

層流境界層方程式の一近似解法(二)

山田, 彦兒
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7157271>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 5 (2), pp.1-10, 1950-03-25. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



層流境界層方程式 の一近似解法 (二)

所 員 山 田 彦 兒

(昭和二十四年二月十一日受理)

§. 4 Schubauer の楕円柱

上述の如く $n=0.1$ ($\phi \equiv 0$) の兩式を採用した近似が相当に良いので、良く試みられる Schubauer の楕円柱⁽¹¹⁾に之を用いて見よう。(5)を $(W', \mathcal{Q}')$ に就いて解き、 $\omega = u_1' \zeta$ ($\zeta = \delta^2/\delta V$) の置換えを行つて整頓すれば

$$\left. \begin{aligned} -\zeta' &= \frac{1}{u_1} \frac{B_0 b_1 - B_1 b_0}{A_0 b_1 - A_1 b_0} + u_1'' \zeta^2 \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{A_0 b_1 - A_1 b_0} \\ -\mathcal{Q}' \zeta &= \frac{1}{u_1} \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{A_0 b_1 - A_1 b_0} + u_1'' \zeta^2 \frac{A_0 a_1 - A_1 a_0}{A_0 b_1 - A_1 b_0} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

u_1, u_1', u_1'' の値としては、圧力極小の点迄は Schubauer の與えた値から夫々図上で内押したものを、それ以後は Howarth の修正値⁽¹²⁾を、更にその後は Schubauer の値を適宜に修正して用いる事とした、第十一表の左半が之である。

計算は2回行つて見た、一回は Howarth に倣つて、圧力極小点 ($X=1.3$) に於て Pohlhausen 法の値に接続した、此処で $\omega=0, \mathcal{Q}=0$, そして此処の δ^2/V の値としては、Schubauer の計算した Pohlhausen 法の値 (から推定した値) 23.3 を用いた、此等の初期値から出発して Runge-Kutta 法に依つて得られたものが第十一表中央の I 列の値であり、第二図中の I 曲線である、 $-\omega+\mathcal{Q}$ が 2 に達したところが剝離点であるから、

Pohlhausen 法の場合よりも剝離の方に近寄る事は明かであるが、遂に剝離は起らない、二面目も矢張り Pohlhausen 法の値に接続したのであるが、接続点は充分に加速部分にある $X=0.5$ であつて、初期値は Schubauer の

(11) G.B. Schubauer : Air Flow in Separating Laminar Boundary Layer, N.A.C.A. Tech. Rep., No. 527 (1935).

(12) 脚註 (5) 参照

(それから図式に内挿した)計算値 $\omega = 0.380$ で、勿論此処で $\vartheta = 0$ である。やはり Runge-Kutta 法に依つて積分を行い、結果は第十一表右側の II 列及び第二図中の II 曲線で示されている。剝離をしない事 I と同じである。

第 十 一 表

X	u_1	u_1'	u_1''	(I)		(II)	
				ω	ϑ	ω	ϑ
0.5	1.215	0.353	-1.52			0.3800	0.00000
0.55	1.231	0.287	-1.15				
0.6	1.244	0.233	-0.915			0.3336	-0.08171
0.65	1.254	0.191	-0.750				
0.7	1.262	0.155	-0.620			0.2743	-0.08171
0.8	1.274	0.1094	-0.426				
0.9	1.282	0.0734	-0.285			0.1791	-0.05434
1.0	1.288	0.0449	-0.215				
1.1	1.292	0.0240	-0.180			0.0754	-0.01448
1.2	1.295	0.0089	-0.175				
1.3	1.295	-0.0054	-0.210	0.0000	0.0000	-0.0211	+0.00987
1.4	1.294	-0.0240	-0.255				
1.5	1.290	-0.0500	-0.260	-0.2180	0.0229	-0.2394	0.01319
1.6	1.284	-0.0750	-0.255				
1.7	1.275	-0.1000	-0.220	-0.5448	0.0821	-0.5890	0.06985
1.8	1.264	-0.119	-0.140				
1.9	1.252	-0.126	-0.005	-0.8745	0.2819	-0.9408	0.27777
2.0	1.240	-0.116	+0.170				
2.1	1.230	-0.0960	+0.260	-0.8283	0.6245	-0.9050	0.6758

