

流體渦動状態の研究(I)：渦動状態の確率論的新定義とその基礎方程式の誘導

栗原, 道德
九州帝國大學流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7152008>

出版情報：流體工學研究所報告. 1 (1), pp.1-20, 1942-05. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン：

権利関係：



流體渦動狀態の研究 (I)

渦動狀態の確率論的新定義と

その基礎方程式の誘導

所 員 栗 原 道 徳

(昭和17年5月5日受理)

§ 1. 序論. 渦動狀態が流體力學に於て演ずる最も重要な役割は質量交換に伴ふ物理量の傳達にある. 渦動狀態に就いては古くから各方面に亘つて種々研究¹⁾が行はれて居るが、傳達の問題に就いて言ふならば、氣體運動論の直接的な一般化であつたと言ふことが出来る. 即ち渦動狀態に際しては流體質量は無秩序な運動をして居り、平均的に見てこれは或る一定の距離だけ進行した後に其の點に於ける周囲の流體と混合し、その特性を全く失ふものと考へた. この假想的な距離を混合距離 (Mischungsweg) と稱し、これを氣體運動論に於ける粒子の平均自由行程に對應させ、例へば運動量や熱量の傳達の係数を混合距離の項により表はし、現象論的に研究が行はれて居る.

この混合距離による理論は、混合距離それ自身の定義が曖昧であり、而もこれは研究對象に依つて異なるべき筈であるにも拘らず、此を一貫した理論に依つて定められぬ點に於て重大な難點を有する. 1921 年に至つて G. I. Taylor²⁾ は次の様な概念を導入してこれ等の難點を取り除かうと試みたのである. 即ち Scale of turbulence 及び渦動狀態の統計的の性質は、一般に或る時刻に於ける流體の種々の點に於ける速度間の相關關係に依り、或は同一流體粒子の異つた時刻に於ける速度間の相關關係に依つて嚴密な解釋が與へられると考へたのである. この概念は今日の渦動狀態の統計理論の基礎をなして居るものである.

各種の觀測或は實驗に依つて渦動狀態は等方性に向ふ著しい傾向を有することが知られるに至つて、1935 年に Taylor³⁾ は等方性渦動狀態なる新しい概念を導入して事柄を著しく

1) 例へば, Lamb, Hydrodynamics, Camb. Univ. Sixth Edition, p. 663 ; G. I. Taylor, Phil. Trans. A. 215 (1915) 1 ; L. F. Richardson, Weather Prediction, Camb. (1922) ; W. Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft, Probleme der kosmischen Physik Bd. 7 ; S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, Chap. V.

2) Proc. Lond. Math. Soc. 20 (1921) 196.

3) Proc. Roy. Soc. London, A. 151 (1935) 421 ; ibid 156 (1936) 307.

簡單化することに成功し、理論に一段の進歩を與へた。續いて T. de Kármán¹⁾ は等方性渦動状態の際に二點に於ける速度間の相関係数、從つて Taylor に依り定義された Scale of turbulence を理論的に定むべき基礎方程式の誘導に成功したのである。これ等の理論は非壓縮性流体内の等方等質なる渦動状態に關するものではあるが、Statistical Theory of Turbulence を其れ自身にて完結した渦動状態に關する一つの理論體形として構成せしめることが出来ると言ふ將來性を示した點に於て重要な意味を有するものである。從つて今後に於て最も望ましいことは、從來現象論的に展開されて來た渦動状態に關する諸理論を總てこの理論體形中に包括せしむることで、この目的のためには先覺者の研究を一般化することが最も重要なことの一つであると思はれる。吾々はこゝに於て先づ渦動状態の根本概念に立ち戻り、これに確率論的解釋を加へ、以つて之が表式化を試みやうとするものである。

§ 2. 渦動状態. 吾々が或自然現象を觀測する場合に、その觀測さるべき物理量は必ずや或程度の時間及び空間的平均値として測定される筈である。即ち吾々が一つの物理量を云々する場合には時間的には Δt 、空間的には Δv なる擴り $\Delta \tau = \Delta t \times \Delta v$ に就て測られた平均値を對象としてゐるものと思惟される。從つて吾々が全く同一の自然現象を對象とする場合に於ても、 $\Delta \tau$ の採り方に從つて見掛け上異つた現象として認識される場合が起り得る筈であらう。例へば一つの瓦斯體の運動を對象とする際に、空間的には其の擴りが構成粒子間の平均空間以下であり、時間的には衝突の平均時間より小である様な $\Delta \tau_1$ を採用するならば、吾々は單に各粒子の直線運動を認識するのみであらう。又 $\Delta \tau$ を $\Delta \tau_1$ より遙かに大きく取り、其の中にて充分粒子運動の統計が取れる程にするならば、即ち Δt を衝突間の平均時間より遙かに長く、又 Δv の直線的長さを平均自由行程より遙かに大きくとるならば、吾々は連續體としての瓦斯體の運動を認識する。此の様に流體を連續體として觀測し得る $\Delta \tau$ の最小の値を假に $\Delta \tau_2$ を、以つて表はしておく。

