

流體渦動状態の研究(IV) : 渦動粘性に就いて

栗原, 道德
九州帝國大學流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7153228>

出版情報 : 流體工學研究所報告. 3 (3), pp.18-28, 1947-12-01. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン :

権利関係 :



流體渦動狀態の研究 (IV)

渦動粘性に就いて

所 員 栗 原 道 徳

(昭和二十二年一月十八日受理)

§1. 渦動粘性は流體力學上の諸問題に絶へず關聯してくるものである。これに關する Prandtl の理論は廣く用ひられてゐるが、現象論的な假説であり、特に混合距離の決定法には全く普遍性を欠いてゐる。従つて渦動狀態の一般機構にまで立ち入つた Reynolds' stress $-\rho \overline{u'v'}$ (渦動剪斷歪力)¹⁾ の基礎的研究は極めて望ましいものである。著者はこの様な意味に於てこゝに少しく考察を行つてみる。

渦擾エネルギーは渦擾運動に依つて、平均流の運動エネルギーから供給され、他方渦擾運動に依つて擴散してゆくと同時に流體粘性により消失する。これと同様の事が一般に總ての Reynolds' stresses に就いても考へられる筈である。簡單のために平行板間の定常な亂流に就いて考察することにし、流れの方向に板面に沿つて x 軸を、板面に垂直に y 軸を、板面に沿つてこれ等に垂直に z 軸をとる。前論文 (I)²⁾ に與へた基礎方程式 (13.8) に於て、 Q に順次 u^2, v^2, w^2 を、最後に uv を代入すれば直ちに次の諸式を得る：

$$\frac{Du'^2}{Dt} (=0) = -2 \overline{u'v'} \frac{dU}{dy} - 2 \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} - \frac{d}{dy} \overline{v' (u')^2} + 2\nu \overline{u' \nabla^2 u'}, \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{Dv'^2}{Dt} (=0) = 0 - 2 \overline{v' \frac{\partial p'}{\partial y}} - \frac{d}{dy} \overline{v' (v')^2} + 2\nu \overline{v' \nabla^2 v'}, \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{Dw'^2}{Dt} (=0) = 0 + 2 \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} - \frac{d}{dy} \overline{v' (w')^2} + 2\nu \overline{w' \nabla^2 w'}, \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{Du'v'}{Dt} (=0) = & -\overline{v'^2} \frac{dU}{dy} - \left\{ \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial p'}{\partial x}} \right\} - \frac{d}{dy} \overline{v' (u'v')} \\ & + \nu \left\{ \overline{u' \nabla^2 v'} + \overline{v' \nabla^2 u'} \right\} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

1) 渦動粘性 κ は $-\rho \overline{u'v'} = \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ にて定義される。

2) 流體工學研究所報告第一卷第一號 (昭和17年5月)。

(1), (2) 及び (3) を加へ合せると、渦擾エネルギーに就いて

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) (=0) = & -2 \overline{u'v'} \frac{dU}{dy} - 2 \left\{ \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial p'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} \right\} \\ & - \frac{d}{dy} \overline{v' (u'^2 + v'^2 + w'^2)} + 2\nu \left\{ \overline{u' \nabla^2 u'} + \overline{v' \nabla^2 v'} + \overline{w' \nabla^2 w'} \right\} \dots\dots (5) \end{aligned}$$

を得る。茲に諸記號は普通に用ひられてゐる通りである。これ等の諸式の右邊の第一及び第二項は夫々平均流動より、及び壓力の動搖により Reynolds' stresses の發生する割合を示し、第三及び第四項はこれ等の擴散率及び流體粘性による消失率を示してゐる。以下混合距離理論の idea に従つて、これ等各項を吟味し渦動粘性に就いてなにかしかの知識を得たいと思ふ。

