

層流境界層方程式の一近似解法(一)

山田, 彦兒
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7157022>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 4 (3), pp.27-42, 1948-09. 九州大学流體工學研究所
バージョン :
権利関係 :



層流境界層方程式の — 近似解法 (一) —

前 員 山 田 彦 児

(昭和二十三年三月二十五日 受理)

§ 1. 基礎計算式

方法に就いては既に述べた⁽¹⁾のであるが、愈の趣向單に繰返せば次の如くである。二次元層流境界層方程式は、定常の場合をとることとして

$$\left. \begin{aligned} \Delta \equiv u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - u_x u - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ v &= - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

であつて、之を解くに當り Pohlhausen⁽²⁾に倣つて、境界層の厚さを代表する Parameter $\delta(x)$ を導入して

$$\begin{aligned} u/u_\infty &= A(x)\eta + B(x)\eta^2 + \dots \\ &= \alpha(x)\eta + \beta(x)\eta^2 + \dots \quad (\eta \equiv y/\delta) \end{aligned}$$

と置く。即ち η 方向の分布を有理整式を以て近似する。此の近似を (1) に代入して係数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ... 並に $\delta(x)$ を決定するのであるが、此の時 η 方向に対してなるべく (1) が充たれている様に工夫すべきであり、その爲に

$$\int_0^1 A(u, x, \eta) \eta^n d\eta = 0 \quad (2)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

なる條件を課する事とする。(2)の意味は $\eta = 0$ (固壁) から $\eta = 1$ (境界層外端) の間に於て $\Delta = 0$ が少くとも N 回起り、且その $\Delta = 0$ の點が $\eta(0.1)$ の間に

脚註 (1) 拙著「微分方程式の一近似解法」流体工学研究所報告 第三卷 第三号

(2) K. Pohlhausen: Zurnäherungsweise Integration der Differentialgleichungen der laminaren Grenzschicht Z.A.M.M.I. (1921)

或意味に於て、均等に分布されている事を保証するものであつて、 $N \rightarrow \infty$ の時には $\Delta \equiv 0$ 即ち微分方程式が(0.1)の面に於て、完全に成立する事を保証する。第一次近似として $\eta = 0$ のみを取上げれば、やはり方向に平均法と称せられる積分法を用ひる事であり、Karman-Pohlhausenの方法その儘となる。即ち此の方法は平均法を拡張した積分法を η 方向に向つて利用している事であつて、Pohlhausen近似法の拡張である事が分る。 N が大きい程近似の良いのは当然であるが、それと共に計算が煩雑となるから、以下では先づ $N = 3$ として計算公式を導くこととする。

u/u_1 に対して6次の有理整式を假定し、境界層の両端 $\eta = 0, \eta = \delta$ で
 $\eta = 0: u = 0; \eta = \delta: u = u_1, \partial u / \partial y = 0 \rightarrow$

なる条件を充たしめ、且其の両端の處に於て微分方程式が充たされている事即ち $\Delta = 0$ 、即ち又

$\eta = 0: \partial^2 u / \partial y^2 = -u_1 u_1' / \nu; \eta = \delta: \partial^2 u / \partial y^2 = 0$
 を要求すれば

$$u/u_1 \equiv f = F(\eta) + w G(\eta) + \delta H(\eta) + \varphi K(\eta) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \\ G(\eta) &= \eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4 \\ H(\eta) &= -\eta + 6\eta^3 - 3\eta^4 + 3\eta^5 \\ K(\eta) &= -\eta + 5\eta^3 - 5\eta^4 + \eta^6 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を得、此處に δ, φ は x の未決定函数、 w は

$$w = \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \delta^2 / \nu = \frac{1}{\delta} (s) \leftarrow \text{Pohlhausen} \quad (5)$$

であつて、問題は此の w, δ, φ を x の函数として決定する事に帰着する。後の便宜上 η の同じ篇を集めてかけば

$$u/u_1 = (2+w-\delta-\varphi)\eta - 3w\eta^2 + (-2+3w+6\delta+5\varphi)\eta^3 \\ + (1-w-3\delta-5\varphi)\eta^4 + 3\delta\eta^5 + 4\eta^6 \quad (3')$$