扱へ一般に區別して考へられて居るところの流れの二つの様相、即ち層流と亂流とを對比してこゝに考へてみる。

先づ此等二つの現象には本質的な差異があるものであらうか、或は其等は單に見掛上の相違であらうかとの疑問が起る。然しながら觀測に際して $\Delta \tau$ を次第に小さくして行き、遂に $\Delta \tau_2$ とした場合にも尙且兩現象の間に區別があるものならば、此の亂流は最早流體力學の範圍を越へて居る筈である。從つて、多くの研究者のやつて居る様に、渦動状態の研究の根本を從來の流體力學におくことが出来るものと假定するならば、兩現象の間には本質的な差異はないことになる。吾々が平常使ひ慣されて居る時空の尺度に準據した或程度の時空の擴り、 $\Delta \tau_3$ を用ひて一つの流れを觀察するものとし、一方 $\Delta \tau_2$ よりは大であるが $\Delta \tau_3$ に較べては極く小さい $\Delta \tau$ に就いて觀測を行ふものとする。然る時若し其の觀測値が $\Delta \tau_3$ 内に於て著しい變化を示

1) Proc. Roy. Soc. London, A. 164 (1938) 192.

す様な場合に吾々は此を亂流と言ひ、然らざる時に層流と稱するのではなからうか。渦動狀態の熱力學的性質に就ても同様のことが考へられる。

渦動狀態を上述の如くに解釋することが出来るならば、 $\Delta\tau_3$ 内の劇しい變動に對して統計學的な取扱ひが望ましくもなり、又妥當性を持つた一つの方法とも考へられる。

§ 3. 確率論的考察. 渦動狀態を $\Delta\tau_3$ 内に於ける狀態の變動が著しいものとして定義する場合には、普通には渦動狀態として考へられて居ない、然し變化の劇しい規則的な流體の運動、例へば音波の如きものも亦考慮せねばならなくなる。勿論音波も亦統計的に取扱ひ得るであろうが、これは明かに研究の對象ではない。此の間の消息を明かにするために代表的な渦動狀態として認められる現象に就いて考へてみる。

水平に置かれた無限に擴る一樣な二つの平行板に依つて限られた靜止の狀態にある流體層を考へ、下面を出来るだけ一樣に熱したとする。然る時はこの流體層は熱力學的に頗る不安定になるが、裝置が總て理想的に一樣であるならば、如何に熱しやうとも理論的には對流が起るとは考へられない。然し事實はそうではなく無秩序な對流を生じ、ここに所謂渦動狀態が出現するであろう。これは恐らく、極く僅かではあるが裝置或は流體層に潜在して居るであろう不規則性或は斑に起因するものであろう。又極めて一樣な滑かな管の中の流れに就いても同様に、裝置が理想的であるならば、ここに亂流が生じやうとは考へられない。然し事實はそうではない。これも亦流れそのものに潜在する動搖現象或は管壁の不規則性、斑等に起因するもので、境界層の動搖等がこれにより惹き起されるのであろう。斯の如くに、吾々が渦動狀態を言ふ場合には、そこには吾々に認められないとか、或は制御し得ないところの若干の不規則性が潜在して居り、或は初めから思想上或種の不規則性を導入することが可能であり、而もこの僅かの不規則性が結果として流體の狀態に著しい變動を惹起する場合を考へて居る様に思はれる。若し渦動狀態に對してこの様な考へが許されるならば、或はこの種の現象を對象として選ぶならば、ここに渦動狀態の確率論的取扱ひが可能になつて来る。この目的のために吾々は渦動狀態を次の如くに解釋する。

流體の狀態は考へて居る場全域に亘つての物理學的諸量の分布狀態に依つて規定される。従つて一點の周界 (Umgebung) を對象とする場合には、“渦動狀態とはこの周界内に於て物理學的諸量の分布函數が或る法則に従つた函數群の中に動搖する狀態であり、この函數群の中の個々の函數の出現する確率に依つて渦動狀態は規定される”ものと考へる。渦動狀態をこの様に定義するならば、何等かの形式に於てこの確率を研究對象とする理論こそ渦動狀態の統計的理論に他ならない。この様に定義することに依つて從來行はれて居たところの狀態の時間的或は空間的平均に伴つて理論上起る不明確な點を取り除くことが出来る。然しながら、と同時に次のことを注意して置かねばならない。渦動狀態を確率論的に取扱ふ場合に“理論の結果として得られる狀態は、嚴密に言へば、吾々が思想上制御し得られないと考へる範圍に於ては全く同一の條件のもとに數多く繰り返へされる同一種類の現象に就いての平均の狀態を表はす

