

## 限界掃流力に就いて

栗原, 道德  
九州大学流體工學研究所

椿, 東一郎  
九州大学流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7157021>

---

出版情報 : 流體工學研究所報告. 4 (3), pp.1-26, 1948-09. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



# 限界掃流力に就いて

所員 栗原 道徳  
樁 東 一 郎

(昭和二十三年三月二十五日受理)

**要約** 従來の限界掃流力 $T_c$ に関する実験式はまちまちである。その原因を利用し得る總ての測定資料を用ひて檢べ、Indri, Chang等の言ふ様に砂礫粒に Critical size  $K$ があつてその左右に於て $T_c$ と $K$ との關係が異なることが再認される。そこで Turbulenceを考慮して無次元的表式を求めると、此の Critical size には turbulence factor  $(\infty (S - S_0)gK / \tau_0)$  に  $S, S_0$  は砂礫及び流体の密度)の極しい極大が対応して居り、Critical size の存在は疑ふべくもないことが解る。この表現に従つて次元的に正しい新しい実験式が提案されてゐる。

理論的に、主流に於ける圧力動搖が限界掃流力に対して最も重要な役割を演ずるものであつて、これが主原因となつて turbulence の大きさと砂礫粒の大きさとが或同調の關係にある場合に限界掃流力に及ぼす影響は最大となり、turbulence factor は極大となることが指摘される。最後に簡單な Model に従つて理論は計算に移される。理論の結果はよく測定の結果を説明してゐる。

§ 1. 緒言 水路或は自然河川の底面に於ては流体の粘性に依つて流れの方向に剪断力が作用して居る。若し河床に砂礫が敷き詰められて居る場合には、これ等の砂礫粒は流れの方向にこの剪断力の分け前を受けて移動されやうとする。この様な意味に於てこの剪断力は又掃流力と呼ばれてゐる。

掃流力が小さい時には砂礫粒は靜止してゐるが、或程度以上大きくなると砂礫粒は移動を始めるに到る。この限界掃流力に就いては古くより多くの実験的研究がなされ、その結果「一定の砂礫に就いては一定の限界掃流力が対応する」と一般に信ぜられてゐる。然しながらこ

の現象は種々の要素を含んで居り、極めて複雑なために測定値も着しく散乱して、公にされた実験式もまちまちであつて色々の函数形を与へてゐる。

扱へる現在までの限界掃流力の研究方針を見るのに要する2つの方向を述べてゐることが解る。その第一は限界掃流力の物理的或は力学的機構の究明であり、測定結果もその線に沿つて整理統合されなければならぬ。然しながらこの方面の研究は従来難問視され、古くは du Boys の摩擦平衡理論(今日では理論的にも実験的にも否定されてゐる)、近年では C. M. White<sup>(1)</sup> の平衡、第二には、本質的な力学的機構はさておいても、限界掃流力は砂礫粒の形状、配列及び混合状態に依つて着しく異なることが実験的に知られてゐるので、これ等の統計的性質を考慮して実験結果を整理統合し、簡潔な法則性を発見せんとする試みである。後者は実用問題として重要であるか。限界掃流力の機構を究めての後でなければ根本的な解決は困難であつて、論理的には寧ろ前者こそ本質的な研究方向と思はれる。実際発表された多くの実験式を見るのに砂礫の混合状態等の差異のみでは説明し難い本質的な相違を示してゐる。即ち、吾々が研究者の実験資料の処理方法に疑を持つたとしても、若し若干の信用をさへ置くことが出来るならば、各実験公式に現はれた差異は砂礫の形状、配列及び混合状態等の統計的取扱ひに際して犯したかも知れない誤りに依るものではなく、少くとも暗黙裡に行はるべき物理的機構の把握に際して犯した誤りによるものであつて、寧ろ吾々は物理的機構自身に実験公式の多様性を承認すべき重要な要素が含まれてゐるものと考へべきではなからうか。

著者はこの論文に於て、この様な意味に於て入手可能であつた絶々の測定資料を用ひ、問題の再検討を行ひ、砂礫の形状、混合状態等はさておいて、限界掃流力の力学的機構に若干の考察を試みたいと思ふ。

脚註 (1) C. M. White, The equilibrium of grains on the bed of a stream. Proc. Roy. Soc. A. 174 (1940), 322.

# I. 実験法則

§2. 諸種の実験式と問題となる点 限界掃流力公式は Schoklitsch, Krey, Kramer 等に依つて種々の形が提唱されてゐる。一定の特質を持つた水路に於て限界掃流力  $\tau_0$  は砂礫の特性即ち密度、形状、平均直径、混合状態及び空隙比或は配列状態等に依つて決まるものと考えられる。これ等の要素を同時に考慮して実験式を求めることは殆んど不可能な事であるが、これ等は必ずしも總てが独立したものでなく、実際問題としては相関性が強い。従つて研究者は最も重要な影響を有すると考えられる密度  $\rho'$  ( $\rho, \rho_0$  を砂礫粒及び流体の密度として  $\rho' \equiv \rho - \rho_0$ )、平均直径  $K$ 、形状及び混合状態等を表すために適当に工夫された parameters を用ひて夫々実験式を求めている。現在までに発表されたものを挙げるならば概略次の通りである<sup>1)</sup>：

i) Schoklitsch :

$$\tau_0 = c_1 \sqrt{\rho' g \frac{1}{3} \nabla} \quad \text{----- (21)}$$

茲に  $g$  は重力の加速度であり、 $\nabla$  は粒子の体積、 $\frac{1}{3}$  は粒子の形状による係数であつて球の場合に 1 である。この式は一樣な組織の粒子に就いて求められたものである。以下共に  $c$  は数値係数である。

ii) Krey :

$$\tau_0 = c_2 \rho' g K \quad \text{----- (22)}$$

これは略々一樣な組織を有する natural quartz sands を用ひて求められたものである。

脚註 1) 境 隆雄 “河床砂礫に対する限界掃流力に就て”，土木学会誌 第31巻 (1946), 第2号

Transactions of the American Geophysical Union, Eighteenth Annual Meeting (1937), P. 456

Y. L. Chang, "Laboratory Investigation of Flume Traction and Transportation" American Society of Civil Engineers 63 (1937), p. 1701

iii) Kramer :

$$\tau_0 = c_3 \frac{\rho' g K}{M} \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

茲に M は "uniformity modulus" と呼ばれる砂礫の混合状態を表す一つの parameter であつて一様な粗織の時に 1 である。

iv) U.S. Waterways Experiment Station :

$$\tau_0 = c_4 \sqrt{\frac{\rho' g K}{M}} \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

茲に M は Kramer の係数である。この式は Kramer の式 (2.3) を modify したものである。

v) Indri :

$$\tau_0 = a \frac{\rho' g K}{M} + b \quad \dots \dots \dots (2.5)$$

茲に a, b は数値係数であつて, K = 1mm を境にして異なる値をとる。

vi) 安藝及び佐藤氏 :

$$\tau_0 = c_6 \rho' g K \lambda \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

茲に λ は混合状態を表す一つの parameter である。

vii) 境 氏 :

$$\tau_0 = c_7 \rho' g \beta K^{6/5} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

茲に β は Kramer の係数 M を改良した混合状態を表す parameter であつて, M とは  $\beta = \frac{2+M}{1+2M}$  なる関係にある。

viii) Chang :

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= c_8 \left\{ \frac{\rho' K}{\rho_0 M} \right\} \quad \text{for } \rho' K / \rho_0 M > 2.0 \\ \tau_0 &= c_8' \left\{ \frac{\rho' K}{\rho_0 M} \right\}^{1/2} \quad \text{for } \rho' K / \rho_0 M < 2.0 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

以上の諸式を見るに、粒子の形状及び混合状態を正しく考慮に入れるために種々の工夫が試みられて居り、実際問題としてこれ等が重要な要素と奪つてゐることが認められる。然しなながらこれらの諸式は一律な球形の砂礫粒の場合にも亦しく成立つ筈であり、従つて無次元の parameters  $\xi, M, \lambda, \beta$  を 1 にあければ何れも同一法則を示すべきである。然るに数値係数は度外視して、次元的に正しい (2.2), (2.3) 及び (2.6) のみが同様に  $\tau_0$  と  $\rho' g K$  間に直線的な法則を与えるのみであつて、その他のものは  $\tau_0$  と K との関係のみについて、 $\tau_0 \propto K^{1/2}$ ,