ともなる。

$u = u_1 f$ を(1)に代入して整理すれば

$$-u_1^2 \Delta(f, x, \eta) = \frac{w'}{w} - \frac{1}{2} f^* \frac{\partial f}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \\ + \frac{w'}{u_1} \left(1 + \frac{1}{6w} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + f^* \frac{\partial f}{\partial \eta} - f^2 \right) - \frac{u_1'}{u_1} \cdot \frac{1}{2} f^* \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

此處に $*$ はその函数を η に就いて(0.1)の面に積分したものを意味し、

$\partial/\partial x$ は x に無関係として微分する事を示している。右辺第二項は、

$$w'(G^* \frac{\partial f}{\partial y} - Gf) + \vartheta'(H^* \frac{\partial f}{\partial y} - Hf) + \varphi'(K^* \frac{\partial f}{\partial y} - Kf)$$

であるから結局

$$-u_1^{-2} \Delta(f; x, y) = w'(\frac{A}{w} + a) + \vartheta'b + \varphi'c + \frac{u_1'}{u_1}(-\frac{d}{Ew} + B) - \frac{u_1''}{u_1} A \quad (4)$$

となり、此処に A, B は w, ϑ, φ に関する二次整式、 a, b, c, d は一次整式であることが分る。これから (2) のモーメントを作る事は單なる整式の積分であつて、稍々煩雜な数値計算の後に

$$w'(\frac{A_n}{w} + a_n) + \vartheta'b_n + \varphi'c_n + \frac{u_1'}{u_1}(\frac{d_n}{Ew} + B_n) - \frac{u_1''}{u_1} A_n = 0 \quad (5)$$

$n = 0, 1, 2,$

なる基本計算式に到達する。係数 $A_n, B_n; a_n, b_n, c_n, d_n$ は第一、第二表に示す如くである。(5) は w, ϑ, φ に関する聯立一階常微分方程式であつて、境界層方程式を解く事は此の聯立方程式を解く事に帰着するのである。

(5) の第一式 ($n=0$) のみを採つて $\vartheta \equiv \varphi \equiv 0$ とすれば四次整式を用いた Pohlhausen 方程式に一致する筈であつて、實際兩者の係数が小数点下 7 桁目まで一致するのを見る事が出来る。Pohlhausen 方程式が多くの場合甚だ有益である事は既に証明済みの事であるから、之を精密化した現在の方法が前者の失敗する個所を補ふであらう事を期待出来る。尚剥離点が $d_0=0$ で与えられる事を注意しておく。

以下に於て先づ精密解の知られている場合を計算して一致の良否を検討する事とせう。

第 一 表

	abs	w w ² ws	θ θ^2 $\theta\phi$	ϕ ϕ^2 ϕw
A ₀	0.05873015	-0.00317461	0.01269836	0.01464648
		-0.00198413	-0.00750356	-0.00851927
		0.00753962	-0.01598127	0.00797250
A ₁	0.03067459	-0.00400794	0.01306653	0.01495319
		-0.00122022	-0.00520570	-0.00602646
		0.00498925	-0.01119863	0.00534818
A ₂	0.01803033	-0.00328286	0.01063119	0.01223353
		-0.00075941	-0.00355877	-0.00418747
		0.00322284	-0.00771983	0.00365821
B ₀	0.53462060	-0.06269851	0.15079368	0.16572879
		-0.00793650	-0.03001440	-0.03407717
		0.03015879	-0.06392525	0.03189011
B ₁	0.16769837	-0.03103174	0.08226570	0.09195539
		-0.00363093	-0.01582267	-0.01836598
		0.01495685	-0.03407984	0.01603555
B ₂	0.07689762	-0.01760471	0.05005028	0.05669593
		-0.00195168	-0.00938201	-0.01107782
		0.00851368	-0.02038480	0.00923087

第 二 表

	abs	w	ϑ	φ
a_0	-0.00634923	-0.00793650	0.01507932	0.01594509
a_1	-0.00162702	-0.00363093	0.00785731	0.00848694
a_2	-0.00031024	-0.00195168	0.00464642	0.00510588
b_0	0.02539690	0.01507947	-0.03001440	-0.03196257
b_1	0.01036072	0.00709953	-0.01582267	-0.01717183
b_2	0.00476911	0.00386726	-0.00938201	-0.01034247
c_0	0.02929296	0.01594502	-0.03196268	-0.03407714
c_1	0.01242785	0.00754871	-0.01690801	-0.01836598
c_2	0.00595792	0.00412499	-0.01004233	-0.01107782
d_0	-2.0000 0000	-1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
d_1	-1.0000 0000	—	—	—
d_2	-0.6000 0000	0.1000 0000	-0.2000 0000	-0.21428572