ものである”。従つて渦動状態そのものの變化が極めて緩やかな場合には、この平均状態は現實の現象を充分よく表はして居り、定常状態の場合に両者は一致するものと考へられる。然しながらこれに反して渦動状態として取扱はれる状態の變化が急激なる場合には、個々の現象は理論の結果から著しくずれる筈である。即ち渦動状態の確率論的理論は個々の現象を豫言するものではない。

扱て以上の考察に従つて問題を具體的に表示するに際して、全く同等な次の三種類の確率函数による方法が考へられる：即ち、i) 上述の分布函数群に關するもの、ii) 一點 P に於ける物理的諸量及び其の逐次微係數に關するもの、及び iii) P 點の周界内に適當に選んだ數多くの點に於ける物理的諸量に關する確率函数である。

Taylor 及び Kármán は ii), iii) の一部分を用ひて渦動状態を表示しようとしたものである。著者はこの論文に於て渦動状態に關する基礎方程式として、先づ一般的に確率函数 ii) を規定すべき微分方程式を求め、これより iii) に關するものを誘導せんとするもので、最後に其の應用として平均乗積に關する基礎方程式が求められてゐる。

I. 一點に關する基礎方程式

§ 4. 一般注意及記號. 流體が渦動状態にある場合でも、前節までに述べた様に、觀測に費す時空間の擴り $\Delta\tau$ を充分小さくして行くなれば（例へば $\Delta\tau_2$ に達するまでには）、從來の流體力學及び熱力學等の法則が成立する。即ち氣體に關する統計力學が成立する様な状態に到るものと假定する。而して後者を一つの微視的状态と見做すならば、前者即ち渦動状態は又一つの巨視的状态と考へられる。吾々の目的はこの微視的状态に關する既知の諸法則に基いて巨視世界に於て成立するであらう諸法則を探し求めることにある。

先づ簡單のために完全瓦斯からなる流體に就いて考へる。其の運動は Navier-Stokes の運動方程式及び連續條件

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Omega + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (4.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.2)$$

に依つて定められる。流體の状態は其の運動状態の他に壓力、密度及び溫度に就いても考へねばならないが、これら三つの量は状態方程式に依つて結ばれて居るから獨立量として例へば壓力と密度を選ぶならば、熱力學の第一法則は單位質量の瓦斯に就いて

$$\delta Q = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \delta p - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho^2} \delta \rho \quad (4.3)$$

を與へる。茲に δQ は考へてゐる質量が δt 時間内に其の周圍或は外界から受ける熱エネルギーであり、其の他 (4.1), (4.2), (4.3) に於ける記號は普通に用ひられて居る通りである。これ

ら三式に依つて流體の微視的狀態は定められる筈である。

扱て (4.1) 及び (4.2) の示す様に速度及び密度の時間に就いての全微係数は、ここに選んだ獨立量及びその座標に就いて逐次微係數の函數である。他方 ∂Q も亦、例へば熱傳導や粘性による發生熱に起因する場合には同様な函數である。従つて

$$\Theta \equiv \left\{ r\rho \operatorname{div} \mathbf{v} - (r-1) \frac{\rho^2}{p} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T, \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &\equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \nu \nabla^2 u, \dots, \dots, \\ \Psi &\equiv \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

とおけば, (4.1), (4.2), (4.3) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\phi_x, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\phi_y, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\phi_z, \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\Psi, \quad \frac{Dp}{Dt} = -\Theta \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

となり, 獨立量の時間に就いての全微係数は夫々獨立量及び其の逐次微係數のみの函數として與へられることを知る (其の他 $\partial \Omega / \partial x$ の如き流體の状態に關係なき既知の量を含むことは後に展開される理論の上に差支へがない)。

ここに於て取扱ひ上の便宜をも考慮に入れて, 問題を一般化し, 任意の流體の状態を表はす總ての物理量の中から適當に獨立量として選んだ諸量 $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)})$ の時間に就いての全微係數が上例の如くに $\lambda^{(i)}$ 及び其の逐次微係數の函數として表はされる場合に就いて考察することにする。然るときは便宜のために λ を以つて $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)})$ を代表させるならば

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -A \quad (4.7)$$

に於て A は λ 及び其の逐次微係數の函數である。但し速度も一般には λ を以つて代表させるが, 紛れのない場合には特に獨立して u^i を以つて表はし, これに對應する A を ϕ^i にて示すこともある ((4.5), (4.6)).

