 表の第 3 行目によれば、 $\sqrt{g\theta} = 0.110$, 0.106 ; $\varphi = 14.23, 14.72$; $h/k = 10, 12$; $u_{ch}/v = 33.40$; $h = 0.21, 0.24$ cm であつて勾配の極めて僅かな増加に対して流れの様子は著しく異つてゐる。滑らかな場合に就いて見ると、Reynolds 数は $33 \times (14.23 - 2.5) = 388, 490$ となつて流れは既に乱れ始めてゐる。従つて吾々は勾配 $= 1/100$ はやはり實際上の勾配の下限ではあるが Reynolds 数が Critical Reynolds 数の極く附近にある場合が roll waves 発生の下限條件であると言ふことが出来るであらう。自然の状態の勾配の緩かな水路に於て余り轉波の見出されないのはこの様な事情によるのではなからうか。

勾配が $1/30$ 程度になるとこの困難は可成解消されて仕舞ふ。例へば第 3 表によれば $tg \theta = (0.187)^2 = 0.35$ に対しては $(h/R)C = 39.9$ であり、 $R = 0.5$ mm としても限界水深は 2 握である。そしてこの場合には $\frac{u_{ch}k}{\nu} = 42$, $\frac{\sigma h}{\nu} = 3 \times 10^4$ であり、充分乱れて居り然も殆んど完全相に近い状態にある。

以上の様に roll waves は勾配の急な程発生し易いと考へられるが、系統的にこの關係を明らかにするために自然水路の与條件として仮りに流量をとつてゐる。即ち流量が与へられた場合に如何なる勾配の水路に転波を生じ易いかを調べて見る。この目的のためには第 2 図の φ -曲線上の各点を通じて流量一定の曲線の切線 $\delta\varphi/\delta\sqrt{g\theta}$ (a, a' ; b, b' ; c, c' ; etc) を引くならば、これ等の切線は $\sqrt{g\theta}$ の小さい時には更の急角度を以つて φ -曲線と交はり、 $\sqrt{g\theta}$ の増加に伴つて交角は緩かくなる。特に $\sqrt{g\theta} = 0.2$ の附近に於てその変化は著しい。値は小さいが正の角度で交はつて居る。それ等切線の φ -曲線の内部にある部分では roll waves は発生し得るので

あるから、上の事は勾配の緩い水路で roll waves が発生し得るならばそれより急勾配の水路にても亦発生し得ることを示している。但し勾配が余り急になると（例えば $\tan \theta = 1/6$ ）との関係は著しくはないが逆になる。この様にして、roll waves は粗度を適当に選ぶことにより勾配が $1/100$ 程度以上の水路では発生せしめ得るが、自然水路の場合には勾配の急になる程出現の確率を増し、 $1/6$ 程度以上の場合にはその傾向は著しくなる。この結果は roll waves について経験的事実をよく説明してあるものではないか（§ 1 参照）。

§ 9 実例に就いて。吾々はこの節に於て前節までに得られた理論を Cornish に依りて観察された3つの roll waves の実例に適用して見たいと思ふ。

（これ等の場合には何れもてが大きく充分乱れて居るので第3表を用いることにする）

1). Montreux の conduit に於ける roll waves.

水路の性質： cement floor, 14" wide 最大勾配 = $1/1.75$.

水深は、波の上にて 0.2, 谷にて 0.1.

従つて、平均水深 $h = 0.15 = 0.38 \text{ cm}$, $\tan \theta = 0.572$, $U_c = 13.6 \text{ cm/sec}$ である

流れの状態を知るためには吾々は粗度に就いて若干の推算を行はねばならない。先づ cement floor に対し砂粒の大きさを 0.35 粒とし、粒の間隔をその2倍と仮定するならば equivalent roughness R は $0.35 \times 0.65 = 0.23 \text{ mm}$ である。¹⁾ 従つて $\frac{h}{R} = 16.5$ であり、(5.2) により $\phi = \frac{U}{U_c} = 14.94$ を得る。そして表面速度は $U = 14.94 \times 13.6 = 203 \text{ cm/sec}$, 平均速度は $\bar{U} = (14.94 - 2.50) \times 13.6 = 169 \text{ cm/sec}$ である。念のために、浅い水路にも信用される Bazin の実験公式を用ひこの結果を確かめてみる。 R , I を水路の径深及び勾配とも、 σ を粗度係数とすれば Bazin の式は

$$\bar{U} = \frac{87}{1 + \sqrt{R}} \sqrt{RI} \text{ (m-sec) unit} \quad (10.1)$$