§ 2. 壓力勾配と速度成分との相關關係。平行板間の亂流に際しては渦擾運動は平均流に速度勾配のあることによつて惹起される。即ち、一つの層から出發して y 方向に l だけ移動した流體質量は其の周圍の流體に對して統計的に x 方向の $-l \frac{dU}{dy} (= \Delta u')$ だけの過剰速度を有し、これが直接に x 方向の渦擾運動を起すばかりでなく、 $\Delta u'$ を以つて進む前方には高壓の、その後方には低壓の部分を生ずるため、それ自身は壓力勾配に逆つて過剰運動量を失ふまで進むが、同時にこゝに生じた壓力の不均齊を均らすために壓力勾配に従つた y, z 方向の渦擾運動を生ずる筈である。従つて次の2つの結論が得られる：(i) 平均流動の運動エネルギーの一部が渦擾エネルギーに移り變る過程は、先づその悉くが渦擾運動に依つて x 方向に與へられ續いて壓力の動搖によりこれが更に y 及び z 方向に配分される二つの段階からなつてゐる ((1), (2), (3), (5) の右邊の第一項及び第二項の意味が説明される)。従つて、吾々のこゝに考へてゐる様な渦擾運動の原因として熱力學的な要素を含まない場合には、壓力の動搖の主な役割は、一般的に言つて、各方向に不均一に分配された渦擾エネルギーを均等化するにあるものと考へられる。即ち

$$\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial p'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

が近似的に成立するものと考へられる¹⁾。

(ii) 等方性渦動状態の場合には速度成分と壓力勾配との間に相關關係はない。然るに考へてゐる場合には統計的にみて流體質量は x 方向には壓力勾配に逆つて進む

1) (6) の假定は著者が前論文(Ⅲ)(流體工學研究所報告第3卷第1號)にて既に用ひてゐる。

y, z 方向には壓力勾配に従つて運動する、従つて u', v', w' を一定に保つた場合の壓力勾配の部分平均は近似的に

$$\frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} = a_1 u', \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial y} = a_2 v', \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial z} = a_3 w', \quad a_1 > 0, \quad a_2, a_3 < 0 \dots\dots (7)$$

にて表はされるものと考へて差支へないであらう。(7)は統計學的に回歸曲面を回歸平面で近似したことをも意味してゐる。

扱て、渦擾エネルギーの擴散及び粘性による消失率は、渦動状態が等方性に近い場合には各方向への配分エネルギーに就いて殆んど等しいと考へられる。従つて(1), (2), (3)の右邊の最後の二項の和は互に等しく、又等方性から偏つた場合にはこれ等の項の絶対値は夫々の方向に配分された運動エネルギーが大なれば大なる程大きいと考へられるから、假に比例するものとすれば、(6), (7)を用ひて(1), (2), (3)から容易に次の諸式を得る：

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= - \left(1 - \frac{\bar{u'^2}}{q} \right) \frac{\bar{u'v'}}{\bar{u'^2}} \frac{dU}{dy}, \quad a_2 = a_3 = \frac{\bar{u'v'}}{q} \frac{dU}{dy}, \\ q &= \bar{u'^2} + \bar{v'^2} + \bar{w'^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

渦動状態が等方性に近い場合には $a_1 : a_2 : a_3 = -2 : 1 : 1$ となり、渦擾運動に依つて先づ x 方向に與へられた渦擾エネルギーが壓力の動搖に依つてその $2/3$ が y 及び z 方向に等しく配分されることを意味してゐる。

§3. 速度成分間の相關關係. 流體内に二點 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ をとり、之等に夫々の點に於ける速度成分例へば u'_1, u'_2 を附與すれば、 u'_1 と u'_2 との相關關係は係數 $f = \overline{u'_1 u'_2} / \sqrt{\overline{u_1'^2} \cdot \overline{u_2'^2}}$ にて表はされる。 f は P_1, P_2 の座標の函數であり、 $P_2 \rightarrow P_1$ のときに1となるから u'_1 と u'_2 の相關關係の空間的擴りを表はすものである。若し充分に狭い領域に就いて考へるならば、 $f(P_1, P_2)$ は主として P_1, P_2 の相對的座標 (ξ, η, ζ) の函數である。従つて近似的に次式が成立する：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_1 u'_2} = (-)^i \overline{u_1'^2} \frac{\partial}{\partial \xi} f(P_1, P_2), \text{ etc. } i = 1, 2. \dots\dots\dots (9)$$