Schubauer の実験的に見出した剝離点は $X = 1.99 \pm 0.02$ であるから、上に得られた結果は近似法の粗雑な事を示しているように見えるかも知れない。実際 Howarth の近似法或は Kärman-Millikan の近似法⁽¹³⁾は、実験値よりも若干早目に剝離点を與えさえするのである。然し境界層方程式を精密に解く事と、それが実験値に一致する事とは自ら別の問題であつて、之に就ては後に一言するであらう。

尚 I と II を比較して眼につく事は、圧力極小点附近の僅かの速度分布の相

(13) Th. v. Kärman & C.B. Millikan: On the theory of Laminar Boundary Layers Involving Separation, NACA Tech. Rep., No. 504 (1934). Millikan: J. Aero. Sci., 3 (1936), pp. 91-94. Doenhoff: NACA Tech. Note, No. 544 (1935)

異が、減速領域に於て次第に拡大されて表われる事であつて、之は減速領域の速度分布が彎曲点を有して不安定である事と関連するのであらう。此の点のみから見ても、減速領域の計算の信頼度乃至これと実験との対応に就ては、慎重に吟味される必要がある。

§ 5. Hiemenz の円柱

Hiemenz の円柱 (直径 9.75 cm)⁽¹⁴⁾ の周りの速度分布は秒単位で

$$U_1 = 7.151 X - 0.04497 X^2 - 0.0003300 X^5$$

と與えられ、剝離点の実験値は中心角で $80^\circ \sim 82^\circ$ 、之に対して Hiemenz 法は 82° ($X = 6.98$)、Pohlhausen 法も亦 82° を與えるが、Prandtl-Görtler⁽¹⁵⁾ では 80° ($X = 6.80$) となる。何れも実験値の範囲内に在つて格別の事は無いのであるが、然し各近似法と與える速度分布の模様は、剝離点に近づくと共に大きく開いて来る、第三図に $X = 6.75$ cm の点の之を示した。

それ故現在の方法に依つて Pohlhausen 近似を更に進めて見る事とし、上と同様に圧力極小点 ($X = 6.050$ cm) で接続 ($w = 0, \eta = 0$) する。此処の δ^2/ν としては Pohlhausen の計算値を内挿して 1.96 を得、之を用いた。第十二表が計算結果であつて、矢張り Runge-Kutta 法を用いて

第十二表

X	w	η	$-w + \eta$
6.050	0.0000	0.0000	0.0000
6.250	-0.2319	-0.0463	0.1856
6.500	-0.6345	-0.0514	0.5831
6.750	-1.264	0.0600	1.324
6.830	-1.612	0.213	1.825
6.853			2.000

$X = 6.230$ 迄進み、そこから剝離点迄は極めて近いので、図上で外挿した。剝離は $X = 6.853$ (80.5°) に見出されて Görtler の値に近づく。円柱で

(14) S. Goldstein : Modern Developments in Fluid Dynamics, I, pp. 148-153, 161-162.

(15) H. Görtler : ZAMM, Bd. 19 (1939), S. 129-140.