§ 2. Hartree の解との比較

(5) は移算して

$$W' \left(\frac{A_n}{W} + a_n \right) + \vartheta \cdot b_n + \varphi \cdot c_n = - \frac{u_1'}{u_1} \left(\frac{d_n}{W} + B_n \right) + \frac{u_2'}{u_1} A_n \quad (5')$$

であるから、何処の又点に於ける速度分布も相似である。— u/u_1 が又ト無関係である— 場合を考へるに此の際 $W' = \vartheta = \varphi = 0$ 、従つて上式の右辺は恒等的に零になるべく、此の事から $u_1 = (ax + b)^{1/2}$ (a, b, m は常数) が必要條件となる。此の場合 $\text{Falkner-Skan}^{(5)}$ に依つて論ぜられ、後 Hartree⁽⁴⁾ に依つて積分機械を用ひて精しく計算し直され

脚註 (3) V. M. Falkner and S. W. Skan: Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations, R. and M. No. 1314 (1930)

(4) D. R. Hartree: On an Equation occurring in Falkner and Skan's Approximate Treatment of the Equations of the Boundary Layer, Proc. Camb. Phil. Soc. 33 (1937)

た。それ故之に属する二、三の場合を現在の方法を用ひて計算し一致を調べやう。Hartreeの記号と現在のそれとの対応を示して置くと

$$[\chi]_H = \sqrt{\frac{6W}{\beta}} y, \quad [y']_H = y/u_1$$

$$\beta = 2m/(m+1), \quad [y''(0)]_H = \sqrt{\frac{\beta}{6W}} (2+W-\theta-\varphi)$$

(1) $u_1 = \alpha x^m$ に於て m を適当に撰べば x の至るところが剝離点状態に在る解が得られる。(5) に於て $n=0, 1$ の兩式を用ひる事とし $\varphi \approx 0$ と置く。剝離点状態は

$$0 = 2 + W - \theta \quad \text{i.e.} \quad \theta = W + 2$$

で与えられるから、(5) から

$$\left\{ m \left(\frac{dn}{dw} + Bn \right) + (1-m) A_n \right\} \varphi_{w=\theta} = 0 \quad (n=0, 1) \quad (6)$$

なる兩式を得、之を解いて m, W が定まる。 $d_0=0, d_1=-1$; A, B は何れも W の二次整式となり (6) を書きかへれば

$$W = \{ 6(B_1 - B_0 A_1 / A_0) \}^{-1}; \quad m = -A_0(B_0 - A_0)^{-1}$$

前項を用ひて逐次的に W を出す事が出来、従つて後項から m が定まる。結果は、

$$m = -0.091522, \quad W = -0.899786, \quad \theta = 1.100214 \quad (7)$$

次に同じく $n=0, 1$ の二式を聯立とするが速度に対しては5次の項を削つて4次の項を取入れる。即ち $\theta \approx 0$ の場合の近似を見よう。計算は上の場合と全く平行に行はれて

$$m = -0.090671, \quad W = -0.874000, \quad \varphi = 1.126000 \quad (7')$$

得られた m の値は何れも Hartree の値 -0.0905 に近く、Howarth 法⁽⁵⁾ に依る値 -0.0938 よりも遙に良い。Pohlhausen 法によれば $m = -0.1$ であるから、近似を一段進める事に依つて精度が格別に改まる事が知られる。此の事から考へて、 $n=0, 1, 2$ の三式を聯立にすれば、解は殆んど正確となる事が予想されるが、計算の煩簡を考慮すれば、第二段階を以て満足すべきであらうか。本報告末尾に附けた第三表に (7), (7') を用ひて算出した速度分布を Hartree の値と比較しておくが、その計算式は次の如くである。但し此処並に今後、本節に限つて、 $[\chi]_H$ の代りに