同様にして u' と v' とが相關してゐる場合には、普通の様にその關係を

$$r(P_1, P_2) = \frac{\overline{u'_1 v'_2}}{\sqrt{\overline{u_1'^2} \cdot \overline{v_2'^2}}} = \frac{\overline{u'_1 v'_2}}{\sqrt{\overline{u_1'^2} \cdot \overline{v_1'^2}}} \dots\dots\dots (10)$$

にて表はせば、 $r(P_1, P_2)$ は主として (ξ, η, ζ) の數函である。然しながら $f(P_1, P_2)$ と

異つて $P_2 \rightarrow P_1$ の際に 1 とならない, そこで r を正規化し係数

$$\varphi(P_1, P_2) = \frac{\overline{u'_1 v'_2}}{\overline{u'_1 v'_1}} = \frac{r(P_1, P_2)}{r(P_1, P_1)} \dots\dots\dots (11)$$

を導入すれば, φ は r 曲線に相似であるばかりでなく相關關係の空間的擴りを表はす意味に於て係数 f と全く同當の役割を演じて居る. 又 (9) に對應して次式が成立する:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_1 v'_2} = (-)^i \overline{u'_1 v'_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(P_1, P_2), \text{ etc. } i = 1, 2. \dots\dots\dots (12)$$

扱て渦擾運動に際して流體質量はあらゆる方向に運動するが, u' と v' の間に相關の生ずるのは前節に述べた過剩運動量の原因となる y 方向の移動があるためである. 従つて統計的に見て $\overline{u'_1 v'_2}$ を考察する場合には流體質量が y 方向に運動する場合のみを取り出して考へれば充分である.

流體質量が y 方向に l だけ移動すれば, これは周囲の流體に對して $\Delta u' \left(= -\frac{dU}{dy} l \right)$ だけの過剩速度を有してゐる. 今流體質量の中心に P_1 を, これより少しく x 方向に離れて P_2 を取り夫々に v'_1, v'_2 を附與することにする, P_2 を P_1 より次第に遠ざけるならば壓力の動搖に依つて v'_2 は v'_1 と次第に相關關係は弱められ, 有效的に或る距離だけ離れると遂に消失するに到る. これは v'_2 が壓力の動搖に依つて v'_1 と同程度の大さの變化を受けるに至る距離であると考へられる. 次に v'_2 の代りに u'_2 即ち $\Delta u'_2$ を置き代へるときには, (i) 若し $|\Delta u'| \ll v'$ ならば, 前の場合に較べて極く僅かの壓力變動に依つて u'_2 は v'_1 と相關關係を失つて仕舞ふ. 従つて v'_1, u'_2 の相關關係の空間的擴り (φ の値が 1 に較べて相當の大さを有する領域, 以下簡単に相關領域と稱する) は v'_1, v'_2 のそれに較べて極めて小さいと考へられる. (ii) 若し $|\Delta u'| \sim v'$ なる場合には, この過剩速度に起因して x 方向に強い過剩壓力勾配を生じ $|\Delta u'_2|$ は消失される傾向が強い. 従つて $v'_1, \Delta u'_2$ の相關領域は v'_1, v'_2 のそれに較べて極く小さいと考へられる. 然るに v'_2 はそのまゝに, v'_1 を u'_1 で置き代へた場合にはその相關領域は v'_1, v'_2 のそれと同程度のものであることが推測される. 何んとなれば, $v'_1 > 0$ なることゝ $\Delta u'_1 < 0$ なることゝは強い相關關係にあるから, v'_2 が v'_1 に對して相關關係を失ふことは v'_2 が $\Delta u'_1$ と相關關係を失ふことゝ殆んど同じ意味を有するからである.