$K_1$ ,  $K_2$  等の法則を与えている。上述の理由によつてこの様な相違は砂礫粒の形状、混合状態等の相違に歸するわけに行かないので、寧ろこれ等の諸式は何れも正しく、使用した資料を得るに用いた実験に際しての測定範囲の相違、或は整理に際して如何なる領域に重点が置かれたか、或は実験に際しての條件の相違によつて生じた差違があると解釈した方が妥当である。又この様に解釈するならば、諸実験式がまちまちであることは、限界掃流力の本質的な物理的機構を探る上に有力な鍵を与えるものと与えられる。この事に關聯して indri, Chang の結果は特に興味深いものである。

indri, Chang は共に平均直径1粒を境にして $\tau_c$ と $\tau_c$ との關係の異なることを認め、前者は異つた2つの直線により、後者は次数の異つた2つの Power laws を用いて二重の表現をしている。(2.5), (2.8) 参照)。この様な意味に於ける Critical diameter の存在することは更に(2.4)が(2.3)を誘導する際して使用したと同一の資料(24個)の他に N. S. Waterways Experiment Station 自身に於て行つた8個の測定資料を付け加えて求められたものであることからも頷くことが出来る<sup>1)</sup>。逆に斯くの如き critical size が存在するものとすれば、多くの研究者がまちまちの実験式を誘導したとしても、当然のことと思われる。次節以下に於て吾々は少しくこの点を吟味したいと思ふ。

最後に吾々の目的は限界掃流力の主要な物理的機構を知ろうとするにあるのであるから、砂礫の形状、混合状態に關しては、資料の整理に際して實際図表上に於ける測定点の散乱をより以上に減少させる境氏提案の Parameter  $\beta$  を再考することなく採用することにする。

§ 3. 吾々の研究に於て使用した測定資料は Y. L. Chang 及び境氏の論文より引用したものである。

Y. L. Chang 自身の測定結果はそれ自身として1つの系列をなしているが、その他の研究者のものに較べて系統的な差違を示している。これは彼が加速水路を用いて居ることに起因するものと思われる。加速水路に於ては、定常一樣な水路に較べて乱れが弱く、巨めに大なる限界掃

脚註 1) Y. L. Chang, (前出) p. 1716 参照。

流力を示す筈であり、實際彼の測定値は大き過ぎる。従つて吾々は彼の測定結果を使用しないことにした。又、C. M. White の研究は極めて

興味深いものであるが、特種の装置に就いて行われたものであり、同様の理由に依つてここには用いていない。最後に E. Indri の資料はその他のものに較べて著しい散乱を示すので、これは除外した。

以上の様にして送んだ一様な定常水路に関する 38 個の測定資料は第一表に纏められている。前節に述べた事柄を再検討するために限界掃流力で、 $\beta \rho' g R$  の關係を第一図に示しておいた。これ等の函表に於て吾々は C.G.S. 単位を用いて居るが、最後には無次元表式を求の様とするので、この單位系を採用したことが、實用価値を傷つけることはないと思う。

第 一 表

第一圖を一瞥すれば解る様に、測定点は可成散乱しているが、測定の際の困難及び砂礫の運動の始めに関する標準の相違等を思えば、 $\beta \rho' g R$  の關係をよく示して居ると言える。と同時に前述の如き critical size の存在が一応認められる様に思える。實際曲線は  $\log \beta \rho' g R = 2.2$  の附近に於てその他の部分に較べて稍々強く曲つて居る。今仮りに  $\beta = 1$ 、 $\rho' = 1.60$  とすればこの点は  $R = 0.1$ 、平均直径 1 粒に対応して居り、Indri 及び Chang の与へた critical size と一致して居る。この点が疑うべくもない特異点であることは、後に乱流を考慮した無次元的表現に依つて明確にされる。

§ 4. White の研究, Turbulence Factor 扱て限界掃流力に対しては流れの乱れの状態が重要な役割を演じている。従つて以下その物理的機構を探るに際してこれに關する興味深い C.M. White の平衡理論を簡単に説明しておくことは意味あることと思う。

限界掃流力は流速力ばかりでなく、流自身の性質に依つて著しく異なる。河床は流れに抵抗を及ぼすが、それは最上層の突起した粒子に依つて剪断力が河床から流体に傳えられるからであつて、その際各粒子が極めて小さな力を傳達するのであるが、その機構は主として河床附近の局部的な流れの模様によるものである。例へば主流が層流であつて、粒子に就いての Reynolds 数が極めて小さいときには粒子に作用する力は主

として摩擦抵抗であるが、Reynolds 数が大きくなると圧力抵抗が主となり、流れ自身も乱れるため作用力は動揺する様になる。特に主流自身が乱れているときには、何れの場合にも作用力は動揺する。

砂礫粒は球形に近いものとする。平衡状態にある河床の粒に作用する力はそれが圧力抵抗である場合には、その重心を通過するが、摩擦抵抗が主であるときには、寧ろ重心より上方に作用する。従つて2つの場合

第二  
図

を區別して考えねばならないが、彼の研究によれば、粒子の配列が時に緊密でない場合には略重心を通過するのる砂礫粒の動き始めに対して次の平衡条件を得る<sup>1)</sup>：

$$\tau_0 = \epsilon \frac{\pi}{8} \rho' g k \tan \gamma, \dots \dots (41)$$

茲に  $\epsilon$  は packing coefficient であつて、単位面積毎の突起せる粒の數に  $k^2$  を乗じたものである。

河床附近の状態が乱れて居る場合には (41) に於て  $\tau_0$  は河床に於ける平均剪断力であることは必要でなく、実際に粒子が動き始め得るために或る期間(極めて短い)継続される最大の歪力をあればよろしい。従つて  $\tau_0$  をその時の平均の剪断歪力即ち限界掃流力とすれば (41) の右辺には 1 より小さい或る factor が乗せられねばならない。例えば河床附近の変動速度の最大値が平均流速と同程度のものであれば、作用する最大の剪断歪力は平均の4倍になる。従つてこの factor は  $\frac{1}{4}$  である。White はこの様なとき "Turbulence Factor" が 4 であると稱して居る。即ち限界掃流力は (41) を与えられる  $\tau_0$  を turbulence factor で除したものである。

脚註 1) (41) を導くに際して流れによる浮力を無視している。実際緊密な河床にその半体を埋められた粒には Reynolds 数が大きい場合には抵抗と同程度の浮力が作用する。然しながらゆ弛かに置かれた粒の場合には圧力は向隙を傳つて粒の下半面にも作用するため浮力は常に小さく無視して差支えない。White は実験的にもこのことを確めて居る。

§5. 次元解析 新実験式 主流及び河床附近の流れが層流であるならば、限界掃流力 $\tau_c$ は砂礫粒の混合状態、形状或は配列状態に関する統計的無次元量を除いて、粒の平均直径 $K$ 、その密度 $\rho$ 、流体密度 $\rho'$ 及び重力の加速度 $g$ に依つて定まるであろう。然しながら若しここに、turbulenceが存在するならば、前節に述べた様に $\tau_c$ はそのため著しい変化を受ける、従つて次元解析に際しても吾々は乱れを特長付ける変数を導入しなければならぬ、扱て粒に作用する抵抗の機構から見て、turbulenceの影響としては流速及び圧力の動揺を考慮しなければならぬが、一般にはこの兩者の間には緊密な関係があるので簡単のため普通の様に変動速度 $v$ と turbulence の linear dimension  $\lambda$ を以つて turbulence field を特長付けることが出来るものと仮定する。従つて吾々は上記の変数の他に $v$ 、 $\lambda$ 及び流体の動粘性係数 $\nu$ 、最後に一般化する意味で河床附近の流速 $v$ を考慮することにする。

扱て吾々は密度として $\rho$ 及び $\rho'$ の2種類を同時に取り入れなければならぬが、物理的意味からその判別は容易であるから單に密度として $\rho$ なる記号を用うことにすれば吾々の次元解析に際しての変数は $\tau_c$ 、 $K$ 、 $\rho$ 、 $g$ 、 $\nu$ 、 $v$ 、 $\lambda$ 、 $\rho'$ の8個である。従つて $\frac{\tau_c}{\rho g K}$ 、 $\frac{vK}{\nu}$ 、 $\frac{v'K}{\nu}$ 、 $\frac{v}{\sqrt{Kg}}$ 、 $\frac{v'}{\sqrt{Kg}}$ なる5個の独立な無次元量を得る。これらの最後の2つは Froude 数であつて重力の影響を表わすものである。従つて第一の量に於て $\rho g K (\rho' - \rho)$ とあり、ここに重力の影響を浮力として考慮しておくならば、それ等が他に重要な役割を持つとは考えられぬから、結局吾々は $\frac{\tau_c}{\rho g K}$ 、 $\frac{v\lambda}{\nu}$  ( $\equiv R'$ )、 $\frac{v'\lambda}{\nu}$  ( $\equiv R$ ) の3個の無次元量を得る。従つて

$$\frac{\tau_c}{\rho g K} = f(R, R') \quad \text{----- (5.1)}$$

が成り立つ筈である。

(5.1) は一般的な関係であつて turbulence の発生原因には何等触れていない。然しながら若し或1つの装置に就いて考えるならば、河床に於ける剪断歪力 $\tau$ と $R$ 、 $R'$ との間には必然的な関係を生ずることも考えられぬので (5.1) は更に definite な形になり得る。第一表に挙げた従末の限界掃流力の実験的測定は一樣な定常流に就いて行われて居るので、吾々は無限に巾の広い一樣な矩形断面を有する開水路に於ける定常流を考えてみる。この場合に流れの様子は $\tau$ 、 $\rho$ 、 $\nu$ 及び水深 $h$ 、若し吾々が取扱つて居る場合の様に底面が粗であるときには、更