脚註 L. Howarth: On the solution of the laminar boundary layer equation, Proc. Roy. Soc. London, A, 164 (1938)

ξ と記号とする。

$$\frac{u}{u_1} \left\{ \begin{array}{l} 0.1007414 \xi^2 + 0.01371249 \xi^3 - 0.009613154 \xi^4 \\ \quad + 0.0008881121 \xi^5 \\ 0.0997118 \xi^2 + 0.00747534 \xi^3 - 0.00543192 \xi^4 \\ \quad + 0.00006192695 \xi^6 \end{array} \right\} \quad (8)$$

(2) 流れに平行な平板の場合即ち $u_1 = 0$ の場合には $w \equiv 0$ であるから求める解は ϑ , φ を定数ならしめるものである。今の場合 (5) はその儘では用ひ得ないから, $\delta^2 u \equiv Z$ を w に代用した後 $u_1 \rightarrow 0$ の極限をとる。すると (5') は

$$\vartheta' Z b n + \varphi' Z c n = -d n / u_1 - Z' A n \quad (5'')$$

と変化するが, 勿論此の式中の A, b, c, d 等には $w = 0$ と置かれている。此処では $n = 0.1$ の兩式を用ひ $\varphi = 0$ と採る事とし, 従つて左辺第二項を省略すれば

$$(d_0 / A_0) w = 0 = (d_1 / A_1) w = 0 = -u_1 Z' \quad (9)$$

左中辺から ϑ の三次方程式を得て, 之を解いて解がきまる。問題に通ずる解は

$$\vartheta = 0.135625, \quad Z' = 30.8288 / u_1 \quad (9')$$

のみであつて, 之から得られる諸量を Blasius の解の手 A をそれら⁽⁶⁾ と比較すれば次の第四表の如くである。参考の爲第一近似である Pohlhausen 法の値をも併せて示す。そして δ は板面の厚さ, δ_1 は排除層である。

第 四 表

	[Blasius]	[Pohlhausen]	[$\varphi = 0$]
$\sqrt{\frac{u_1}{u x}} \delta$	—	5.83559	5.55239
$\sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} \cdot \frac{\tau_0}{\rho u_1^2}$	0.33206	0.342725	0.335779
$\sqrt{\frac{u_1}{u x}} \delta_1$	1.7208	1.75068	1.74102

(6) 都合上此の場合に限つて, Hartree の値に直さず, Blasius のそれに比較した。S. Goldstein:

Modern Development in Fluid Dynamics I. P. 136

参照

元来此の場合にはPohlhausen法が既に相当に精度が良いのであるから、第二近似に進む事が効果的ではない。速度分布の比較は論文末尾第五表になされている。計算式は

$$u/u_1 = 0.6715600 y_B - 0.05544097 y_B^2 \\ - 0.001430952 y_B^4 + 0.002467281 y_B^5 \quad (10)$$

であつて y_B は Blasius の値⁽⁶⁾である。

(3) 次に一般流が加速されている場合の例として $m=1$ の場合を取ると $u_1' = 0$ であるから (5') から

$$\left(\frac{dn}{bw} + B_n \right) = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (11)$$

となる。

先ず $\vartheta = \varphi = 0$ とおいて $n=0$ のみをとれば、良く知られている様に

$$W = 2.9672, \quad 1.1753, \quad -12.043 \\ (\lambda = 17.803, \quad 7.052, \quad -72.26)$$

を得、最後の根は適さないが他の二つは意味をもつ。此の場合の板面摩擦係数は $[y''(0)]_H = 1.177, 1.196$ であつて、Hartree の値は 1.2326 である。速度分布を計算すれば末尾第五表の第二、第三列であつて、何れがよいとも判断できない。普通には $\lambda = 7.052$ が採用されるが、それは一般の問題に於て丁度 (11) が forward stagnation point の条件であつて、此の時の λ 値から剥離点の値 $\lambda = -12$ に至る為には λ が無限大になる点、即ち $\lambda = 12$ を避ける必要がある為にすぎない。