は Hiemenz 法が従来信用されているので、速度分布は此の近似で Hiemenz に近寄るものと予想したところ反対となり、第三図に示した如く ($\phi=0$) の曲線)、やはり Görtler に近づいた、近似を進める事に依つて Görtler 側に移動する事は、その近似の良否は別として、正しい解が Görtler 側に在る事を示唆するものと考えて誤らないであらう。

§6. 近似計算式の特異点

Pohlhausen の近似に於て ω' (或は λ') が無限大となるのは $\omega=2.00, -2.96$ ($\lambda=12, -17.76$) の二点であつて、積分範囲に此の何れかが入る際には近似が破れる事周知の通りである、現在 ($n=0.1$; $\phi \equiv 0$) は変数が

第十三表

η	ω_1	ω_2	ω_3
5.3944	-----	-----	0.000
2.5	1.156	11.987	-7.025
2.25	0.768	11.004	-7.649
2.0	0.416	10.002	-8.300
1.75	0.066	9.004	-8.951
1.6955	0.000	-----	-----
1.5	-0.276	8.000	-9.608
1.25	-0.620	7.000	-10.264
1.0	-0.963	6.005	-10.924
0.75	-1.302	5.001	-11.583
0.5	-1.640	4.003	-12.245
0.25	-1.973	3.000	-12.910
0.0	-2.306	1.999	-13.575
-0.25	-2.643	1.001	-14.240
-0.5	-2.978	0.003	-14.908
-0.75	-3.308	-0.998	-15.577
-1.0	-3.638	-1.998	-16.247
-1.25	-3.966	-2.999	-16.917
-1.5	-4.296	-4.000	-17.588
-1.75	-5.000	-4.623	-18.261
-2.0	-5.998	-4.951	-18.933
-2.25	-6.997	-5.279	-19.607
-2.5	-8.002	-5.601	-20.281

ω, ϑ の二つであるから、此の特異点は ω, ϑ 面上に線となつて現われ、それは (18) から見て

$$A_0 b_1 - A_1 b_0 = 0 \quad (19)$$

と與えられる、左辺は ω, ϑ に関する双三次の整式であるから、例えば ϑ を決めて三根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を求める、斯くして得られたものが第十三表であつて、之を第四図中に $\omega', \vartheta = \infty$ の曲線として示した。

同図中には剝離條件 $2 + \omega - \vartheta = 0$ を示す直線、主流が物体前端に切線的に入射する条件を指示する点 $Tq.-Ent.$ 、即ち $(\omega = 0, \vartheta = 0.135625)$ と記入されている、同図から知れるように、 $Tq.-Ent.$ から剝離点迄、或は圧力極小点で Pohlhausen に接続 ($\omega = 0, \vartheta = 0$) して剝離点に至る、等の積分には大凡特異点を横切る恐れは無いのである、唯剝離線が特異点を示す一分岐と略々重なっているが、此の兩線は精密解に於ては恐らく一致すべき事が予想されるので、剝離線より前に此の特異点に出会う際には、此の交点を以て剝離点の近似位置と見做すべきであらう、図中に示した点線は、其処に記入されている如く、既に計算した幾つかの場合の積分曲線である。

現在の立場から見れば、Pohlhausen 法は積分曲線を ω 軸上に限定し、Howarth の近似法は之を図の Howarth 曲線上に限定するものと見做され、Dryden の改良法も亦或一本の曲線を特に選り出す、即ち凡ゆる積分曲線を特定の一曲線に対応づけ、此の特定曲線上の事柄を以て凡てを代表せしめる手段に外ならない、従つて二媒介変数法の良否は、実用上多く取扱われる型の流れに対する此の対応の良否に依つて決定され、何れの方法と雖も、何時の場合にも良好であるとは期待出来ない、此の欠点は現在の二媒介変数法としても、更に多くの媒介変数を用いる方法に対しては同断であるけれども、唯その適用範囲が従来のもより広められるのである。

岐点に於ては $u_1 = 0$ であるから (18) から

$$B_0 b_1 - B_1 b_0 = 0, \quad B_0 A_1 - B_1 A_0 = 0$$

を必要とし、此處では (19) が成立してはならない事から

$$B_0 = B_1 = 0 \quad (20)$$

となる、ところが (20) は (11) と同じであつて、既述の如く、 $\omega = 0$ としでは根を持たない、即ち第四図の面上では岐点に相應する点は無く、従つて前方岐点から積分を始める事は出来ないのである、然し岐点から圧力最小点