と与へられる。上に与へられた諸数値を用ひて計算するならば $\sigma = 0.075$ を得る。この値は平滑なる上塗或は鉋削せる木材の粗度係数 $\sigma = 0.06$ よ

り少々大きいのが妥当のものと思はれる。²⁾

板 $\beta = 6.4$ として (6.2), (6.1) により

$$H = 64 \sqrt{g\theta} = 4.84, \quad L = \frac{g}{64} = 2.38; \quad N = 0.525, \quad \xi = 0.239$$

を得る。この Conduit の (N, ξ) 表示点は才 2 図に記入されている様に roll waves 発生領域の中にある。第三図より $E/\beta F(\xi) = -1.3$ を得るから (4.11), (5.6) は $\sigma_2 T = -0.34$ を与へる。即ちこの水路では roll waves は極めて活発に発生することが推察される。

最後にこの水路の勾配に対する限界粗度は第 2 表より $(h/R)_c \approx 56$ である。従つて水深が現在の 3.4 (= 56/16.5) 倍以上になれば roll waves は消失して仕舞ふ。この結果は Cornish の記述にある様に、Conduit の水量がひどく増加した場合に roll waves は消失したと言ふ事実を説明してゐるものであろう。

2). Grönnbach の conduit. Cornish に依つて与へられた水路に関する資料は次の通りである:

勾配 (最小) = $1/4$, $\sqrt{g\theta} = 0.267$; 水深 $h = 2' = 50.8 \text{ cm}$;

流速 $U = 10 \text{ ft/sec} = 305 \text{ cm/sec}^{1)}$

底面、滑かな切石、但接合面には多少の凹凸あり。これ等の数値を用ひて、 g 等を計算すれば

$U\tau = 18.8 \text{ cm/sec}$, $g = 305/18.8 = 16.2$, $h/R = 22$, $U = 258 \text{ cm/sec}$ を得る。前同様にして Bazin の粗度係数 ρ を計算すれば 0.23 となる。これを i) 鉋削せざる木材, 切石, 煉瓦積に対する $\rho = 0.16$, ii) 割石積に対する $\rho = 0.46$ に対比すれば妥当な値と言ふことが出来るであろう。

脚註 1) C.F. Colebrook, C.M. White. Proc. Roy. Soc. A (1937), p. 376, Fig. 9.

2) 物部長鑑, 水理学 (岩波書店), 86 頁。

脚註 1) Cornish は單に流速は略々 10 ft/sec . であると述べて居り、その測定方法は明かでないが恐らば表面流速を測定したものであるう。

この水路に対する限界粗度は $(h/R)_c \doteq 65$ であり、水深が現在の約3倍になるまで roll waves は消失しない。この結果に関連する観察事実として“水路の入口に於ける水深が3' ~ 3½' になった場合には美事な roll waves が出来てゐた”と言ふ Cornish の記述がある。

・ 前同様に昔々は容易に

$N = 0.494$, $\xi = 0.38$; $E(\xi)/\xi F(\xi) = -0.6$, $\sigma_2 T = -0.145$ を得る。 (N, ξ) 表示点は勿論第2図の roll waves 発生領域にあつて、波が1波長進む毎にその energy は約30%増加する。

最後に、この水路に於ける roll waves の発生部分である水路の入口附近で波は1分に120の割合で発生して居た。波の傳播速度は $c = \sqrt{gh \cos \theta} = 71 \text{ cm/sec}$ であり、進行速度は $305 + 71 = 376 \text{ cm/sec}$ である。従つて其の波長は $\lambda = 376 \times \frac{1}{2} = 188$ である。この様にして roll waves の発生後向もない時期に於ける λ/h の値として $188/5.04 = 37$ を得る。この値は第5節に於て豫め使用したところのものである。

3) Guntenbach の conduit とその謎。

計算に必要な資料は次の通りである：

勾配 $= 1/22$, $\sqrt{t_g \theta} = 0.213$; 水深 $h = 2' = 5.08 \text{ cm}$;

流速 $U = 8.5 \text{ ft/sec} = 259 \text{ cm/sec}$.

