

粘流体中に於ける剛体の衝突について

栖原, 豊太郎
九州帝国大学流体力学研究所

<https://doi.org/10.15017/7153224>

出版情報 : 流体力学研究所報告. 3 (3), pp.1-7, 1947-12-01. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン :

権利関係 :



粘流體中に於ける剛體の衝突について

栖 原 豊 太 郎

1. 目 的

機械機構の中には互に衝撃運動をするものが種々ある。Lift Valve と瓣坐はその代表的の例であり、一般の Cam と Follower, 齒車の嚙合など相互間に遊隙のある限り衝撃接觸をする。而してそれ等の衝撃面の間には通常粘流體があるが、殊に流體機械では衝撃運動が流體中で行はれてゐる場合が多い。何れの場合でも衝撃體の接觸面に於る流體は著しい緩衝作用をしてゐるので、この緩衝作用が機構の運動に與へる影響を調べるのが本論の目的である。接觸面の間の流體が空氣の場合にはこの問題は彈性體の衝撃問題となすべきである。然し本論ではそれが水或は油類の場合を考へ機構部材を剛體として取扱ふことにする。

2. 運動方程式

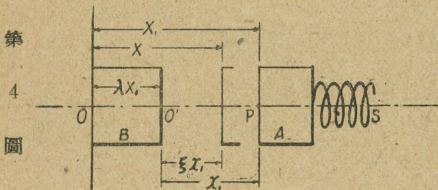
粘流體の中で、第 1 圖のやうに、質量 m の剛體 A が發條 S で推され PO 線上を進行して固定剛體 B に衝突する場合の運動式を求める。發條の張力は P 點が假に O 點迄來たとすると零になるとし、 A はその途中 O' 點で B に衝突し發條になほ或る張力を残したまゝで靜止するものとする。こゝに A と B との衝突面は何れも平面で且つ平行してゐるとする。 P 點の最初の位置を X_1 , 固定點 O' の位置を λX_1 ($0 < \lambda < 1$), 任意の時の P 點の位置を X , A と B との間隙を ξx_1 , 發條の張力を kX で表はす。

A の運動に對する抵抗としては、速度に比例する部分 $c_1 \dot{X}$, その二乗に比例する部分 $c_2 \dot{X}^2$, 及び A と B とが接近するに従ひその間隙に起る流體壓力のための抵抗 R の三項を採る。

以上の關係により A の運動方程式を書くと

$$m\ddot{X} + c_1\dot{X} + c_2\dot{X}^2 + R + kX = 0. \quad (1)$$

上式に於て、 A の行程は固定體 B のために當然一回限りとなり、 c_2 は負値だけをとる。(1) 式を解くためには先づ R の性質を決定しなければならないが、これを一般的に決定することは困難であるから次の様な近似らしき方法を試みる。

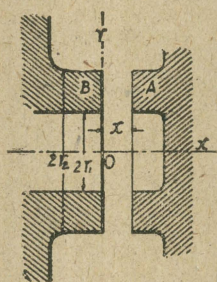


第
4
圖

3. 抵抗 R の決定

A が B に接近すると粘流體はその間隙から排除されるため大きな抵抗を生ずる。この流動は勿論動的問題であるが實際上 R 項が強く影響して来るのは間隙が小さくなり、A の速度が小さくなり、主として粘性が作用するときであるから、これを定常問題として取扱ひ R の性質を調べることにする。

一の實例として流體機械の環狀平面坐瓣がその坐に衝突する場合をとり 瓣と 瓣坐との間に挟まれた流體の運動を解析して見る。



粘流體の定常運動方程式及び連續式を、第 2 圖のやうに、x 軸に對稱なる圓柱坐標に就て表はし慣性項及び體力項を省くと

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}.$$

但し p は壓力、 u 及び w は r 及び x 方向の速度、 μ は粘性係數である。A と B とが接觸する直前 $x=b$ のとき A の瞬間速度が w_b で減速運動をしてゐると云ふ代りに、 $x=b$ のとき A の速度は定常的に w_b であると思ふ (2) に對する條件を

$$\left. \begin{aligned} r_1 < r < r_2 \text{ で } (u)_{x=0} = (u)_{x=b} = (w)_{x=0} = 0, \text{ 及び } (w)_{x=b} = w_b; \\ r = r_1 \text{ 及び } r = r_2 \text{ で } w = 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とすると (2) の解は