附近迄は Pohlhausen 法が充分実用的なものであるから、それ以後に現在の方法を接続して充分な近似を期待し得るであらう。

(20) の中に ϕ を媒介常数として残置すると、之は ω, η, ϕ 空間に於ける一本の空間曲線を表わし、此の曲線は ω, η 面とは交らないけれ共、 ϕ を適当に選べば、之に平行な平面と交っている。此等の交点の数列を ω, η 面に投影して示したものが第四図中の (St.-Pt.) である。

§ 7. 全域に適用し得る計算式

上述の如く ϕ を適当に選べばその ω, η 面には岐点に相応する ω, η 値が得られる、それ故此の時の方程式の特異点が積分の邪魔にならない位置にあるならば、現在の近似計算法は境界層の全域に亘つて一律に行い得る事となる。此の事が可能であるか否かを試みる爲に $\phi = 1.81466$ を採つて見た。此の時の岐点が $\omega = 1.89500, \eta = -2.07605$ で與えられる事は既に知るところで在り、又 第 1 表を用いて、 A, B なる二次式、 a, b, d なる一次式の係数は第十四表の如くなる。

第 十 四 表

	abs. $\omega \eta$	ω ω^2	η η^2
A_0 {	0.05725461	0.01129279	-0.01630226
	0.00753962	-0.00198413	-0.00750356
A_1 {	0.03796445	0.00569720	-0.00725521
	0.00498925	-0.00122022	-0.00520570
B_0 {	0.7234463	-0.00482871	0.03479089
	0.03015879	-0.00793650	-0.03001440
B_1 {	0.2740872	-0.00193262	0.02042228
	0.01495685	-0.00363093	-0.01582267
a_0	0.02258573	-0.00793650	0.01507932
a_1	0.01377373	-0.00363093	0.00785731
b_0	-0.03260439	0.01507947	-0.03001440
b_1	-0.02080036	0.00709953	-0.01582267
d_0	-0.195337	-1.000000	1.000000
d_1	-1.000000	———	———

第十四表を基礎として方程式の特異点、剥離の線、及び $Tg-Ent.$ の点は前と全く同じ計算を繰返して得られ、之を図示したものが第五図である。

$Tg-Ent.$ が $\omega=0, \eta=-1.57864$ である事を挙げる以外に数値を述べる事は差控えよう、 ϕ の採り方が小さ過ぎた爲に $St-Pt.$ が特異点に極めて近く、此の儘では $St-Pt.$ から解いて行くには用立たないけれども、必要とならば全域に適用する計算式が得られる事を示すに充分であろう、又此の儘でも境界層の殆んど全域に用いる事が出来、その際には $St-Pt.$ 附近だけ、 $\phi=1.31466, \eta=-1.31466$ と置いて得られる Pohlhausen 類似の方程式を用いる事は良い。

第五図には $\phi=0$ の際の舊の剥離線と特異点の線が書き込まれていて、之等と新しい其等と比較して目立つ事は、剥離線と之に重なる特異点曲線とがその相対位置を殆んど変えない事である、之は ω, η, ϕ 空間に於て兩者の面が同様の位置を占めている事である、媒介変数を更に増加すれば、兩者を表わす超曲面は次第に一致する事を期待出来るであろう。

$\phi=1.31466$ と採る事に依つて起る近似度の変化を知る爲に、Hartree の場合に戻り、 $u_1=0$ の場合と、至るところ剥離点状態にある流れとを計算して見た、前者に於ては $\omega=0, \eta=-1.57864$ 即ち

$$\sqrt{\frac{u_1}{\nu x}} \delta = 5.2382, \quad \sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} \cdot \frac{\tau_0}{\rho u_1^2} = 0.33675, \quad \sqrt{\frac{u_1}{\nu x}} \delta_1 = 1.7630$$