に粗度 $\tau$ に依つて決つて仕舞う。特に底面附近の状態は上層部の状態が余り着しく違わぬ限り $\tau$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ 及び $K$ に依つて定まり、従つて更に、次元解析に依つて $R$ 及び $R'$ は  $\frac{U_* K}{\nu}$  ( $U_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ) の函数となることは周知のことである。斯くの如くにして吾々の考へてゐる場合には(5.1)は

$$\frac{\tau}{\rho \nu g K} = f\left(\frac{U_* K}{\nu}\right)$$

の如く書き換えられる。

ここに於て第2節に述べた砂礫粒の混合状態に関する parameter  $\beta$  を導入して最後に

$$\frac{\tau}{\beta \rho \nu g K} = f\left(\frac{U_* K}{\beta \nu}\right) \text{ ----- (5.2)}$$

を得る。茲に右辺に於ける  $\beta$  は、粒の大きさが揃つてゐる場合( $\beta=1$ )には粗度はその直径に等しく不揃ひの時( $\beta>1$ )には有効的に粗度は平均直径より減少すると思はれるので導入されたものである。實際之を導入した方が判定点の散乱は減少する傾向がある。

第一表に挙げた資料を以つて計算した結果は同表及び第三図に示されてゐる。判定点は第一図に於けると同様に可成の散乱を示してゐるが、(5.2)の如き函数関係のあることを明かに示しており、限界掃流力に対して水路の乱れの状態が著しい役割をもつてあろうとの推察を裏付けるものである。

第  
三  
図

図に示されてゐる様に第2, 3節で述べた  $\tau - \beta \rho \nu g K$  図表に於ける特異点は第一図に於ては比較的緩やかな曲線の傾き方の変化を示してゐるのに過ぎなかつたが、第三図に於ては拡大されて著しい極小点となつて現われてゐる。この事はこの点の附近に於て限界掃流力の機構に関する著しい特異性の存在することを暗示するものであつて、限界掃流力に関する如何なる理論もこの特異性を説明し得るものでなければならぬことを示してゐる。

扱つて(5.2)は turbulence factor が砂礫粒の無次元的大さ  $\frac{U_* K}{\nu}$  の函数であることを示すものがあり、 $\frac{U_* K}{\nu}$  が turbulence の理論に於て極めて重要な量であることを思へば、限界掃流力の理論的研究に対しては便利な形である。然しながら実用的には  $U_*$  が  $\tau$  の函数であるため極めて不便である。そこで変数を変換して  $\mu = \left(\frac{U_* K}{\beta \nu}\right)^m \left(\frac{\tau}{\beta \rho \nu g K}\right)^n$  とおいて  $\mu$  には  $\tau$  を含まぬ様に  $m, n$  を定めるならば  $\frac{U_* K}{\beta \nu}$  は  $\mu$  と  $\frac{\tau}{\beta \rho \nu g K}$  の函数となる。これを(5.2)に代入して解けば  $\frac{\tau}{\beta \rho \nu g K}$  を  $\mu$  を含まぬ  $\mu$  のみの函数として求めることが出来る。即ち

$u_* = \sqrt{c_0/\beta}$  であるから、吾々は直ちに  $m = \frac{2}{3}$ ,  $n = -\frac{1}{3}$ ;  $\mu = \left(\frac{g}{\beta \nu^2} \cdot \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot K$  を得る。従つて (5.2) に代つて

$$\frac{\tau_0}{\beta \rho' g K} = \gamma \left( \sqrt[3]{\frac{g \rho'}{\beta \nu^2 \rho_0}} \cdot K \right) \quad \text{----- (5.3)}$$

を得る。

第一表の資料より計算した結果は第四図に示されている。この図に於ても前図に於けると同じ様に着しい極小が現われている。これらの極小は turbulence factor の極大に対応するものであり、この点に対して (5.2) の表現に際しては

第四  
図

$$\log \frac{u_* K}{\nu} \doteq 1.4 \quad \text{或は} \quad \frac{u_* K}{\beta \nu} \doteq 25,$$

(5.3) の表現に際しては

$$\log \left\{ \frac{g/480}{\beta (100\nu)^2} \cdot \frac{\rho'}{\rho_0} \right\}^{\frac{1}{3}} \cdot K \doteq 1.15 \quad \text{或は} \quad K \doteq 0.14 \sqrt[3]{\frac{\beta (100\nu)^2}{g/1780} \cdot \frac{\rho_0}{\rho'}} \quad \text{----- (5.4)}$$

である。

普通の水路実験に於ては仮に  $\beta = 1.0$ ,  $\rho'/\rho_0 = 1.6$ ,  $\nu = 0.01$  とおいて turbulence factor の極大は砂礫の大きさが約 1.2 粒のところに生ずる。

概して第四図に於て特に注意しておきたいことは、横軸は砂礫と流体の性質のみに関する無次元量をあつて、而も密度及び  $\beta$  は立方根号内にあり、流体の粘性係数も  $\frac{2}{3}$  乗にて現われているから、この無次元量は砂礫粒の平均直径に比例しての比例常数は近似的に一定であると考えて差支えないことである。従つて同図に示された実線は限界掃流力の実験法則を表わすものとして次元的にも正しく實際使用に際して便宜を与えるものと考えられる。今仮に turbulence factor の極大附近とその左右の3つの領域に分けて実験式を求めるならば次の如くなる：

$$\frac{\tau_0}{\beta \rho' g K} = -0.047 \log_{10} X - 0.023, \quad X < -1.0,$$

$$\frac{\tau_0}{\beta \rho' g K} = 0.01 \log_{10} X + 0.034, \quad -1.0 < X < -0.6,$$

$$\frac{\tau_0}{\beta \rho' g K} = 0.0517 \log_{10} X + 0.057, \quad -0.6 < X,$$

茲に

$$X = \left\{ 1.02 \times 10^{-7} \cdot \frac{g}{\beta v^2} \cdot \frac{f'}{f_0} \right\}^{\frac{1}{3}} \cdot k \doteq \sqrt[3]{\frac{f'}{f_0}} \cdot k$$

である。但し  $X$  の近似表式を用うる際には、平均直径  $k$  は 1 粒を単位として測られねばならない。

§ 6. 測定 の 散 乱 第 1, 3, 4 図に見る様に限界掃流力に関する測定点は可成の散乱を示している。次章以下に於ける理論的考察の準備のために、今ここに少くその原因を調べておく。

(i) 先づ考えられることは砂礫粒の形状、配列及び混合状態等の統計的性質が一様でないこと、そしてこれらの性質を表式に適当に考慮することの困難なことが挙げられる。

(ii) 前節の考察から明かな様に限界掃流力には水流の乱れの状態が著しい影響をもつている。然るに使用水路の異なる毎に乱れの状態も亦多少とも異つた法則に支配されるため (5.1) に於ける  $R$ ,  $R'$  は共に  $\frac{v \times k}{V}$  の函数であつても従つて異なり、最後の (5.2) も多少とも違つて来る筈である。この様にして各研究者の使用した実験装置が恐らくは流体力学的に相似の関係にないであろうこともその原因の一つと考えられる。

(iii) 最後に、水路実験に際して技術的な困難、それに伴う誤差等も当然考えられるが、これはさておいて、限界掃流時の判定は技術的にも困難であるばかりでなく限界掃流力の定義に直接関係をもつ理論的に避けることの出来ない測定値の散乱の最も大きな原因と思われる。

各研究者は夫々一定の標準を置いて砂礫粒の動き始めを測定している。例えば、標準 a) Schoklitsch は同じ程度の大さの粒から出来ている河床の上に置かれた 1 つの粒が始めて動き出した時を、標準 b) Krey は著しい或は活潑な粒の運動の起り始めを、標準 c) Kramer 及び U.S. Waterways Experiment Station は最も大きな粒までも込めて砂礫の一般的な運動の起り初めを夫々限界掃流時として定義している。これ等標準の差違に依つて限界掃流力も異なるのは当然である。実際最も精細な標準 a) に従う Schoklitsch の結果は第 3 図に於て系統的に小さい値を与えて居り、最も実際の粗い標準 c) に従う Kramer 及び U.S. Waterways Exp. St. の結果は比較的大きな値を与えている。そして測定点は僅かに 3 個であるが Krey のものは中庸にある。最後に安藝氏の研究はこの種のものとして極めて緻密なものであり、限界掃流時を抵抗

曲線に現われも特異点に依つて定義しているが、略々標準C)に属するもので、他に較べて大なるてゑを与えている。

第1の原因に就いては吾々は初めより全く触れていない。第2の原因に就いては測定誤差と共に吾々は問題とする資格を有合せない。第3の原因は限界掃流力の理論的取扱いに際しては是非とも考慮しなければならぬものである。