・ 底面、荒削の切石が可成の凹凸を以つて敷かれてゐる。

これ等の値より直ちに次の結果を得る：

$U_c = 150 \text{ cm/sec}$, $\phi = \frac{259}{150} = 17.26$, $h/R = 33.6$, $N = 0.46$, $\xi = 0.40$

この水路の勾配に対する限界粗度は第2表より、 $(h/R)_c \doteq 50$ である。

従つて水深が3'を越す様な場合には roll waves は発生し得ない。これに関連した観察事実としては“大雨の後に水深が5' となつた場合に roll waves は全然なかつた”なる記述がある。

以上の様に roll waves の発生限界だけに就いて言ふならば計算の結果は観察に矛盾することはない。又前と同様に roll waves の増強率を計算すれば $10\frac{1}{2} T_1$ として Grunnbach conduit の場合と同程度の値を得られるので、Cornish の記述にある様な急激な増強は説明出来ないが、この点は roll waves の発生部分の状態を少しく吟味することにより後に述べる様に妥当な説明が得られる。然しながら如何にしても不思議に

思われることは Cornish の粗度に関する記述と流速と水深及び勾配だけから求めた R の値より $R = 34$ とが調和しない事である。同じ水深であるに拘らず Guntenbach の conduit の方が Grunnbach の conduit より著しく滑かであることは記述から得られる概念と全く反対である。

この問題の解釈として次の2つの場合が考へられる：(1) この conduit は見かけ上凹凸が著しくはあるが実際には可成滑かなのである。その理由としては、(i) 水路の粗度が水深に較べて極めて大なる場合には従来の実験的に求められた抵抗法則から著しく外れて抵抗は極めて小さくなる。(ii)

この conduit の上流部分は溪谷より流出する岩石のために敷石が磨滅されて縦方向に著しい溝が生じて居る程であるから、roll waves の発生を見る下流部分の敷石も亦小さな凹凸は消失され大きな滑かな凹凸になつてゐる。

そのために抵抗は著しく減少してゐる。(2) としては、Cornish も“この水路の凹凸は著しく水深を定める事は困難ではあるが平均として2程度である”と述べてゐる。従つて流速法則(5.2)に適用されるべき水位の基準面の水深を2以上にとらなければならぬのではないか。

(i) の理由は全く將來の実験研究に俟たねばならないが實際の凹凸が水深の $1/5$ 程度の場合にも(5.2)は略々成立することが確かめられてゐるので余り期待することは出来ない。又(2)の理由だけで説明する事は少しく数値的に考へれば困難である事が解る。従つて最後に残るものは(ii)であり、これは又頷くことが出来るものである。勿論(2)も多少興味するべきとは思われぬ。若しこの解釈が許されるならば、roll waves の発生限界に就いては略々理論的に説明されたものと言ふことが出来る。

最後に Guntenbach の conduit に於ける roll waves の発生の状態に就いて少しく考察して見たいと思ふ。先ず roll waves の発生条件としては波長が水深の35倍以上である様な水路の横断面内では一様な性質を持つ2次元的な攪乱の与へられることが必要である(5.10 参照)。

この conduit の上流部分には多くの縦方向の溝が刻まれてゐるためこの様な2次元的な攪乱波は生じ難く縦溝が消失し然も水路を横断する水溜の現はれてゐる下流部分に至つてこの種の攪乱波が生じ得るために roll waves は下流部分に於てのみ現はれるものと思われる。

Cornish によれば transverse pool は深く、その下流側の rill の水深は $\frac{1}{2}$ 程である。そしてこの附近で roll waves は頻繁に発生する。pool から流れ出る水はこの rill にて流速を速める。連続の条件からその流速は平均の流れの略々 $\frac{4}{3}$ 倍されておると考えられる。又この縮流のために鉛直の方向の乱れも亦流れの方向の乱れと共に略々同じ contraction の比に比例して減少する。従つて turbulent viscosity は contraction を γ とすると γ^2 に比例して減少する。仮りに流速分布は水路の他の部分と相似に保たれておるとしても、この contraction の結果 (4.8) により N は γ^{-3} 倍され、これに反し $\bar{u}$ は $\gamma^{-\frac{1}{2}}$ 倍されるのみである (4.7), (4.8) 及び (3.6) 参照)。仮りに $\gamma = \frac{1.5}{2.0}$ としてみると $N = 0.46 \times 2.36 = 1.09$, $\bar{u} = 0.4 \times 1.07 = 0.43$, 従つて第2図より $E(\bar{u})/EF(\bar{u}) = 3.6$. 更に $\alpha h = 7$ として (4.11) により $\sigma T = -0.81$ を得る。流速分布の変化を考慮すればこの数値は更に増大される事を思へば、水路を横断する適当な大きさの pool とこれに続く rill の存在は roll waves の突発的発生に重要な役割を持つて居るものと考へられる。