が得られ、後者に於ては

$$\eta = -0.090096; \quad \omega = -0.85913, \quad \eta + \phi = 1.14087$$

となつたが、之等を §2 の其等と比較して、殆んど差異の無い事を知るのである。

§8. 二、三の注意

以上述べた來た前に依つて此の積分法の精度は相當に期待出来るのであるが、その反面、一般には聯立方程式の数値積分を行う事となる爲に、第一近似である Pohlhausen 法に較べて多大の労力が要求せられる、方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= \alpha_0(x)F_0(\omega, \eta) + \beta_0(x)G_0(\omega, \eta) \\ \frac{d\eta}{dx} &= \alpha_1(x)F_1(\omega, \eta) + \beta_1(x)G_1(\omega, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

の型を持ち、此処に α, β は問題毎に與えられる数値、 F, G は問題に無関係

な既知の函数であつて、主な努力は、数値積分のステップ毎に與えられる ω 、 η に対して F, G の値を計算する事に集中している。それ故斯る計算を大量に行う場合には、予め必要の範囲(第四図参照)に亘つて F, G の数表を作製しておいて、要求される値を内挿によつて求めるか、或はグラフから読取る如く計画するのが良いであろう。

此処では図式積分法を二三試験して見た、即ち先づ Pohlhausen 法で求めた ω_0 を $d\theta/dx$ の右辺に用いて θ_1 を圖式に積分し、之を $d\omega/dx$ の右辺に用いて ω_1 を積分し、以下之を繰返すのである。一例は第一図の Howarth の場合に記入されているが、此の場合の如く収斂の良い時にも積分曲線が動かない迄には数回の繰返しを必要とし、不都合の場合に至つては収斂を保証し得ないので在つて、單に此の儘では成功を期し難い。

次に解の近似性に就いて述べよう、層流境界層方程式の解法は何れも近似度を判定し得る簡単な一般法を持たないのであつて、本法とてしその例に漏れないのであるが、結局は解が條件と方程式を充せば足るのである。條件に就いて現在問題は無いのであるから、得られた解を方程式(1) $\Delta=0$ 即ち(4)に投入してそれがそれが零から外れる度合を以て近似の一指標とすることが出来る。方程式には二面微分迄を含んでいるから、たとえ積分曲面に於ける近似が精密であつても、 $\Delta=0$ からの外れは大きい事を予期しなければならない。

$u_1 = \alpha_0 - \alpha_1 x$ の際の Howarth の精密解は正確な解の一つの標準と考えられる、従つて之と大差ない現在法の解(53)を又標準と見做して、その $\Delta=0$ からの外れを計算しよう、51の記号を用いて今の場合

$$\begin{aligned} -u_1^2 \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \Delta &= \left(\frac{1}{2} \frac{\omega'}{\omega} - \frac{1}{1-x} \right) f^* \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{1}{6\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f^2 \right) \\ -u_1^2 \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_1} (u_1 u_1' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) &= \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{1}{6\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

となるから、若干の数値計算の後に第十五表が得られ、之を以て標準的な誤差の指標と見る事が出来るであらう、尚要請された通りに、 Δ は $\eta=0.1$ の間に於て二面符号を変化している。

最後に境界層方程式そのものの近似性に就いて一言しよう、剥離点に近づいて境界層が厚さを増すと $\partial p / \partial y = 0$ の仮定が近似性を欠き従つて dp/dx の値の採り方が不確定となる事、そしてその不確定の範囲内に於ける dp/dx