## II 理論的考察

### §7. Turbulence Factor-Diagram の物理的意味

吾々はこの章に於て turbulence factor が  $\frac{2\alpha K}{\beta \nu} = 25$  の附近にて着しい極大を示す事を手掛りにして限界掃流力の力学的機構を探つて見たいと思う。

この目的のために先づ Reynolds 数が 25 ( $\beta = 1$  として) 附近に於て特異の性質を示す他の乱流の現象を調べて見る。

i) 粗い管内の乱流に就いて抵抗係数と  $\frac{2\alpha K}{\nu}$  の関係を見るに、粗度が次第に減少すると抵抗は自乗法則よりずれ始め1つの極大を経て次第に滑かな管の場合に移行する。その際自乗法則よりのずれがようやく顕著になり出すところが略々  $\frac{2\alpha K}{\nu} = 25$  になっている。<sup>1)</sup>

ii) 滑かな管の場合に、壁面に向つて進むに従つて流体粘性が渦動粘性に對して次第に増加して行く。その際流体粘性が重要性を生じて来る様な、例へばその比が10%となる壁からの距離を対して  $\frac{2\alpha \beta}{\nu} = 32$  である。<sup>2)</sup>

iii) 粗い管内の乱流は粗い粒の代りに細い cylinder を筋に列べても同じ性質を有している。今1個の cylinder の抵抗係数を見るのに Re-

脚註 1) S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. II, p. 378, Fig. 120

2) 栗原道徳, "エルクレー" 関係より見たる混合距離理論の新解釈と管内の乱流に就いて 流体工学研究所報告 第3巻 第1号 (昭和21年) 第4回 参照  
以下この論文を(1)と記号する

3) S. Goldstein, loc. cit., p. 425, Fig. 154.

ynolds 数が次第に増加し圧力抵抗が粘性抵抗に較べて急にその重要性を増加しかけるところに対する Reynolds 数は約 50 である。<sup>3)</sup>

IV) G. I. Taylor<sup>4)</sup> に依れば smallest eddies の大きさ  $\lambda$  と乱流発生機構の大きさ  $M$  との間には

$$\frac{M}{\lambda} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{v' M}{\nu}}, \quad \frac{v' M}{\nu} > 60 \quad (7.1)$$

なる関係が成立する。茲に  $v'$  は変動速度の自乗平均値の平方根<sup>5)</sup> である。若し Reynolds 数が極めて小さいときには (7.1) は

$$\lambda \propto M$$

に移行する。

滑かな管及び粗い管の場合にも壁面から少しく離れたところでは  $v' \sim \lambda$  と考えられるから、(7.1) に対する限界は略々  $\frac{v' M}{\nu} \approx 60$  を意味する。従つて  $\frac{v' M}{\nu} \sim 25$  は (7.1) からのずれが著しくなり初める附近であらうと思はれる。

これらの事實は Reynolds 数が減少して行く際に流体粘性が滑動粘性に対して次第に重要性を増加して行くことに深い関係のある現象である。流体微小部分の運動の面から見るならば、その慣性が重要性を失ふことを意味している。従つてこれらは流体微小部分は圧力勾配及び粘性抵抗に支配され出すことと緊密な関係のある現象であり、同様の事が turbulence factor に極大を生ずることに就いても言えるものと思われる。この問題に關聯して G. I. Taylor<sup>6)</sup> が Frage 及び Townend の壁ざわに於ける乱れの測定結果を用いてなした壁ざわの流体の運動に關する議論は極めて興味深いものである。若し彼に従つて更に推論を進めるならば砂礫粒に作用する主要な力は流れと直角な壁に沿つた方向の強い圧力勾配の変動によるものであり、その作用力に極大を生ずるのは、一種の同調現象に起因するのではなからうかとの疑いを抱くに到る。

脚註 4) G. I. Taylor, Statistical Theory of Turbulence V, Proc. Roy. Soc. A, 156 (1936), 粘性流体 (文精社) I, P. 347

5) Square root of the average squared quantities

6) G. I. Taylor, Note on the Distribution of Turbulent Velocities in a Fluid near a Solid Wall, Proc. Roy Soc. A, 135 (1932) 粘性流体 (前出) I, P. 205

§ 8. Inner, Outer 及び Equivalent Layers. 扱て水路の床面附近に於ける乱流の圧力動揺と砂礫粒との間の同調現象としては turbulence の大きさと粒の大きさに直接関係する様な現象の他には推測し難い。そこで管或は平行板間の乱流に就いて乱れの大きさに主眼を置いて考察してみる。

管の半径或は平行板間の距離に較べて粗度  $k$  が小さい場合には  $k$  の如何に拘らず velocity defect の分布は滑らかな場合と同一形で、剪断歪力  $\tau$  に依つて決まる。従つて管内に於ける乱線発生機構には粗度及び質量交換の2種類があるが、管内の大部分の領域に於ては後者によるものが主要であり、前者によるものは壁ぎわの極めて限られた領域に存在するのである。この領域の乱れは粗度によるものとその外側の主な乱れの場の干渉に依つて生ずるものと考えられる。従つて吾々は全領域を便宜的に壁面の粗粒子を含む狭い inner layer とその外側の outer layer に2分して、inner layer の乱れは粗度及び outer layer の乱れにより誘導されるものとし outer layer の乱れは質量交換に依つて平均流のエネルギーより供給されるものが主であつて inner layer からの作用は無視し得るものと考えらることにする。従つて outer layer の状態は滑らかな場合と略々同じである。

扱てこの兩層の区分は全く便宜的であつてその区界を劃定することは出来ないが、吾々が以下必要とするのはこの outer layer の inner layer に及ぼす影響であり、特に圧力変動が主であるから、この意味に於て outer layer の乱れを代表する様な Equivalent layer を考えることに依つてこの難点を除くことが出来る。

この際

equivalent layer の壁からの距離(以下簡単に高さと呼ぶ)は  $k$  が大なる程大きい。他方  $k$  が laminar sub-layer の厚さを  $\Delta$  より小さい場合には equivalent layer はこの layer に作用する outer layer を代表するものであるからその高さは  $\Delta$  よりも大である。従つて equivalent layer の高さを仮想的に設けた laminar sub-layer

より割つて  $\epsilon$  とおくならば、吾々は

$$\frac{v_* \epsilon}{\nu} = a \frac{v_* \Delta}{\nu} + b \frac{v_* K}{\nu} \quad \text{--- (8.1)}$$

とおくことが出来るであろう。この式の意味は一般に  $\frac{v_* \epsilon}{\nu}$  は  $\frac{v_* K}{\nu}$  の  
 函数であるべきを近似的に Taylor 級数に展開しその始めの二項を採用  
 したことになる。

流れの方向に壁面に沿つて  $x$  軸を、壁面に直角に  $y$  軸を、又これらに  
 直角に  $z$  軸をとる。然るとき壁に近い部分に於ける乱れの大きさは  $y$ -方向  
 には混合距離  $l$  と同程度のものであろうが、 $x$ 、 $z$ -方向には流体の運  
 動は幾何学的制限を受けぬ故にその大きさも亦  $l$  よりは大きい筈である。  
 又 Taylor<sup>D)</sup> に依れば壁ざわに於ける圧力勾配の動搖は  $z$ -方向に着しく  
 $x$ -方向には極めて小さい。従つて  $x$ -方向の乱れの大きさは  $z$ -方向の  
 ものに較べて着しく大きい。この事は又  $y$ -方向に速度勾配があるため  
 に質量交換に依つて渦動線は  $x$ -方向に着しく引き延ばされることから  
 も容易に理解されることである。

Inner layer は壁面に沿つて極めて薄い層であるから、流体の運動  
 は粗い粒がある場合でもそれ等の面に沿つており、outer layer に於  
 けるものに較べて 2 次元的である。従つて outer layer に於ける圧力  
 変化はそのまゝ inner layer に傳へられると考えることが出来る。他  
 方粒の大きさ  $K$  に較べて乱れの大きさが余り大なるときには、圧力変化によ  
 る粒への作用力は極めて小さくなる。従つて吾々は equivalent layer  
 に於ける turbulence の linear dimension  $M$  としては  $z$ -方向のも  
 のを考へれば充分である。若しも  $\epsilon$  が充分大きければ、 $x$ -方向は除い  
 て、流体の自由度を増し乱れは次第に等方性に近づく。従つてその li-  
 near dimension も  $l$  と同程度のものとなる筈である。然るに後に知  
 る様に  $\epsilon/\Delta$  は相当に大きいから  $l$  に就いて Prandtl の仮定をそのまゝ  $M$   
 に対して採用して近似的に

$$\frac{v_* M}{\nu} = b \frac{v_* \epsilon}{\nu} \quad \text{--- (8.2)}$$

を仮定する。

脚註 D) G. I. Taylor, (前出). 13頁脚註 6).