次に第二次近似に進んで、 $n=0, 1$ を採つてみると $\varphi=0$ として ϑ を取入れる場合にも、又 $\vartheta=0$ として φ を取入れる場合にも (11) は実根をもたない。即ち五次の有理整式、五次の項を欠ぐ六次の有理整式を認めては第二次近似が得られないのであつて、而も進んで $n=0, 1, 2$ の三式を聯立にする事は計算を稍と煩雑とする嫌みがある。そこで式は $n=0, 1$ の兩式ののみを採るが、係数は φ, ϑ の兩方を採り、その何れか一方を自由に撰び得る parameter として残置するという便法を行ふ。従つて解は確定しないけれども、反復求むるものが近似解であるから、都合が

(6) 都合上此の場合に限つて Hartree の値に直さず Blasius の其に比較した。S. Goldstein: Modern Development in Fluid Dynamics I. P. 136 参照

のものを決定出来るといふ自由を残す事となる。上述の Pohlhausen 近似に於て二つの入から一方を撰ぶ自由と同様のものである。⁽⁷⁾

計算は $\eta=0.1$ の兩式から ψ を消去したものの $F(w, \varphi)=0$ をつくり、 w を任意に撰んで φ を算出する。試みた場合の三定数並に表面摩擦は第七表の如くである。

第 七 表

w		2.00000	1.89500	1.80000	1.60000
ψ	(Hartree)	-2.15790	-2.07605	-2.01990	-1.99006
φ		1.89137	1.81466	1.76572	1.7601
$[Y''(0)]_H$	1.2326	1.23164	1.23264	1.23365	1.2363

此の結果を見れば第二次近似の精度が理解せられる。そしてその精度は parameter の相当の広範囲に亘つて良好である。文等の場合に應ずる速度分布は末尾第六表の第四、第五、第六列に示し、Hartree の値と比較されている。最もよいと思はれる $w=1.89500$ の場合の速度分布式を挙げれば次の如くである。

$$\begin{aligned}
 u/u_1 = & 1.232639\xi - 0.5000000\xi^2 + 0.007877018\xi^3 \\
 & + 0.05136345\xi^4 - 0.01428757\xi^5 \\
 & + 0.001234566\xi^6 \quad (12)
 \end{aligned}$$

以上三つの場合の吟味を通じて、Karman-Pohlhausen法を、此処に述べた精密化を用い、唯一段だけ近似を進める事に依つて如何なる程度に精密さを期待すべきかが了解せられるであらう。

§ 3 Howarth の解との比較

Howarth⁽⁸⁾ は彼の近似法の基礎に於ける爲に、 u_1 が直線的に減少する場合、即ち

$$u_1 = \alpha_0 - \alpha_1 x = \alpha_0(1 - X), \quad X \equiv \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x \quad (13)$$

脚註(7) 文に附聯して次の論文を参照されたい。其処では Pohlhausen 近似に於て ψ が自由に撰び得る Parameter として導入されている。H. L. Dryden: Computation of the Two-Dimensional Flow in a Laminar Boundary Layer, N.A.C.A. Tech. Rep. No. 497 (1934)

(8) 脚註(5) 参照

の場合に、 $x=0$ 即ち $X=0$ から始る境界層が遂に剝離する程を精しく吟味している。故に此の場合を現在の近似法を以て扱つて見やう。

$\eta=0.1$ の附式を採り $\varphi=0$ と置いて (5) から

$$\left. \begin{aligned} w'(A_0 + a_0 w) + \psi' b_0 w &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{d_0}{\delta} + B_0 w \right) \\ w'(A_1 + a_1 w) + \psi' b_1 w &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{d_1}{\delta} + B_1 w \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

此処に ' は x に就いての微分を意味する。

$$A_n + a_n w = A_n \quad dh/\delta + B_n w = B_n \quad (14')$$

と置けば、それ故に

$$w = \frac{1}{1-x} \frac{b_1 B_0 - b_0 B_1}{b_1 A_0 - b_0 A_1}, \quad \psi = \frac{1}{1-x} \frac{1}{w} \frac{B_1 A_0 - B_0 A_1}{b_1 A_0 - b_0 A_1} \quad (15)$$

となる。

leading edge の定数を求める爲に $x=0$ に於て $\delta=0$, 即ち $w=0$ と置けば (14) から

$$(w')_{x=0} = \left(\frac{d_0}{\delta A_0} \right)_{w=0}, \quad (\psi')_{x=0} = \left(\frac{d_1}{A_1} \right)_{w=0}$$