第 十 五 表

η	$X = 0.08$		$X = 0.119$	
	$-u_1^2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} (u_1 u_1' + v \frac{\partial u}{\partial y^2})$	$-u_1^2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \Delta$	$-u_1^2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} (u_1 u_1' + v \frac{\partial u}{\partial y^2})$	$-u_1^2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \Delta$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.389	-0.178	0.096	-0.031
0.2	0.704	-0.196	0.344	-0.084
0.3	1.136	-0.067	0.687	-0.099
0.4	1.556	0.143	1.072	-0.026
0.5	1.916	0.323	1.442	0.109
0.6	2.166	0.358	1.741	0.233
0.7	2.257	0.186	1.916	0.196
0.8	2.140	-0.130	1.910	-0.008
0.9	1.767	-0.348	1.668	-0.228
1.0	1.097	0.000	1.135	0.000

の選び方に依つて剝離点位置が大いに変化する場合のある事は、例えば Howarth⁽¹⁶⁾も述べているところである。従つて此の点のみから見ても実験位置に剝離点を見出す事を以て直ちに解の近似性の規準と考える事は出来ないのであるが、更にもう一つの理由で境界層方程式が剝離点附近に於て Navier-Stokes 方程式との近似性を失つて来る、即ち此の近似性は実験的に得られた精密な $p(x, y)$ を境界層方程式に用いるだけでは救われないのであつて、壁面の曲率から来る方程式の補正を度外視して、更に $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の項を補正しなければならぬのである、或は寧ろ実験的に得られた $\frac{\partial}{\partial x} (\frac{p}{\rho} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ を境界層方程式の $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ に代用して始めて実験との一致が期待出来るというべきであらうか。

元来 $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を取去る事は微分方程式の性格を一変するのではあるけれども、此の事から起る誤謬は合理的な p 、或は実験値としての p を用いる事に依つて或程度迄救われるのだとあらう。然し $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が省略出来ない数値に達する場合には、上述の如く、実験値としての p その儘ではなく、何らかの手段で見積られた $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に対して補正を行い、仮の p を用いるのであれば實際との数値的一致は期待し得ないであらう。

一例として Hawarth の場合を採り、それは第一近似として $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を省略したものであると考える、即ち §3 の近似解は此の問題の一つの近似解と見做して良い、それ故此の近似解を用いて補正項 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の値を、判離点の近く ($\alpha = 0.119$) で計算して見たものが第十六表である、勿論近似解の二階微分であるから大体の目安を突えるに過ぎないけれども、此の補正項が省略し得ない程度に達する場合の在るべき事を了解するに足りるであろう、因に此処では

$$-u_1^2 \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) = (1 - \alpha)^{-1} = 1.135$$

であり、又 $R = \alpha_0^2 / \alpha_1 \nu$ であつて、 $\alpha = 0.119$ に於て略、 $u_1 S_1 / \nu = \sqrt{R}$ の関係にある事を付言しよう。(了)。