(8.1) を (8.2) に代入すれば, equivalent layer に於ける乱れのZ-方向の大きさに就いて

$$M = C_1 L + C_2 K, \quad e_1 = ab', \quad C_2 = bb' \dots \dots (8.3)$$

を得る。

砂礫粒に作用する圧力変動による力はMがKに較べて極めて大きい  
か、小さいならば極く弱く、MとKとの比が1に近い適当な値を取る  
場合に最大の効果を見出す。従つてC<sub>2</sub>が適当に小さいものならば  
(8.3)に従つてMがKと共に増加する際に或るKの値に対して作用  
力、従つて Turbulence factor が最大となる筈である。

この様にして才1, 3及び4図に現はれた限界掃流力の特異性を砂  
礫粒の大きさと乱れの大きさとの同調現象によつて説明し得る可能性を  
発見したので次節以下に於て簡単な model に従つてこの推論を確かめ  
たいと思ふ。

### § 9 砂礫粒に作用する力

扱つて前節に述べた様にZ-方向の圧力勾配の変動は極めて小さいか  
ら砂礫粒に作用する力を計算するときにはこれを無視して、Z-方向  
に就いて圧力変動P'を簡単に  $P' = P \sin 2\pi \frac{z+\delta}{M}$  にて表はし得る  
ものとする。茲にδは位相差であり、時間と比例するものとする。  
砂礫粒は球に近いものとし、これに作用するZ-方向の力をΔF<sub>1</sub>と  
すれば

$$\Delta F_1 = MP \cos 2\pi \frac{S}{M} \\ \times \left[ K \cos \pi \frac{K}{M} - \frac{M}{\pi} \sin \pi \frac{K}{M} \right]$$

となる。従つて自乗平均値の平方根は

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^S (\cos 2\pi \frac{S}{M})^2 dS / 2S = \frac{1}{2}$$

であるから

$$\frac{MP}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{M}{\pi} \sin \pi \frac{K}{M} - K \cos \pi \frac{K}{M} \right\}$$

となる。そこで球の断面の単位面積に働く力の自乗平均値の平方根  
Δf<sub>1</sub>は

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1 &= 2\sqrt{2} E f_1(\zeta) = 4\Delta P f_1(\zeta) \\ f_1(\zeta) &= \frac{\sin\zeta - \zeta \cos\zeta}{\zeta^2}, \quad \zeta = \frac{\pi K}{M} \end{aligned} \right\} \dots (9.1)$$

で与えられる。茲に  $\Delta P$  は equivalent layer に於ける圧力変動の自乗平均値の平方根である。

前節に述べた理由によつて equivalent layer に於ける乱れに就いては河床が滑らかな場合の理論を用ひて差支へない。論文(1)に依れば河床に余り遠くない領域に於て乱れのエネルギー  $E$  は

$$E = E_0 \Xi^2(\chi), \quad \chi = 2K \frac{V_* \zeta}{V} \dots (9.2)$$

にて与えられる。茲に  $\chi$  を壁面に於ける剪断歪力とすれば

$$V_*^2 = \frac{\tau}{\rho_0} = \sqrt{\eta} E_0, \quad \sqrt{\eta} = 0.256 \dots (9.3)$$

$$\Xi(\chi) = -\frac{1}{\chi} + \sqrt{1 + \frac{1}{\chi^2}} \dots (9.4)$$

である。 $K$  は数値係数にして 0.40 に等しい。

他方圧力の変動  $\Delta P$  は Bernoulli の定理に依つて略々  $\rho E$  に等しい事が推測される。実際 Taylor<sup>2)</sup> に依れば

$$\Delta P = \alpha \rho E \dots (9.5)$$

であつて、 $\alpha$  は多くの場合に 1 に近い数字であり  $\sqrt{2}$  まで変り得るとされてゐる。

河床に近い部分では乱れの  $x$ -方向の linear dimension は極めて大きいから比較的狭い領域をとれば乱れは  $y, z$  方向の 2 次元的なものと考へられる。而も  $y$ -方向の速度変動は  $z$ -方向のものに較べて極めて小さいから Taylor の論文に於て 2 次元運動にして  $A^2=0$  或は  $B^2=0$  の場合を引用すれば  $\alpha = \sqrt{2}$  である。

斯の如くにして (9.1), (9.2) 及び (9.5) に依り、最後に吾々は

$$\Delta f_1 = 4\alpha \frac{\tau}{\sqrt{\eta}} f_1(\zeta) \Xi^2(\chi), \quad \alpha \approx \sqrt{2} \dots (9.6)$$

を得る。

砂礫粒に働く力として吾々は更に速度変動に起因する抵抗を求めなければならぬ。粒に作用する圧力変動は equivalent layer に於けるものに等しいが、この流体抵抗は粒に接觸する inner layer に於ける流体

脚註

1) 論文(I) P.P 41, 42

2) G.I. Taylor, Proc. Camb Phil Soc. 32 (1936) 粘性流体(前出) P. 389

の速度変動に起因する。従つてこの速度変動を先づ知らねばならない。Inner layer に於ける速度変動はそこは粒の存在するため平均流が攪乱されることによつて、又同時に outer layer の turbulent motion に依つて惹き起される。これ等兩者を区別することは厳密には出来ないが、仮りに分け得るものとすれば、前者を粒に及ぼす流体抵抗の直接原因として取り入れることは抵抗を2重に加算することになつて意味がない。吾々は單に後者  $w'$  ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) のみに就いて考へればよろしい。元來  $w'$  は outer layer に於ける流動による drag 及び圧力勾配の変動によるものであるからその平均流速に対する比は滑かな管に於ける壁ぎはの値を見ても著しい相違はない筈である。従つて Fage 及び Townend<sup>1)</sup> の測定結果を用ふるならば X-方向及び Z-方向の速度変動の最大値  $w_1$ ,  $w_1$  の平均流速  $u$  に対する比は夫々

$$\frac{w_1}{u} \sim 0.17, \quad \frac{w_1}{u} \sim 0.8, \quad \text{----- (9.7)}$$

である。

他方  $w'$  ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) の空間的振りは equivalent layer に於ける主として圧力変動の振りに依つて定まると考へられる。又速度変動の波長は圧力変動の波長の2倍程度であるから<sup>2)</sup>、吾々は Z-方向に就いて  $W' = W \sin \pi \frac{z}{M}$  なる変動を仮定する。然るときは砂粒に接觸する部分に就いての自來平均の平方根は前同様にして  $2\Delta W \frac{\sin^{3/2}}{3}$  で与へられる。茲に  $\Delta W$  は  $W'$  の自來平均値の平方根である。従つて、簡単に (9.7) 程度の流速変化に際しても同一の抵抗係数を仮定するならば Z-方向の速度変動に起因する壁面の単位面積に及ぼす抵抗  $\Delta f_2$  は

$$\Delta f_2 = \left(\frac{\Delta W}{V} f_2(\zeta)\right)^2 \tau, \quad f_2(\zeta) = \frac{\sin^{3/2}}{3/2} \quad \text{----- (9.8)}$$

である。同様に  $u'$  に起因するものを考慮に入れて X-方向に作用する力は、河床の単位面積毎に、

$$\Delta f_3 = \left(1 + f_2(\zeta) \frac{\Delta u}{u}\right)^2 \tau \quad \text{----- (9.9)}$$

で与へられる。茲に  $\Delta u$  は  $u'$  の自來平均値の平方根である。

脚註 1) S. Goldstein (前出) P. 394, Fig 131

2) Inner layer は極めて壁に近いからその内部の速度変動に対して論文 I の理論は成立し難い。

3) G. I. Taylor 17頁脚註 2), 式(1), (5) 或は (9) (10) 参照

§. 10 限界掃流力

河床の砂礫はその原因の如何に拘らず一度安定を失へば僅かな掃流力に依つて移動を初めるであらうから、才4節に説明した White の平衡條件(4.1)を砂礫粒に作用する合成力を用ひて書き改めるならば吾々は次の關係式を得る。:

$$\left\{ \left( \frac{\pi \xi}{4} \Delta f_1 + \Delta f_2 \right)^2 + \Delta f_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \xi \frac{\pi}{8} \rho' g K \tan \varphi$$

(9.6), (9.8) 及び (9.9) を代入してを  $T_0$  とおけば「限界掃流力」 $T_0$  及び Turbulent factor  $T$  に対して

$$T_0 = \frac{1}{\xi} \xi \frac{\pi}{8} \rho' g K \tan \varphi, \quad \text{--- (10.1)}$$

$$T = \left[ (1 + f_2(\xi) \frac{\Delta u}{u})^4 + \left\{ \frac{\pi \xi \alpha}{\sqrt{\lambda}} f_1(\xi) \Xi^2(\lambda) + \left( \frac{\Delta w}{u} f_2(\xi) \right)^2 \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{--- (10.2)}$$