4) 京都大学工学部土木教室に於ける実験¹⁾ この研究に於ては水路の底面が滑らかな場合に色々な勾配に就いて層流から乱流への轉移附近の様子が詳細に測定されてある。その中に勾配の大きいものとして $1/50$ と $1/100$ の場合が含まれてある。研究者の一人岩垣雄一氏に依れば勾配が $1/100$ 以下では roll waves は全く発生せず、 $1/100$ の際には層流より乱流への轉移点附近に於て roll waves の発生が認められる。この事は第3節に於て述べ、roll waves 発生条件の下限に関する理論の結果を裏付けるものであらう。又勾配 $1/50$ の場合には乱れた状態にて水深が 5~6 粒になるまで roll waves は認められる。この場合も底面に於ける剪断応力は余り大きくないから第1及び2表の数値を用ゝれば、 $\sqrt{c_g \theta} = 0.141$ に対して限界水深として夫々 0.40, 0.50 cm を得る。従つてこの場合にも理論は大体に於て実測の結果を説明してあるものといふことが出来る。

脚註 1) 石原藤次郎, 合田 健, 岩垣雄一, 薄層流に関する研究,

日本土木学会誌 (未刊). 未発表の研究結果を内示して下さつた研究者の方々に茲に改めて謝意を表します

§ 10 層流の場合

第四節までに展開された理論はそのまま、層流の場合にも適用される。然しこの場合には粘性も一定であり定常流の性質も極めて明確であるから何等の疑念もなく数値計算を経て実験と比較することが出来る。然しなから層流の不安定性はそのまま、層流の乱流への転移と極めて密接な関係があり、むしろ向後はこの面より観察すべきである。実際簡単な小型水路による実験はこの理論を裏付けしてゐる (roll waves の発生する場合には、流量を増して行く際にこれが顕著に発達すると殆んど同時に乱れ始める)。従つて乱流に関する極めて重要な問題として研究を後の機会に譲り度いと思ふ。

§ 11 總括

1.) Vaughan Cornish に依つて記述された平らな底面をもつ水路に於ける転波の発生原因は水路の初め或は途中にある pool からの流れに潜在する微小攪乱による流れの不安定によるものと考へ、攪乱を long waves として微小攪乱の手法によりその不安定性を検べた (§ 2—§ 4)。

その結果は水路の性質及び流速分布等の函数である $parametess (N, \xi)$ に依つて第 2 及び 3 図に示されてゐる。即ち roll waves 発生の限界として増幅係数の γ が零となる様な限界曲線、及び増幅率の数種の値に対応する (N, ξ) 曲線が求められてゐる。

2) 理論の結果を具体的な水路に適用させるために $parametess N, \xi$ に含まれる流れに関する諸係 (粘性係数, displacement thickness, 波長と水深の比の下限) が現在までの乱流に関する研究結果を用ひて推定されてゐる (§ 5)。

(3). (2) の結果を用ひて (1) の結果が水路の勾配、粗度及水深を用ひて書き改められてゐる (第 4 図, 第 1, 2, 3 表) 第 1 及び 2 表は水路の乱れが余り強くない場合、第 3 表は底面の粗度も著しく勾配も強い場合の roll waves の発生限界を示すものである。既して言へば, roll waves は勾配の強い、底面の粗い水路を流れる浅い水流に発生し易い。即ち水路の勾配が $1/100$ 以上の場合には粗度、水深が適当な値の場合に roll waves は発生可能であるが、勾配の小なるときは水深は極めて浅く、自然の条件のもとでは発生の確率は小さい。勾配の増加と共に発生し易くなり $1/10$ 程度

以上の勾配にては容易にroll wavesは発生し得ることが知られる(§6-§9)

4) 第10節に於て実例として Cornish により詳しく観察された Montreux, Grünbach及び GuntenbachのConduitに於けるroll wavesの発生が試みられてゐる。何れの場合にも理論は略々事実を説明してゐると思はれる。

然しながら最後の者に就いてはこのConduitに於ける突発的なroll wavesの発生を河床の著しい特異性に起因させなければならなかつた

最後に未発表ではあるが京都大学工学部土木教室に於ける南水路に於ける層流より乱流への転移附近に於ける薄層流の実験の中勾配 $1/100$ 及び $1/50$ に関するものに含まれた転波に関する資料は吾々の理論を裏付けて居るものと思はれる。