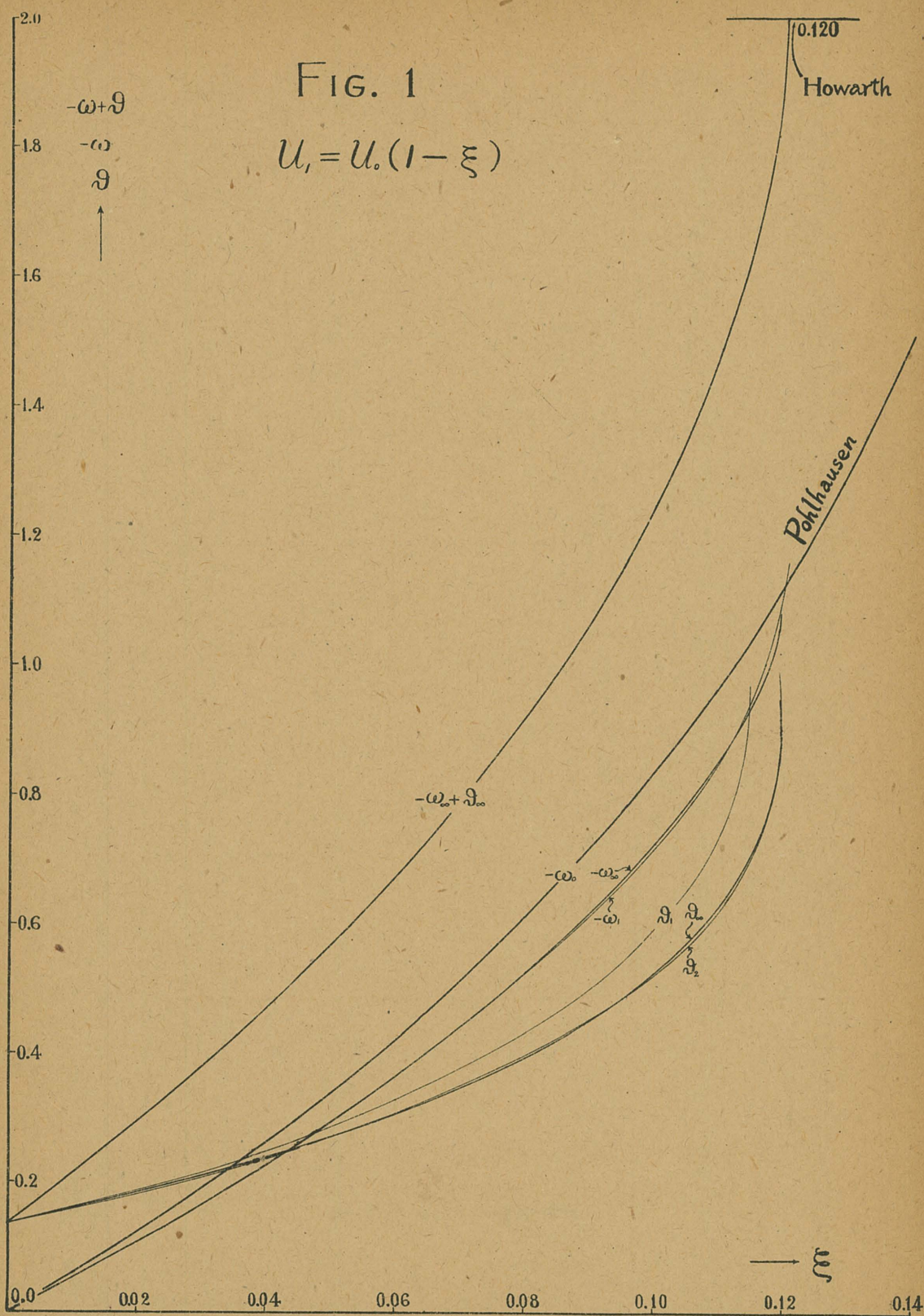
第 十 六 表

η	$-u_1^2 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot R$
0.0	0.000 $\times 10^4$
0.1	3.156 "
0.2	5.840 "
0.3	7.710 "
0.4	8.569 "
0.5	8.364 "
0.6	7.192 "
0.7	5.296 "
0.8	3.074 "
0.9	1.074 "
1.0	0.000 $\times 10^4$