を得る。

(10.2) には砂礫粒に作用する力として平均値が用ひられて居る。

然しなから上述の理由に依つて砂礫粒は零でない確率で出現する最大の力が平衡を破り得る場合に動き始めるであらう。例へば Townend<sup>1)</sup> に依れば観測に現はれる変動速度の最大値  $u_1, v_1, w_1$  はそれ等の自乗平均値の平方根の殆んど3倍である。従つて吾々は(10.2)に於て  $\Delta P$  に就いては  $f_1(\xi)$  を含む項及び  $\Delta u, \Delta w$  を夫々3倍しなければならぬ。一般には砂礫粒の動き始めに關する標準に關係した或確率係數  $\beta_1, \beta_2$  及び  $\beta_3$  が乘ぜらるべきである。従つて(10.2)は次の如く書き換へられる:

$$T = \left[ (1 + \beta_2 f_2(\xi) \frac{\Delta u}{u})^4 + \left\{ \frac{\pi \xi \alpha}{\sqrt{\lambda}} \beta_1 f_1(\xi) \Xi^2(\lambda) + \left( \beta_3 \frac{\Delta w}{u} f_2(\xi) \right)^2 \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{--- (10.3)}$$

脚註

1) H. C. H. Townend, proc. Roy. Soc. A. 145 (1934)

### III. 数 値 的 考 察

#### § 11 係 数 $C_1, C_2$ の 決 定

(8.1) (8.2) に於ける係数  $a, b, b'$  従つて (8.3) に於ける  $C_1, C_2$  の数値を理論的に求めることは現在の段階に於ては不可能であるが、それ等の大きさの程度は容易に推測される。

(8.1) は直径が  $K$  である砂礫河床に対する equivalent layer の高さ  $\Delta$  を与へる式である。先づ  $K/\Delta$  が極めて小さい時には equivalent layer は laminar sub layer 内に於ける河床に平行な乱れを支配する outer layer の乱れを特徴づける層である。従つて河床の影響も比較的弱まり乱れも本来の機構に依つて発生される様な層であるから、流体粘性が渦動粘性に対して無視され得る。例へば5%程度になることを標準に取るならば論文1オ4圖に依つて  $\frac{v_* (\xi + \Delta)}{v} = 57$  であり  $\frac{v_* \Delta}{v} = 6.83$  として (8.1) より  $a = 7.3$  を得る。次に  $K/\Delta \gg 1$  なる場合には前の場合に較べて inner layer に近い outer layer の部分に於ける流体の運動そのものが既に3次元的な自由度を有する様になるから equivalent layer は inner layer から余り離れて居ない筈である。そこで inner layer より粒の大きさ程度上層にあるとすれば (8.1) より  $b = 2$  を得る。

扱つて速度変動を  $\sin \pi \frac{x}{L}$  の型にて表はした場合に混合距離は  $M/2$  と考へられる。他方論文1に依つて  $\lambda \approx 0.2$  であるから (8.2) に於て  $b' = 0.4$  となる。以上の数値を用ひて最後に吾々は

$$C_1 \sim 2.9, \quad C_2 \sim 0.8 \quad (11.1)$$

を得る。茲にこれ等の数値は單に大きさの程度を示すに過ぎないが、函数  $f_1(\xi)$  の性質より  $C_2$  の最小値は 0.699 であつて  $C_2$  はこの値に近いものでなければならぬ事が知られる。従つて  $C_2 = 0.8$  は妥当なものと考へられる。然しなから  $C_1$  に就いて他に確めの方法がないので理論の結果がよく測定結果と一致する様に決めることにする。

Turbulence Factor の極大は (5.4) に与へられてゐる様に略々  $\frac{v_* K}{v} = 25$  に起る。この極大附近に於ては圧力変動従つて (10.3) に於ける函数  $f_1(\xi)$  が決定的な役割を待つてゐるから、その極大は  $\xi = 2082$

脚註 1) 次頁にあり。

が  $v_* K / \nu = 25$  に対応する様に  $C_1$  を定めるならば  $C_2 = 0.8$  とし、(12.1) を予期して  $C_1 = 2.6$  を得る。偶然ではあるがこの値は(11.1) に与へたものとよく一致してゐる。

この様にして以下の計算に於ては

$$C_1 = 2.6, \quad C_2 = 0.8 \quad (11.2)$$

を採用することにする。

### § 12 函 数 $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$

圧力変動の作用  $\Delta f_1$  は (9.6) に与へられてゐる様に、掃流力  $\tau$  が与へられると函数  $f_1(\zeta)$  並  $\chi(X)$  を通じて砂礫粒の直径  $K$  と共に変化する。然しながら前節に求めた係数  $a$  の値 ( $\sim 7$ ) からだけでも解る様に *equivalent layer* の高さ  $\delta$  は相當に大きい ((8.1) に於て  $\frac{v_* \Delta}{\nu} = 6.83$  とおけば  $v_* \delta / \nu \geq 50$ )。従つて (9.2) により  $\chi$  も相當に大きく (9.4) より解る様に並  $\chi(X)$  は  $K$  の如何に抱うず殆んど 1 に等しい。斯くて  $\Delta f_1$  に就いては  $f_1(\zeta)$  のみを考慮すればよいことを知る。

$f_1(\zeta)$  は (9.1) に与へられている。 $\zeta$  の零のとき同じく零で  $\zeta$  と共に増加し  $\zeta = 2.032$  に於て極大値 0.4361 を取り、その後は單調に減少して  $\zeta = 4.494$  に於て再び零となる。又流速変動による作用  $\Delta f_2$  は函数  $\{f_2(\zeta)\}^2$  にて表はされる。(9.8) に依つてこれは  $\zeta = 0$  の際に極大値 1 をとつて  $\zeta$  と共に減少し  $\zeta = 2\pi$  に於て零となる。これ等函数  $f_1(\zeta)$ ,

脚註 1) 物理的に見ると砂礫粒が次第に大きくなるとには *inner layer* の乱れは強まり *outer layer* に対する干渉も著しくなつて、こゝで考へてゐる様な *outer layer* の圧力変動等はその個性を失ひ次第に重要性を失つて行く筈である。然るに吾々の理論にはこの事情が取入れられていない。そこで若し  $K \rightarrow \infty$  の際に  $\Delta f_1 \rightarrow 0$  となる様に係数を定めるならばこの難点は一応取除くことができる。他方實際に  $K$  が相當大きく数学的に無限大と考へられる様な場合でも *outer layer* の圧力変動の効果は多少残るべきであらうから上の場合は 1 つの極限の場合である。 $f_1(\zeta)$  は  $\zeta = 4.494$  に於て零となるから (12.1) に依つて  $C_2$  の下限は 0.6991 となる。又  $C_2$  がこの下限より余り大なるときは  $K \rightarrow \infty$  の際にも相當に大きい  $\Delta f_1$  が作用するので不合理である。

$f_2(\zeta)$  の変化の様子はオチ図に示されている。

最後に  $f_1, f_2$  の argument になつて居る変数  $\zeta$  は (9.1) 及び (8.3) に依つて  $K$  と次の如く結び付けられている。

$$\zeta = \pi \frac{K}{M} = \pi \frac{K/\Delta}{c_1 + c_2 K/\Delta} \quad (12.1)$$

茲に  $v_* \Delta / \nu = 6.83$  であるから、無次元の直径  $v_* K / \nu$  を与ふればこれに應ずる  $\zeta$  は (12.1) の助を藉りて計算され、 $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$  はオチ図から求められる。

### § 13 係数 $\sigma$

Inner layer に於ける圧力及び流速は turbulence に固有な確率法則に従つて変動する。砂礫粒に作用する力もこれに従つて変動する。管内の速度変動が正規の誤差曲線に従っていることは周知の事である。そこで inner layer 内の変動量も亦同じ法則に従ふものと仮定するならば  $\sigma$  を自來平均値の平方根として  $x$  の出現の確率  $P$  は

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (13.1)$$

で与へられる。

$x$  が  $|x| > x_1 > 0$  なる値を取る確率は  $1 - \int_{-x_1}^{x_1} P dx$  である。2つの  $x_1$  の値に対する  $|x|$  の平均値  $\bar{x}$  を計算すれば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} 1 - \int_{-x_1}^{x_1} P dx &= 0.01 & x_1/\sigma &= 2.58 & \bar{x}/\sigma &= 2.91, \\ &= 0.025 & &= 2.24 & &= 2.58, \\ &= 0.05 & &= 1.96 & &= 2.34, \\ &= 0.0625 & &= 1.87 & &= 2.24 \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

扱つて限界掃流力の別定に際して極めて僅かの砂礫粒の移動を標準にすることは出現の確率は小さいがその値は極めて大きい方に依る移動を注意することになる。又逆に砂礫粒の一般的な移動を以つて限界掃流力時とする事は出現確率の大きい従つて比較的小さい方に依る移動を標準にすることである。この様に1つの標準に対して1つの確率が対応している。然しながらその対応關係を理論的に知ることは困難である。そこで1つの例に就いて調べてみる。