最後にこの研究は文部省科学研究費の援助により行はれたものであることを附記しておく。

昭和24年9月30日 流体工学研究所に於て

图 2

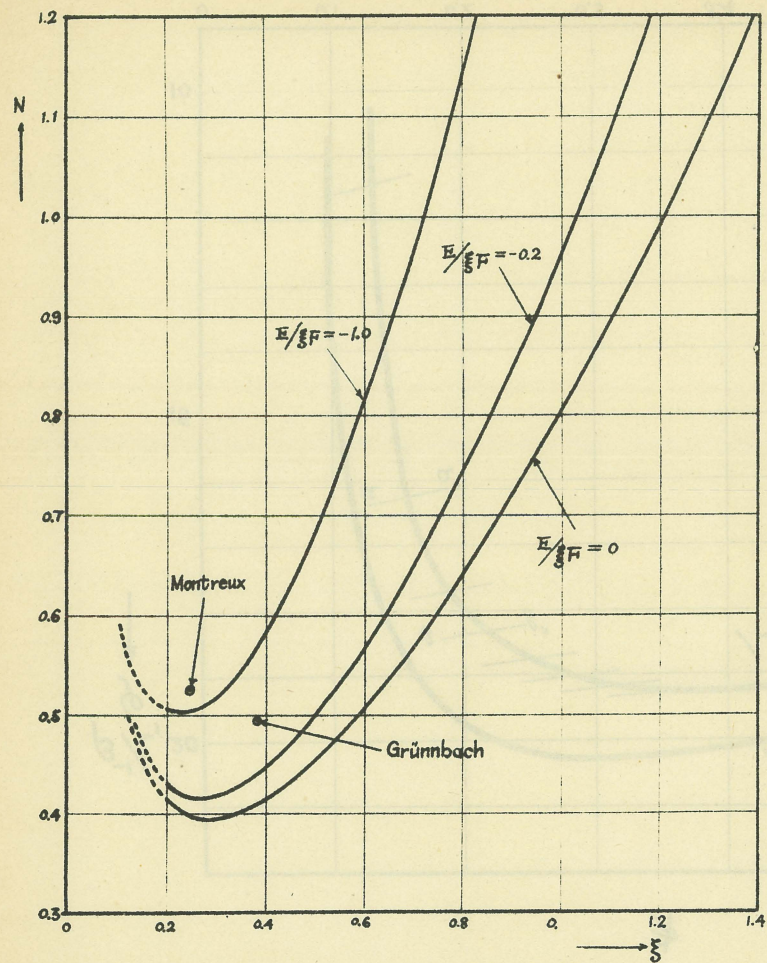
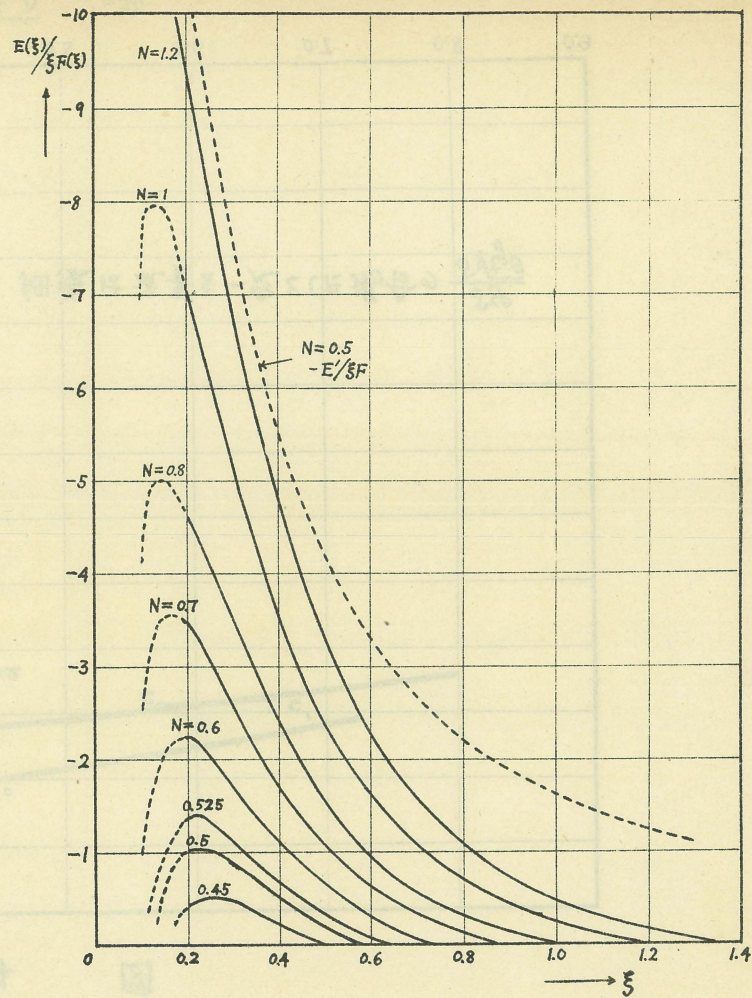


图 3



第 4 図