を得るが、此の附式は既に (9) に見たところであつて、 $\psi=0.135625$ がその根であり、従つて第一式から $w'=-5.15183$ を得る。同じ奥の ψ' の値を求めるには (15) の第二式に依つて

$$(b_1 A_0 - b_0 A_1)_{x=0} (\psi')_{x=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{B_1 A_0 - B_0 A_1}{w} \right)$$

稍、面倒な此の極限を求めると、右辺にも $(\psi')_{x=0}$ が現れ結局 $(\psi')_{x=0}=2.174$ 々に到達する。

そこで之等の初期値を用ひて (15) の積分を遂行する。今は附式 (5) の近似度を問題にしてゐるのであるから (15) はなるべく正確に積分される必要があり、此処では煩雜をいとせず全範囲に亘つて Runge-Kutta 法を用ひる事とした。結果は次の第八表左半であり (右半は第一近似 [Pohlhausen 法] の値)、又第一図に附かれてゐる如くである。(9) 但し $x=0.199$ に過ぎると w, ψ が無限大になる奥が近いから、此処で独立変数を W に取替へて一歩先まで進んで置いた。その表の左下横線の下の数値は、その上の数値から内挿したものであつて、 $x=0.05$ の場合には

(9) 図は第一報に遡つて掲載する。

えを狭い四点を用ひ他の二つは $X = 0.118 \quad 0.119 \quad 0.11918$ の三点に於ける値と同時に $X = 0.119 \quad 0.11918$ の二点に於ける微係数をも考慮に入れた。 $X = 0.119255$ は W' の無限大になるところ、換言すれば (15) が解を持つ X の極限を示し剥離条件に達するのはえから極めて僅かに遅れた (引延した) $X = 0.119253$ である。

第 八 表

X	W	θ	$W - \delta$	X	W Rohlfhausen
0.00	0.00000	0.13563	-0.13563	0.00000	0.00000
0.02	-0.10809	0.18518	-0.29327	0.02646	-0.16667
0.04	-0.22844	0.23960	-0.46804	0.04947	-0.33333
0.06	-0.36526	0.30633	-0.67159	0.06873	-0.50000
0.08	-0.52589	0.39534	-0.92123	0.08525	-0.66667
0.10	-0.72732	0.52639	-1.25371	0.09948	-0.83333
0.11	-0.85949	0.63151	-1.49100	0.11176	-1.00000
0.115	-0.94553	0.71449	-1.66002	0.12238	-1.16667
0.118	-1.01634	0.79774	-1.81408	0.13155	-1.33333
0.119	-1.05692	0.85860	-1.91552	0.14612	-1.66667
0.01918	-1.09692	0.93633	-2.03325	0.15649	-2.00000
0.05	-0.29434	0.27080	-0.56514		
0.119255	-1.08427	0.90857	-1.99284	→ (極大値)	
0.119253	-1.08660	0.91340	-2.00000	→ (剥離条件)	

此の二点が極めて近接している事は Howarth の解にも見られるのであつて境界層方程式の正確解に就いてはおそらく一致しているものであらう。剥離点を越した先逆境界層方程式が或意味の解を持つ事は期待出来ない⁽¹⁰⁾と同時に、剥離点に到る前に意味を失ふ場合も考へられなから多くの場合に於てこの二点は一致するのでもあらうが、少くとも現在の場合近似解に於てこの性質を具へていることが精度への一つの示唆とな

(10) L. Prandtl: Zur Berechnung der Grenzschichten.

Z. A. M. M. 18 (1938) 5, 77-82 特に 83 参照

り得るであらう。オー近似としての Pohlhausen の式は此の性質を持たないのであって、その剥離点に近づく解が近似性を失ふ事との間には関係があるであらう。

さて Howarth の解と比較して見やう。オーに剥離点は Howarth に於て $X = 0.120$, 此處では $X = 0.1193$, 此の一致は, $n=0.1$ の式を以つてする近似である事を考へれば, むしろ驚くべきである。進んで表面摩擦と排除厚 δ_1 を数値で比較して見るに、容易に分る如く。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{v}{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{\alpha_0} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 &= \frac{(1-X)(2+u-\varphi)}{\sqrt{-6u}} \\ \sqrt{\frac{\alpha_1}{v}} \delta_1 &= \sqrt{6u} \left(1 - \int_0^1 \left(\frac{u}{u_1} \right) dy \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