$$\begin{aligned} u &= -\pi w_b \sum_n \frac{Y_0(m_n r_2) J_1(m_n r) - J_0(m_n r_2) Y_1(m_n r)}{1 + \{J_0(m_n r_2)/J_0(m_n r_1)\}} \\ &\quad \times \frac{m_n(b-x) \text{sh} m_n b \cdot \text{sh} m_n x + m_n^2 b x \cdot \text{sh} m_n(b-x)}{\text{sh}^2 m_n b - m_n^2 b^2}, \\ w &= \pi w_b \sum_n \frac{Y_0(m_n r_2) J_0(m_n r) - J_0(m_n r_2) Y_0(m_n r)}{1 + \{J_0(m_n r_2)/J_0(m_n r_1)\}} \\ &\quad \times \frac{\{\text{sh} m_n b + m_n b \text{ch} m_n b\} \text{sh} m_n x - m_n^2 b x \text{ch} m_n(b+x) - m_n x \text{sh} m_n b \text{ch} m_n x}{\text{sh}^2 m_n b - m_n^2 b^2}, \\ p &= -2\pi \mu w_b \sum_n \frac{Y_0(m_n r_2) J_0(m_n r) - J_0(m_n r_2) Y_0(m_n r)}{1 + \{J_0(m_n r_2)/J_0(m_n r_1)\}} \\ &\quad \times \frac{m_n^2 b \text{ch} m_n(b-x) + m_n \text{sh} m_n b \text{ch} m_n x}{\text{sh}^2 m_n b - m_n^2 b^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

但し $m_1, m_2, \dots, m_n \dots$ は次の式の根を示す

$$Y_0(mr_2)J_0(mr_1) - J_0(mr_2)Y_0(mr_1) = 0.$$

然し以上の式は到底實用計算には適しないが間隙 b を甚だ小さいと考へると (4) は次のやうに簡易な式となる。即ち

$$\left. \begin{aligned} u &= 3 \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r \lg(r_2/r_1)} - r \right\} \frac{x(b-x)}{b^3} w_b, \\ w &= \frac{x^2(3b-2x)}{b^3} w_b, \\ p &= \frac{3\mu}{b^3} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lg(r_2/r_1)} \left(\lg r - \frac{1}{2} \lg r_1 r_2 \right) + \frac{1}{2} (r_2^2 + r_1^2) - r^2 \right\} w_b \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

従つて瓣 A に對する總壓力は

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p r dr d\theta = \frac{3\pi\mu w_b}{2b^3} \left\{ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\lg(r_2/r_1)} \right\}.$$

故に (1) 式の R は

$$\begin{aligned} R &= \text{const} \frac{\mu w_b}{b^3} \\ &= \frac{a\dot{X}}{(X - \lambda X_1)^3} \quad (\text{第2節の記號にて}) \end{aligned} \quad (6)$$

但し
$$a = \frac{3}{2} \pi \mu \left\{ r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\lg(r_2/r_1)} \right\}.$$

また $r_1=0$ のときは

$$a = \frac{3}{2} \pi \mu r_2^4.$$

4. 運動方程式の解

(1) と (6) とから運動方程式は

$$m\ddot{X} + c_1\dot{X} + c_2\dot{X}^2 + \frac{a\dot{X}}{(X - \lambda X_1)^3} + kX = 0. \quad (7)$$

上の式で $x_1\xi = X - \lambda X_1$, $x_1 = X_1 - \lambda X_1$, ($0 < \xi < 1$), $T_S = \pi\sqrt{m/k}$, $T_S\tau = t$, (第1圖)

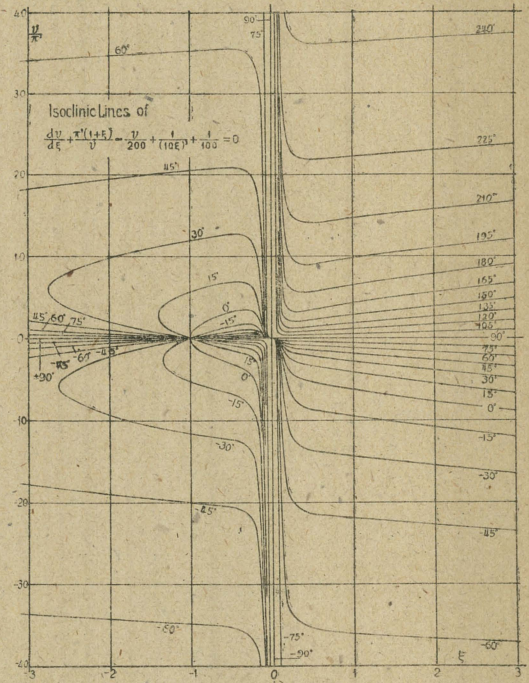
$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{d\xi}{d\tau} = \dot{\xi}, & \dot{X} &= \frac{x_1}{T_S} \dot{\xi} = \frac{x_1 v}{T_S}, & z &= \frac{kT_S^2}{m} = \pi^2, \\ a &= \frac{aT_S}{mx_1^3}, & \beta &= \frac{c_1T_S}{m}, & \gamma &= \frac{c_2x_1}{m} < 0, & \nu &= \frac{\lambda}{1-\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と置くと (7) 式は

$$\frac{dv}{d\xi} + \gamma v + \beta + \frac{a}{\xi^3} + \frac{x(\xi + \nu)}{v} = 0 \quad (9)$$