オ10節に述べた様に H.C.H. Townend に依れば乱流に際して觀察し得る最大の變動速度はその自來平均値の平方根の約3倍である。これと (13.2)

に比較するならば約1%の確率を以つて出現する大きな変動速度に対応している。そこで最も精細に観測する場合に得られる限界掃流力は丁度確率1%を以つて出現する大きな力に対応するものとする。然るときはこの標準を原典に取つて確率の対数に従つて限界掃流時に対する標準を数量的に定義することが出来る。

(10.3)に於ける  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  は或一つの合成力の出現する確率  $\beta$  に対応して求められるべきであるが、1つにそのためには圧力及び速度変動間の相関関係を知る必要があり、他方計算が複雑化するので、簡単に最も主要なる圧力変動に重点をおき、これ等の量の間の相関性の強いことに感謝して近似的に  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$  とおいても吾々の目的のためには充分であらう。

#### § 14. 理論と実測との比較

前節までに吾々の理論に本質的な係数  $C_1, C_2$  の値及び  $\beta$  の意味を知ることが出来た。従つて其の他に掃流力の実験に際して測定されるべき砂礫粒の配列に関する係数  $\phi$  及び一般に乱流の研究より知らるべき  $\alpha, \sqrt{u}$  及び  $\frac{\Delta u}{u}, \frac{\Delta w}{u}$  の値を用ゐるならば(10.3)に依つて turbulence factor  $\gamma$ 、従つて(10.1)により限界掃流力の値を  $\frac{2.4K}{V}$  の函数として求めることが出来る。White の実験値  $\varepsilon = 0.4, \tan \phi = 1$  及び Fage 及び Townend の測定値  $(9.7) \frac{u_1}{u} = 0.7, \frac{w_1}{u} = 0.8$  更に  $\alpha = \sqrt{2}, \sqrt{u} = 0.256$  を用ひて計算した結果は第二表に、又第三図に実線をして書きこまれている。その際に前節に述べた様に1%の出現確率に対して最も精細な測定を対応せしめ(9.7)の値は  $\pi/0 = 2.91$  に対するものであるとした。そしてこの場合の砂礫粒の移動の始めに対する標準を第一級、次にその2.5倍の出現確率に対応するものを第二級、更にその2.5倍のものを第三級の標準として、夫々の標準に対する曲線が求められている。第0節に述べた標準 a), b), c) は略々夫々第一, 2, 3級の標準に対応するものと考へられる<sup>(1)</sup>。

#### 脚註

1) 五角による認識の階級は絶対値の対数に依る。今仮りに恒星の光度星級になぞらへれば、1%を1等として2.5%が2等であり6.25%が3等である

第二表 Turbulence Factor 及び限界掃流力

$\frac{K}{\Delta}$	$\log \frac{U_* K}{\nu}$	第1級標準 1%		第2級標準 2.5%		第3級標準 6.25%	
		T	$\tau_0$	T	$\tau_0$	T	$\tau_0$
0.25	0.235	3.69	0.0566	3.26	0.0641	2.817	0.0723
0.5	0.536	5.05	0.0413	4.37	0.0478	3.81	0.0549
1.0	0.837	6.83	0.0306	5.91	0.0354	5.11	0.0409
2.0	1.14	9.17	0.0228	7.91	0.0264	6.85	0.0305
4.0	1.44	9.80	0.0213	8.44	0.0248	7.33	0.0285
10	1.84	7.93	0.0264	6.85	0.0305	5.95	0.0351
20	2.14	6.11	0.0342	5.30	0.0394	4.63	0.0452
50	2.54	4.61	0.0454	4.01	0.0521	3.51	0.0595
100	2.84	4.04	0.0517	3.52	0.0593	3.11	0.0672
200	3.14	3.73	0.0560	3.28	0.0637	2.89	0.0723

図を一瞥して解ることは吾々の理論は極めて粗雑なものであるにも拘らずその結果は測定結果の性質を大体に於てよく表していることである。 $\tau_0/\rho g K$  の絶対値は主として white の砂礫粒の配列に関する測定結果及び turbulence に関する一般的な既知の資料に依つて定められるにも拘らず、その値が実測値とよく一致していることは特に注意されるべきことである。これ等のことは砂礫粒の移動始めに関する white の平衡理論の妥当であること及び outer layer に於ける変動圧力勾配が砂礫粒に作用する最も重要な要素であり、turbulence factor の極大は乱れの大さと砂礫粒の大さとが一種の同調の関係に依つて起るものであることを示すもので、吾々の推論が妥当なものであつたことを裏書きするものであろう。

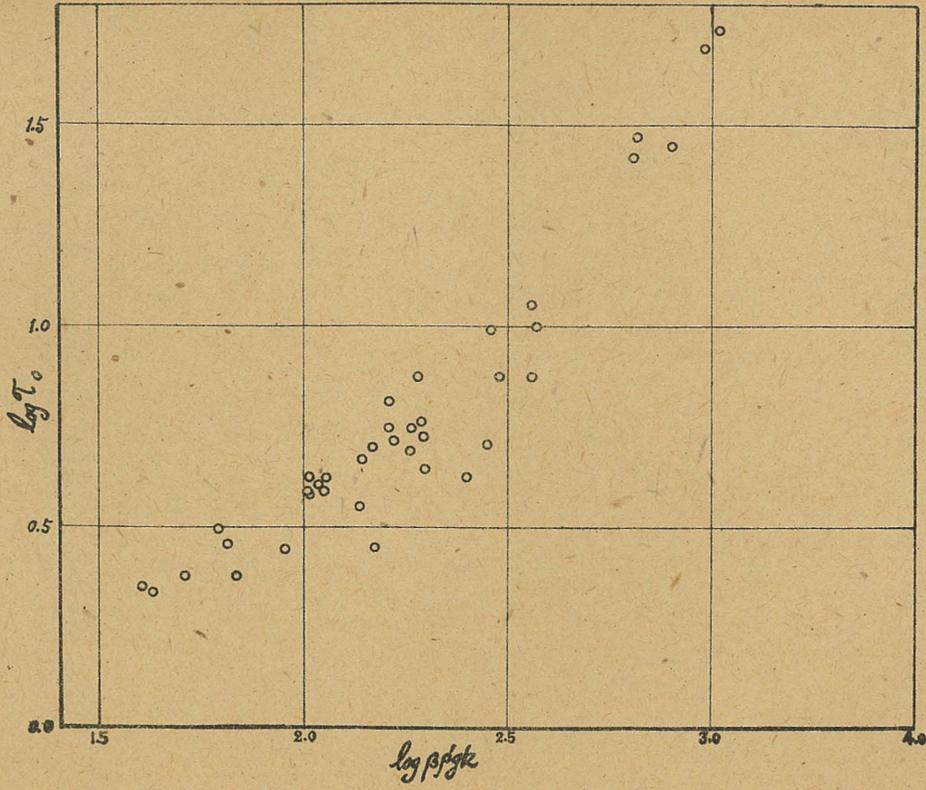
第1級の標準は略々最も精細な観測に対応するものであるから測定点群も亦これに対応する曲線に依つて下方に限られる筈である。実際因に於てもその傾向が認められる。細い砂礫は荒い砂礫に較べてその移動は発見し難い。従つて  $\frac{U_* K}{\nu}$  の大きい程精細に観測され易く曲線の極小点より左側にあるものが右側のものに較べて同一確率の理論曲線より上方に多く散乱しているのは此の理由に基づくものではなからうか。