であるから、オ八表を用ひて次のオ九表を得る。矢張り各点に於て本質的な一致を見出す事が出来るのである。更に進んで速度分布を吟味すれば、Howarth の y を此處では z と記号して

$$\left. \begin{aligned} X=0.05: u/u_1 &= 0.482869z^3 + 0.100000z^2 - 0.0479520z^3 \\ &\quad - 0.0111847z^4 + 0.00350641z^5 \\ X=0.10: u/u_1 &= 0.225940z^3 + 0.200000z^2 - 0.0284061z^3 \\ &\quad - 0.0203679z^4 + 0.00401680z^5 \\ X=0.119255: u/u_1 &= 0.001938z^3 + 0.238511z^2 + 0.0039440z^3 \\ &\quad - 0.0278735z^4 + 0.00396830z^5 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を得るが、 z を Howarth の値と比較したものがオ尾オ十表である。両者の一致は充分と見做し得るであらう。 (未完)

第 九 表

X	$\sqrt{\frac{v}{\alpha_1 \alpha_0^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$		$\sqrt{\frac{\alpha_1}{v}} \delta_1$	
	[Howarth]	$[\varphi = 0.1]$	[Howarth]	$[\varphi = 0.1]$
0.00	∞	∞	0.000	0.000000
0.05	1.011	1.02574	0.447	0.45422
0.10	0.315	0.32152	0.794	0.81263
sep.pt.	0.000	0.000000	1.110	1.13520

第三表

β	[Hartree]	$\{\varphi=0\}$	$\{\varphi=0\}$
$\{y(0)\}_H$	0.0000	0.00000	0.00000
ξ	u/u_1	u/u_1	u/u_1
0.0	0.0000	0.00000	0.00000
0.2	0.0040	0.00412	0.00404
0.4	0.0158	0.01676	0.01629
0.6	0.0358	0.03805	0.03681
0.8	0.0636	0.06785	0.06543
1.0	0.0991	0.10573	0.10182
1.2	0.1423	0.15104	0.14542
1.4	0.1927	0.20293	0.19555
1.6	0.2498	0.26038	0.25132
1.8	0.3126	0.32224	0.31175
2.0	0.3802	0.38727	0.37570
2.2	0.4509	0.45418	0.44198
2.4	0.5230	0.52161	0.50930
2.6	0.5946	0.58824	0.57634
2.8	0.6635	0.65280	0.64181
3.0	0.7278	0.71406	0.70440
3.2	0.7858	0.77091	0.76292
3.4	0.8364	0.82240	0.81626
3.6	0.8789	0.86775	0.86348
3.8	0.9132	0.90636	0.90385
4.0	0.9399	0.93792	0.93689
4.2	0.9598	0.96237	0.96242
4.4	0.9741	0.97998	0.98063
4.6	0.9839	0.99134	0.99212
4.8	0.9904	0.99746	0.99799
5.0	0.9945	0.99973	0.99987
5.2	0.9969		
5.4	0.9984		
5.6	0.9992		

第 五 表

η_B	[Blasius]	[Pohlhausen]	[$\varphi=0$]
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0664	0.0685	0.0671
0.2	0.1328	0.1365	0.1339
0.3	0.1989	0.2036	0.2000
0.4	0.2647	0.2694	0.2651
0.5	0.3298	0.3335	0.3288
0.6	0.3938	0.3957	0.3910
0.7	0.4563	0.4555	0.4511
0.8	0.5168	0.5128	0.5091
0.9	0.5748	0.5673	0.5645
1.0	0.6298	0.6187	0.6172
1.1	0.6813	0.6670	0.6668
1.2	0.7290	0.7120	0.7132
1.3	0.7725	0.7536	0.7563
1.4	0.8115	0.7917	0.7958
1.5	0.8460	0.8263	0.8317
1.6	0.8761	0.8574	0.8639
1.7	0.9018	0.8849	0.8924
1.8	0.9233	0.9091	0.9171
1.9	0.9411	0.9299	0.9381
2.0	0.9555	0.9476	0.9556
2.1	0.9670	0.9621	0.9698
2.2	0.9759	0.9739	0.9807
2.3	0.9827	0.9830	0.9889
2.4	0.9878	0.9898	0.9943
2.5	0.9915	0.9945	0.9977
2.6	0.9942	0.9976	0.9994
2.7	0.9962	0.9992	0.9999
2.8	0.9975	0.9999	1.0000
2.9	0.9984	1.0000	
3.0	0.9990		