以上に於ては P_1, P_2 を x 方向に移動させたが, 他の方向に就いても推論は全く同様であり, 更に流體質量が任意の方向に移動する場合を考へても統計的な結果には變りがない. 従つて上に考へた二つの極端な場合を併せ考へて u'_1, v'_2 の相關領域の

linear dimension は u'_1, u'_2 或は v'_1, v'_2 等のその 1/2 程度のものと考へられる。

(1), (4) の右邊の最後の項は (9), (12) に依つて夫々 $2\nu \overline{u'^2} (\nabla^2 f)_0$, $2\nu \overline{u'v'} (\nabla^2 \varphi)_0$ となる。然るに $(\nabla^2 f)_0$, $(\nabla^2 \varphi)_0$ は夫々の相關領域の linear dimension の自乗に逆比例すると考へられるから、上述の結果に従つて $(\nabla^2 \varphi)_0 / (\nabla^2 f)_0 = 4$ である。他方 Taylor¹⁾ に従つて smallest eddies の大きさを λ とすれば、isotropic turbulence の際には $(\nabla^2 f)_0 = -\frac{5}{\lambda^2}$ である。従つて壁ぎわの部分を除いて $\overline{u'v'}$ の流體粘性により消失する割合は

$$\nu \left\{ \overline{u' \nabla^2 v'} + \overline{v' \nabla^2 u'} \right\} = -\beta \frac{40\nu}{\lambda^2} \overline{u'v'} \quad \dots\dots\dots (13)$$

にて近似的に表はされると考へられる。茲に β は殆んど 1 に等しい數である。

最後に $\overline{v'(u'v')}$ は $\overline{u'v'}$ の擴散に他ならない。従つて (4) の右邊の第三項は一般に無視しても差支へないものと考へられる。實際平行板間の亂流に就いては $\frac{d\overline{u'v'}}{dy} = \text{const.}$ であり、(4) に於ける擴散率が $\overline{v'^2} \frac{dU}{dy}$ に比して極めて小さい事を容易に確めることが出来る。斯くて (7), (13) を (4) に代入すれば、(8) を參照して、吾々は $\overline{u'v'}$ に對する基礎方程式

$$\frac{a}{3\overline{u'^2}} \frac{dU}{dy} (\overline{u'v'})^2 - \beta \frac{40\nu}{\lambda^2} \overline{u'v'} - \overline{v'^2} \frac{dU}{dy} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

を得る。茲に

$$a = 3 \cdot \frac{\overline{v'^2} + \overline{w'^2} - \overline{u'^2}}{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

であつて、 a は壁に近い部分を除いては 1 の程度の數である (次節參照)。

渦動狀態が等方性に近い場合には $|\overline{uv}| \ll \overline{u'^2}$ と考へられ、又そうでない場合でも $|\overline{u'v'}| \ll \overline{u'^2}$ であるから、例へば平行板間の亂流に際しての壁面に近いと言ふ様な特別の領域を除いては、(14) の左邊の第一項は第三項に較べて無視されて、吾々は $\overline{u'v'}$ に對して次の如き近似式を得る：

$$\overline{u'v'} = -\frac{\lambda^2}{40\beta\nu} \overline{v'^2} \frac{dU}{dy} \quad \dots\dots\dots (16)$$

§4. 實驗との比較。吾々はこの節に於て前二節にてなした假定が妥當なものか否かを檢べるために (14) 及び (16) の結果を亂流に關する實驗結果と比較してみたい。

1) G.I.Taylor; Statistical Theory of Turbulence, Proc. Roy. Soc. A. 151 (1935).