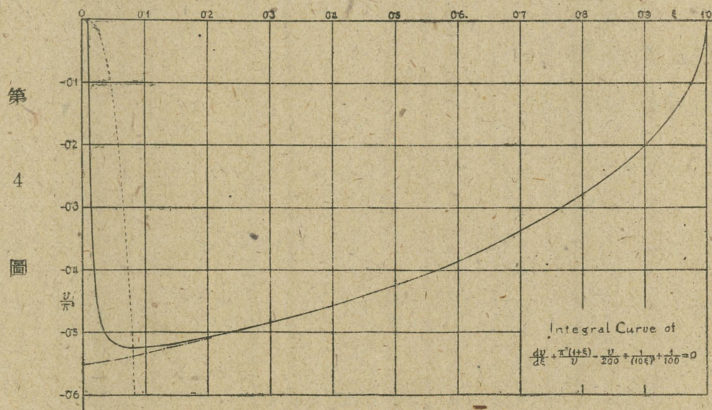
となる。これに対する条件は $X = X_1$ で $\dot{X} = 0$ 即ち $\xi = 1$ で $v = 0$ であり、また $\xi = 0$ で當然 $v = 0$ となるべき筈である。

本問題の解として入用であるのは $\xi > 0$, $v < 0$ 即ち第 4 象限内であるが、この非線形方程式は少々特別の形をしてゐるからその性質を明かにするため試みに次の数値を用ひ全象限に就いて等傾曲線を書いて見た。これを第 3 圖に示す。



$$\left. \begin{aligned} m &= 200 \text{ gram}, & a &= 10^{-3}, & \beta &= 10^{-2}, & \gamma &= 2 \times 10^{-2}, & x &= \pi^2 \\ x_1 &= 1 \text{ cm}, & \lambda &= 0.5, & \nu &= 1, & T_S &= 2 \times 10^{-2} \text{ sec.}, & a &= 10. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

以上の数値を使用し $\xi = 1$, $v = 0$ の條件で (9) の積分曲線を更に精密に圖上で求めた。これを第 4 圖に實線で示す。



以上は一例としての数値解であるが更に一般的に条件 $(x)_{x=x_1}=0$ 即ち $\xi=1, v=0$ の附近で (9) の積分を求める。

$$\left. \begin{array}{l} \text{先づ} \quad \xi = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n v^n, \\ \text{とし従つて} \quad \xi^3 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n v^n, \\ \text{及び} \quad \xi^4 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n v^n \end{array} \right\} \quad (11)$$

として、これらの係数 a_n, c_n, b_n は上式及び次の関係式で表される。

$$a_{n+2} = \frac{-(1-\lambda)}{\pi^2(n+2)} \left\{ a(n+1)a_{n+1} + \beta \sum_{s=2}^{n+1} s a_s c_{n+1-s} + \gamma \sum_{s=2}^n s a_s c_{n-s} \right. \\ \left. + \pi^2 \sum_{s=2}^n s a_s \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} c_{n+2-s} + b_{n+2-s} \right) + c_n \right\}; \quad (12)$$

$$\text{但し } a_0=b_0=c_0=1, \quad a_1=b_1=c_1=0, \quad a_2 = \frac{-(1-\lambda)}{2\pi^2}, \quad a_3 = \frac{(1-\lambda)^2(a+\beta)}{3\pi^4}.$$

初めの数項を書くと

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\lambda)(1-\xi)}{\pi^2} &= V^2 + \frac{2}{3} (a+\beta) V^3 + \left\{ \frac{1}{2} (a+\beta)^2 - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\gamma}{1-\lambda} - \frac{1}{2} \right) \right\} V^4 \\ &+ \left\{ \frac{2}{5} (a+\beta)^3 + \frac{8\pi^2}{15} (a+\beta) + \frac{3\pi^2 a}{5(1-\lambda)} - \frac{4\pi^2(a+\beta)\gamma}{5(1-\lambda)} \right\} V^5 \\ &+ \left\{ \frac{1}{3} (a+\beta)^4 + \frac{29\pi^2}{36} (a+\beta)^2 + \frac{4\pi^2}{3(1-\lambda)} a(a-\beta) \right. \\ &\left. - \frac{\pi^2}{1-\lambda} (a+\beta)^2 \gamma + \pi^4 \left(\frac{\gamma^2}{3(1-\lambda)^2} - \frac{5\gamma}{12(1-\lambda)} + \frac{1}{8} \right) \right\} V^6 + \dots \quad (13) \end{aligned}$$