最後に此の研究は文部省科学研究費の援助により行はれたものであることを附記する。 昭和23年3月20日 流体工学研究所に於て。

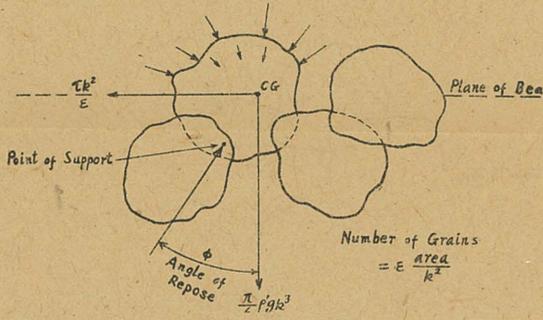
第一表

実験者	観測値 $\tau_0$ dynes/cm <sup>2</sup>	砂礫の 密度* pg/cm <sup>3</sup>	平均直径 K cm	$\beta$	$U^*$	$\frac{U^*K^{**}}{BV}$	$\frac{\tau_0^{***}}{BFgK}$	$\left\{ \frac{1.02 \times 10^{-7}}{BV^2 \frac{p_0}{\rho_0}} \right\}^{\frac{1}{2}}$ x K
F. Schaffernak	7359	2.65	0.1536	1.20	2.71	34.7	2.47	0.171
A. Schoklitsch	53.40	2.60	0.6520	1.00	7.31	477	5.22	0.763
	25.84	2.60	0.405	1.00	5.08	206	4.07	0.474
	11.09	2.60	0.2256	1.00	3.33	75.2	3.14	0.264
	4.32	2.60	0.1240	1.00	2.08	25.8	2.22	0.145
	2.75	2.60	0.0916	1.00	1.66	15.2	1.92	0.107
H. Krey	2.35	2.68	0.0376	1.07	1.53	5.40	3.56	0.436
	2.75	2.61	0.0526	1.05	1.66	8.31	3.15	0.0605
	3.14	2.57	0.0800	1.09	1.77	13.0	2.34	0.0904
Prussian Exp. Institute	5.01	2.65	0.1154	1.48	2.24	17.5	1.81	0.120
	4.12	2.65	0.0846	1.78	2.03	17.2	1.69	0.0863
	5.69	2.65	0.0836	1.40	2.39	14.2	3.01	0.0886
	5.49	2.65	0.0744	1.33	2.34	13.1	3.43	0.0797
	2.35	2.65	0.0244	1.30	1.53	2.88	4.60	0.0264
	5.49	2.65	0.0806	1.37	2.34	13.8	3.07	0.0854
	4.91	2.65	0.0686	1.31	2.22	11.6	3.37	0.0741
H. Engels	9.81	2.65	0.1484	1.53	3.13	30.4	2.67	0.153
G. K. Gilbert	3.83	2.69	0.0576	1.04	1.96	10.9	3.86	0.0672
	5.99	2.69	0.1906	1.12	2.45	41.6	1.69	0.219
	29.0	2.69	0.3710	1.05	5.38	190	4.49	0.434
	48.1	2.69	0.5296	1.07	6.93	343	5.12	0.615
H. Kramer	5.11	2.70	0.0706	1.38	2.26	11.5	3.12	0.0756
	3.83	2.70	0.0558	1.28	1.96	8.54	3.22	0.0614
	4.81	2.70	0.0800	1.32	2.19	13.3	2.73	0.0872
u. s. Waterways Exp. station	4.64	2.65	0.0586	1.46	2.15	8.65	3.35	0.0609
	4.21	2.65	0.0541	1.30	2.05	8.53	3.70	0.0585
	4.21	2.65	0.0525	1.22	2.05	8.83	4.06	0.0583
	4.02	2.65	0.0506	1.33	2.01	7.81	3.69	0.0541

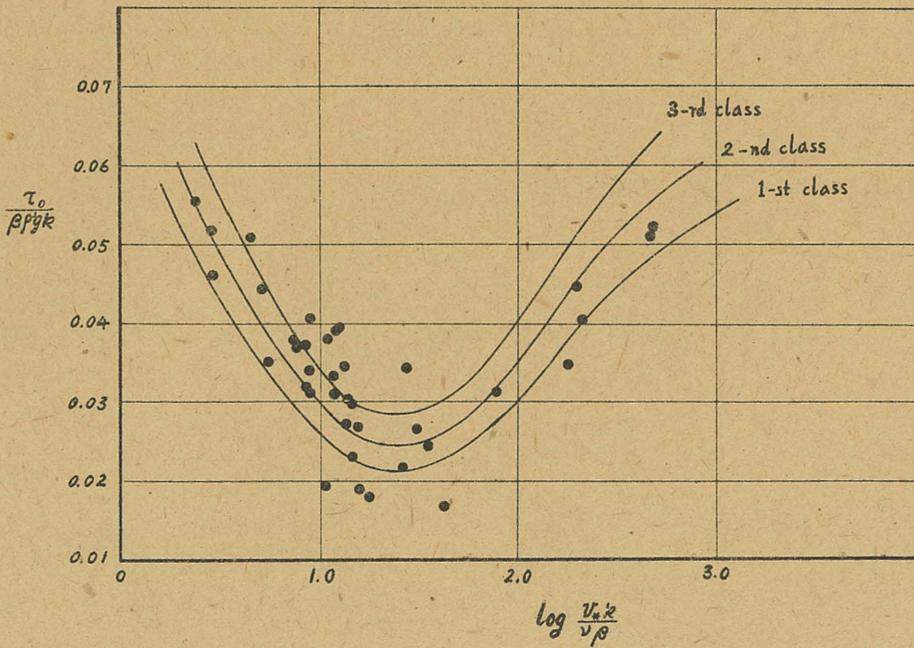
第一圖



第二圖



第三圖

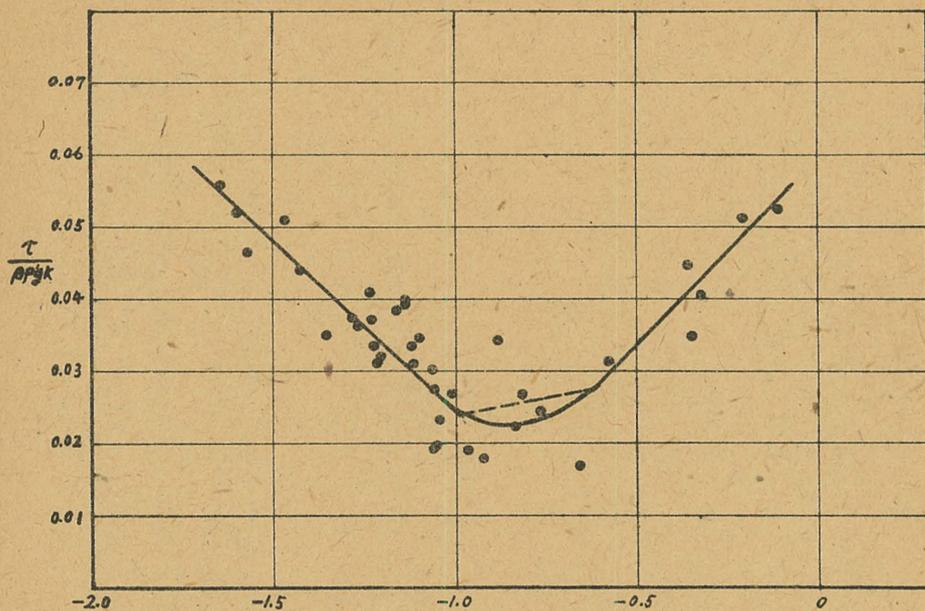


	3.83	2.65	0.0483	1.30	1.96	7.28	3.77	0.0521
	2.87	2.65	0.0347	1.15	1.69	5.11	4.45	0.0371
	3.16	2.65	0.0310	1.23	1.78	4.48	5.12	0.0341
	2.25	2.65	0.0205	1.21	1.50	2.54	5.61	0.0227
	27.8	2.65	0.4077	1.20	5.27	179	3.51	0.453
守藝・佐藤氏	2.16	2.7	0.022	1.14	1.47	2.84	5.17	0.0251
	17.35	2.7	0.070	1.60	2.71	11.9	3.93	0.0714
	9.60	2.7	0.122	1.38	3.10	27.4	3.43	0.131
石原氏	6.37	2.58	0.071	1.45	2.52	12.4	4.01	0.0732
	5.19	2.58	0.092	1.35	2.28	15.5	$\frac{2.70 \times 10^2}{2.70}$	0.0976

注意 \*) 總てが水路実験であるから近似的に密度と比重は區別して  
ていない。

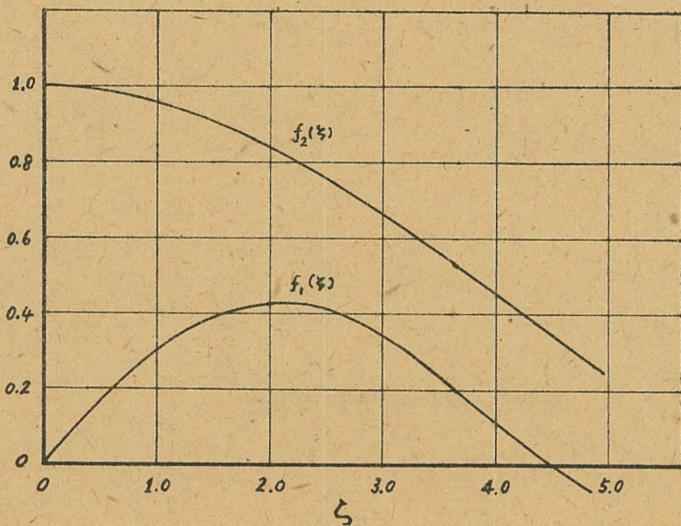
\*\*),  $\rho' = \rho - \rho_0$ ,  $\rho_0$  は水の密度であり,  $\rho_0 = 1$  とする。

$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$ ,  $\nu$  は水の粘性係数であるが, 資料に温度の  
記述がないため, 仮に  $20^\circ\text{C}$  に対する値  $0.01$  を用いた。



$$\text{Log} \left\{ \frac{g/980}{\beta(100V)^2} \frac{P'}{P_0} \right\}^{1/3} k$$

第四圖



第五圖