第 六 表

	(Hartree)	(Pohlhausen)		$\omega=1.6000$ $\eta=-1.9906$ $\varphi=1.7601$	$\omega=1.89500$ $\eta=-2.07605$ $\varphi=1.81466$	$\omega=2.00000$ $\eta=-2.15790$ $\varphi=1.89137$
		$\lambda=7.052$	$\lambda=17.803$			
β	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00000	1.00000
$(y''(0))_H$	12326	1.196	1.177	1.2363	1.23264	1.23164
ξ		u/u_1				
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000
0.2	0.2266	0.2198	0.2162	0.22727	0.22667	0.22650
0.4	0.4144	0.4034	0.3966	0.41539	0.41473	0.41452
0.6	0.5662	0.5546	0.5454	0.56691	0.56689	0.56680
0.8	0.6859	0.6769	0.6663	0.68579	0.68682	0.68690
1.0	0.7778	0.7737	0.7629	0.77663	0.77883	0.77928
1.2	0.8467	0.8483	0.8386	0.84432	0.84742	0.84813
1.4	0.8968	0.8941	0.8964	0.89362	0.89708	0.89795
1.6	0.9324	0.9438	0.9392	0.92885	0.93200	0.93287
1.8	0.9569	0.9705	0.9697	0.95369	0.95590	0.95661
2.0	0.9732	0.9865	0.9902	0.97108	0.97192	0.97235
2.2	0.9841	0.9956	1.0028	0.98315	0.98255	0.98262
2.4	0.9905	0.9992	1.0096	0.99131	0.98961	0.98934
2.6	0.9946	1.0000	1.0120	0.99644	0.99431	0.99381
2.8	0.9971		1.0117	0.99913	0.99737	0.99681
3.0	0.9985		1.0097	0.99999	0.99915	0.99872
3.2	0.9992		1.0070		0.99990	0.99971
3.4	0.9996		1.0043		1.00000	0.99999
3.6	0.9998		1.0022			
3.8	0.9999		1.0008			
4.0	1.0000		1.0001			
4.2			1.0000			

第 十 表

$\bar{x}$	$X = 0.05$		$X = 0.10$		$X = \text{Sep. pt.}$	
	(Howarth)	($\varphi=0$)	(Howarth)	($\varphi=0$)	(Howarth)	($\varphi=0$)
0.0	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000
0.2	0.099	0.1002	0.052	0.0529	0.010	0.0099
0.4	0.205	0.2058	0.120	0.1201	0.038	0.0385
0.6	0.317	0.3142	0.202	0.1990	0.085	0.0846
0.8	0.430	0.4223	0.294	0.2870	0.149	0.1461
1.0	0.541	0.5272	0.394	0.3807	0.227	0.2126
1.2	0.645	0.6261	0.498	0.4768	0.318	0.3047
1.4	0.738	0.7163	0.598	0.5718	0.416	0.3953
1.6	0.815	0.7956	0.692	0.6625	0.517	0.4888
1.8	0.877	0.8624	0.776	0.7459	0.616	0.5816
2.0	0.923	0.9154	0.844	0.8193	0.708	0.6705
2.2	0.954	0.9544	0.897	0.8808	0.787	0.7522
2.4	0.975	0.9801	0.936	0.9291	0.853	0.8242
2.6	0.987	0.9942	0.962	0.9638	0.903	0.8844
2.8	0.994	0.9994	0.978	0.9821	0.940	0.9316
3.0	0.997	1.0000	0.989	0.9966	0.965	0.9654
3.2	0.999		0.994	0.9999	0.981	0.9866
3.4	1.000		0.998	1.0000	0.990	0.9970
3.6			0.999		0.995	0.9999
3.8			1.000		0.998	1.0000
4.0					0.999	
4.2					1.000	