或は逆に

$$\begin{aligned} -\frac{(1-\lambda)v}{\pi^2} &= \zeta - \frac{1}{3} (a+\beta)\zeta^2 + \left\{ \frac{1}{36} (a+\beta)^2 + \frac{\pi^2 \gamma}{4(1-\lambda)} - \frac{\pi^2}{8} \right\} \zeta^3 \\ &+ \left\{ \frac{1}{270} (a+\beta)^3 - \frac{3\pi^2 a}{10(1-\lambda)} - \frac{\pi^2}{10} \left(\frac{\gamma}{1-\lambda} + \frac{1}{6} \right) (a+\beta) \right\} \zeta^4 \\ &+ \left\{ \frac{1}{4320} (a+\beta)^4 + \frac{\pi^2}{30(1-\lambda)} a(a+\beta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{240} \left(\frac{\gamma}{1-\lambda} + \frac{1}{6} \right) (a+\beta)^2 + \frac{\pi^4}{32} \left(\frac{5\gamma^2}{3(1-\lambda)^2} - \frac{\gamma}{3(1-\lambda)} - \frac{1}{4} \right) \right\} \zeta^5 \\ &+ \dots \quad (14) \end{aligned}$$

上式で
$$V = -\frac{(1-\lambda)v}{\pi^2}, \quad \zeta = \frac{1}{\pi} \sqrt{2(1-\lambda)(1-\xi)}.$$

上記の級数は何れも原点附近は不適當であるから原点附近迄進むために新に $\xi = \xi_1$, $v = v_1$ 附近の解を求める. 但し (ξ_1, v_1) は $\frac{dv}{d\xi} = 0$ 即ち (9) 式にて

$$\frac{\pi^2}{v}(\xi + \nu) + \gamma v + \beta + \frac{a}{\xi^3} = 0 \quad (15)$$

の線上にある點とする.

(9) 式のときと同様 (10) の數値を使つて計算した曲線 (15) を第 4 圖に破線で示した. 即ち (v_1, ξ_1) は $\xi=1, v=0$ の條件による曲線 (13) 或は (14) と曲線 (15) との交點で與へられる.

以上の計算で $\xi < \xi_1$ に對する (9) の積分は

$$\xi - \xi_1 = \eta, \quad v - v_1 = u = -\frac{1}{2!} u_0'' \eta^2 + \frac{1}{3!} u_0''' \eta^3 + \frac{1}{4!} u_0'''' \eta^4 + \dots, \quad (16)$$

但し
$$u_0'' = -\frac{\pi^2}{v_1} + \frac{3!a}{2\xi_1^4},$$

$$u_0''' = \left(\frac{h}{v_1^2} - \gamma \right) u_0'' - \frac{4!a}{2\xi_1^5}, \quad h = \pi^2(\xi_1 + \nu),$$

$$u_0^{IV} = \left(\frac{h}{v_1^2} - \gamma \right) u_0''' + \frac{3\pi^2}{v_1^2} u_0'' + \frac{5!a}{2\xi_1^6},$$

$$u_0^V = \left(\frac{h}{v_1^2} - \gamma \right) u_0^{IV} + \frac{4\pi^2}{v_1^2} u_0''' - \frac{6h}{v_1^3} u_0'' - \frac{6!a}{2\xi_1^7},$$

$$u_0^{VI} = \left(\frac{h}{v_1^2} - \gamma \right) u_0^V + \frac{5\pi^2}{v_1^2} u_0^{IV} - \frac{20h}{v_1^3} u_0''' u_0'' - \frac{30\pi^2}{v_1^3} u_0''^2 + \frac{7!a}{2\xi_1^8},$$

.....

(10) に示した數値を用ひ (13) 或は (14), 及び (16) で計算した結果は第 4 圖の圖式に得た曲線と $0 < \xi < 0.01$ の範圍で全く一致してゐる.

5. 結 論

比較のため $a=0$ 即ち間隙に起る抵抗 R のないときの運動第 4 圖に鎖線を以て記入した. この場合は運動體 A が固定體 B に $v=0.55\pi^2$ (速度 $\dot{X} = x_1 v / T_s$) で衝突するから $v=0$ になるまでに當然彈性振動を起すであらう. 然し第 4 圖を見ると流體中にて物體が衝突するときは其間隙に於て粘流體の影響は著しく大きいことが分り, 且

つ豫想される通り此の影響は物體相互が極めて接近したときから始まることが分る。

衝突面に於ては更に考慮すべき種々の現象があるが、この計算は(10)に示した數値を使つた一例に過ぎないし、また基礎方程式も嚴密な假定を用ひたものでないからあまり數量的の結論に立入らないことにして本論を終る次第である。