此の報告の数値計算は、一部分高木良子、大半永井三郎の兩氏に依つて遂行された、記して謝意を表し度い。

FIG. 1

$$u_i = u_o(1 - \xi)$$



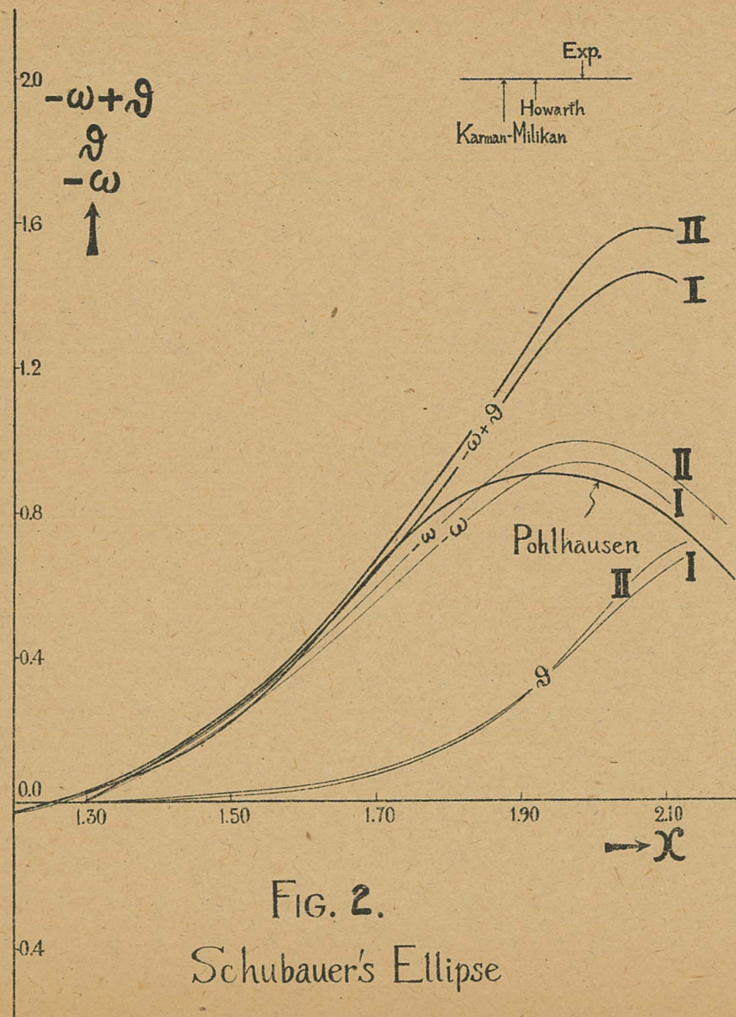
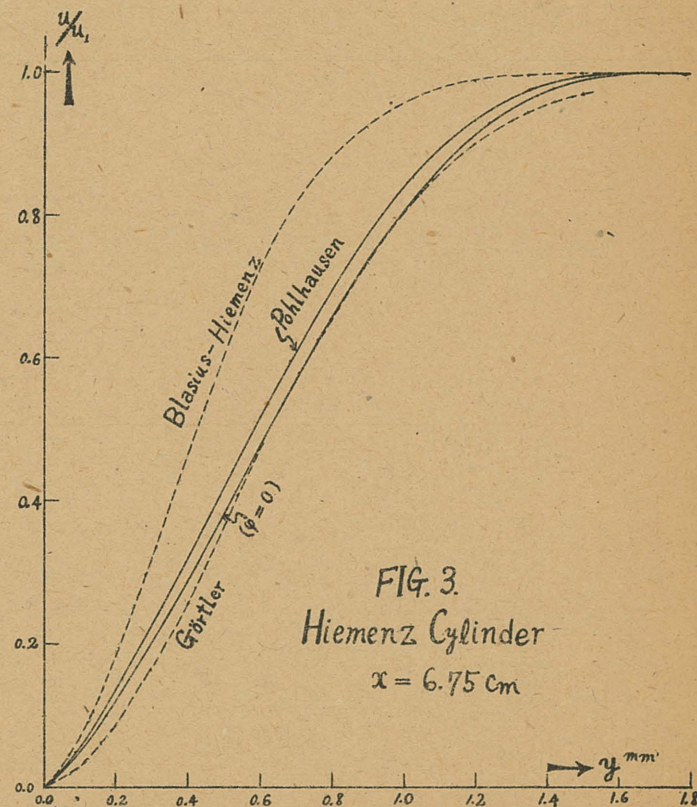


FIG. 2.
Schubauer's Ellipse



ω, γ-Plane.

$\cdot \varphi = 1.891$
 $\cdot \varphi = 1.815$
 $\cdot \varphi = 1.766$
 $\cdot \varphi = 1.760$