と思ふ。

(I). 渦動状態が極めて等方性に近い場合には渦動剪断歪力に對して極くよい近似で(16)が成立する。そこで渦動粘性 $\bar{\nu}$ を $\frac{1}{3} c l'$ (c は渦擾運動の平均自乗速度, l' は運動量輸達に對する混合距離である) とおくならば, この l' は Taylor の定義による scale of turbulence, L , と同程度のものでなければならない。

扱てこの場合に (16) は, $\beta = 1$ とおいて,

$$\frac{l'^2}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{3}}{40} \cdot \frac{l' \sqrt{u'^2}}{\nu} = 0.0433 \frac{l' \sqrt{u'^2}}{\nu} \dots\dots\dots (17)$$

を與へる。他方 Dryden 等¹⁾ は風洞内の screen の後流に就いて L, λ 及び $\sqrt{u'^2}$ の値を screen からの種々の距離に對して測定してゐる。彼等の結果を綜合すれば, 容易に

$$\frac{L^2}{\lambda^2} = \frac{3c_6 \log_{10} e}{15} \cdot \frac{L \sqrt{u'^2}}{\nu} \dots\dots\dots (18)$$

を得る。茲に c_6 は常數であり, 彼等の各種の screen に對する値の平均は 0.502 である。従つて $3c_6 \log_{10} e / 15 = 0.0436$ となつて, (17), (18) はよく一致してゐる。この美事な一致には大した意味を與へられないが, 吾々の假定を確め, と同時に混合距離(運動量輸達に對する)は scale of turbulence と同程度のものであらうと言ふ從來の推論を確めるものと考へることは出来るであらう。

(II). 扱て圓管 四角管等の三次元亂流に就いては $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ の同時測定は行はれて居るが,²⁾ 二次元流に就いてはない様に思はれる, 然しながら三次元流に對す測定結果から次の事項を知ることが出来る。即ち平均板間の亂流に際しては z -方向の運動に對する障壁のない事を考慮して, (i) $\overline{u'^2}$ と $\overline{v'^2}$ との關係は略々二次元流の場合にも當てはまるであらう。(ii) $\overline{w'^2}$ は中心部近くでは $\overline{u'^2}$ と同じ様に振舞ふであらうが, 壁に向つては三次元流の場合に較べて急激に増加する。(iii) $\overline{v'^2}$ は $\overline{u'^2}$, $\overline{w'^2}$ の何れよりも小さく, 壁に向つてはその程度が甚しくなる。

以上の事から, (15) にて與へられる α は平行板の中心附近では殆んど 1 に等しく, それより壁面に向つても, 極くこれに近い部分を除いては大體 1 の程度のものと考へられる。そこで近似的に $\alpha = 1$ とおけば, (14) は

$$\frac{\overline{v'^2}}{\overline{u'^2}} = \frac{1}{3} \left\{ r'^2 - \frac{120\nu}{\lambda^2} \cdot \frac{dy}{dU} r' \right\}, \text{ ここに } r' = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{u'^2}} \dots\dots\dots (19)$$

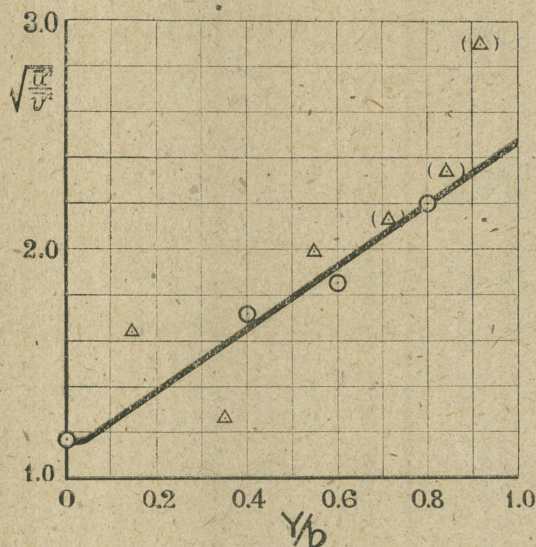
1) H.L. Dryden, G.B. Schubauer, W.C. Mock, H.K. Skramsted, N.A.C.A. Tech. Rep. No.581 (1937).

2) A.Fage, H.C.H. Townend, Proc. Roy. Soc. A 135 (1932);

H.C.H. Townend, Proc. Roy. Soc. A 145 (1934); A.Fage, Proc. Roy. Soc. A 155 (1936) 576.

を與へる. v' は剪斷歪力 $\tau (= -\rho \overline{u'v'})$ と $\overline{u'^2}$ の測定値から計算される.

$k^2, dU/dy, \overline{u'^2}$ に就いては Taylor¹⁾ が Prandtl, Reichart の correlation の測定結果



Y : 中心よりの距離 $2b$: 平行板間の距離

Δ : Prandtl, Reichart の correlation measurements 及び Wattendorf, Kuethe の fluctuation measurements の測定値より (20) により 計算した値

$$U_{max} = 114, \quad U_{max} m/v = 10^4$$

$\circ$: Townsend の square pipe に就いての測定値. $U_{mean} m/v = 9300$ (m : hydraulic mean depth)

及び Wattendorf, Kuethe の $U, \overline{u'^2}$ の測定結果を整理統合して得た値を採用し, (19)により $\sqrt{\overline{u'^2}}/\sqrt{\overline{v'^2}}$ の値を計算すれば, これを Townsend の四角管に就いての實驗の内 Prandtl, Reichart の實驗に際しての Reynolds 數に近いものにて與へられる $\sqrt{\overline{u'^2}}/\sqrt{\overline{v'^2}}$ と比較することが出来る. この對比は左圖に示されて居る. こゝには全く性質の異つた三つの系統の測定値を用ひてゐる事を思へば, 計算値と實測値とはよく一致して居ると考へて差支へないであらう (壁面近くの諸點に就いては, α の見積りが次第に妥當でなくなるこゝと及び Taylor の dissipation formula が成立しなくなるので, 余り信用はおはない).

昭和 22 年 1 月 18 日 流體工學研究所に於て

1) G.I. Taylor, loc. cit. Part III.

2) H.C.H. Townsend, loc. cit.

情を考えに入れるために、非常に任意ではあるが $h = cN^{-\sigma}$ とおく、こゝに c, σ は常數である。これにより (4) を N の函數として書き直せば

$$F = \eta \frac{V}{H + cN^{-\sigma}} S + aU_l N e^{-\frac{c}{\lambda N^{\sigma}}}$$

となる。兩面が離れて $N \rightarrow 0$, $h \rightarrow$ 非常に大となると、第二項は消え、第一項のみが残り、 $cN^{-\sigma} = h \gg H$ となるから

$$F = \eta \frac{V}{h}$$

となり、普通の粘性流體の取扱から得られる式となる。

以上非常に素朴な考えであるが摩擦する兩面の及ぼし合う切線力は、粘性の關係する部分と表面張力の關係する部分とから成り、前者は潤滑油が豊富にあるとき即ち完全潤滑の場合に重な役割をもち、後者は不完全潤滑のとき大切な役割をもつようになることがわかる。流體の粘性係數と表面張力とはその因は分子間の力によるものであるから全く獨立なものであるとは言えないのであるが、一應は別々の量であるから完全潤滑の性質から不完全潤滑の性質が必しも豫想されないことは上の議論だけから言つても言えるのではないかと思う。勿論これらの事柄の他にも、分子膜が全層面からはがれる度合や、はがれた後を補充する流動性等色々と複雑な事柄をも考えに入れるなければならないが、潤滑油の所謂「油性」と呼ばれるものが、液體の粘性だけによつては律し得られないところの性質とすれば、以上の考察によつて「油性」の理論についての一つの試みがなされたといえるのではないかと思う。