更に簡單のために, 座標 x, y, z は反變記號により區別し x, y, z に就いての微分を示すためには共變記號を用ふことにし, 次の如く表はす:

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) &\equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (x^i), \quad \mathbf{v} = (u, v, w) \equiv (u^i), \\ \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) &\equiv \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \dots, & \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \dots, & \dots \end{array} \right) \equiv (u^i_j), \\ \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j} \right) &\equiv (\lambda_{i,j}), \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

一般に $\lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}$ ($\alpha_i = 1, 2, 3$) は λ の l 階の微係数を表はすが、紛れのないときにはこれを單に $\lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau}$ にて示す。又以下に於て二重に現れたギリシヤ文字の記號は dummy suffix を示すものとする。

§ 5. 吾々はこの節に於て以下展開される理論の準備として二、三の計算を行つておく。 λ の時間的變化は (4.7) で與へられる。これを

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -u^\sigma \frac{\partial \lambda}{\partial x^\sigma} - A$$

と書き直し、 $x^\alpha, x^\beta, \dots$ にて微分するならば、 λ の逐次微係数の時間に就いての全微係数に對して直ちに次の關係式を得る：

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau}}{Dt} &= \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau}}{\Delta t}, \\ \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau}}{\Delta t} &\equiv -\{(u^\sigma \lambda_\sigma)_{\alpha, \beta, \dots, \tau} - u^\sigma \lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau, \sigma} + A_{\alpha, \beta, \dots, \tau}\} \end{aligned} \right\}. \quad (5.1)$$

扱て流體の状態を微視的に觀察した場合に、時刻 t に於て P 點にあつた微小體積は dt 後に他の一點 P' に移り、其の際に生ずる状態の變化は (5.1) にて與へられる筈である。従つて P' に關するものにダツシュ記號を附けることにすると、 dt に就いての高次の項を省略して

$$\lambda'_{\alpha, \beta, \dots, \tau} = \lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau} + \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots, \tau}}{\Delta t} \cdot dt, \quad (5.2)$$

特にこれは λ に就いては

$$\lambda' = \lambda - A dt \quad (5.2_1)$$

となる。これ等の關係は A の代りに Φ^i とおけば、其の儘 u^i に就いても成立する。又 P' 點の座標は明かに次式で與へられる。

$$x'^i = x^i + u^i dt. \quad (5.3)$$

P, P' に於て空間座標 x^i の他に、更に λ 及び其の逐次微係数を座標軸として加へた無限次の空間の體積要素を夫々 $d\tau, d\tau'$ とすれば、(5.2), (5.2₁) 及び (5.3) を用ひて $d\tau, d\tau'$ の間の關係を容易に知ることが出来る。即ち $d\tau = dx^1 dx^2 dx^3 d\lambda_{\alpha, \beta, \dots} (= dx^1 dx^2 dx^3 \prod_{k, \alpha, \beta, \dots} d\lambda_{\alpha, \beta, \dots}^{(k)})$ と $d\tau' = dx^1 dx^2 dx^3 d\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ とは周知の關係式

$$d\tau' = |J(x'^i, \lambda'_{\alpha, \beta, \dots}; x^i, \lambda_{\alpha, \beta, \dots})| d\tau \quad (5.4)$$

にて結ばれて居り、而も容易に解る様に Jacobian J の對角線要素及び x^i に關する三つの行以外の要素は總て零か或は dt に比例して居る。特に x'^i と、速度を除いた其の他の $\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ に關する要素は悉く零である。従つて dt に就いての二次及び高次の項を省略すれば

$$J(x'^i, \lambda'_{\alpha, \beta, \dots}; x^i, \lambda_{\alpha, \beta, \dots}) = J(x'^i, u'^i; x^i, u^i) \prod \frac{\partial \lambda'_{i, j, \dots}}{\partial \lambda_{i, j, \dots}} \quad (5.5)$$

一方また x^i に就いての微分は特に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} &= 1 + u_i dt, & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} &= u_j dt \\ \frac{\partial \lambda'_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x^i} &= \lambda_{\alpha, \beta, \dots, i} + \left(\frac{d\lambda_{\alpha, \beta, \dots}}{dt} \right)_i dt \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

の法則に従ふことに注意すれば, (4.5), (4.6) 及び (5.3) により $J(x'^i, u'^i; x^i, u^i) = 1$ なることが容易に知られる. 従つて (5.2), (5.2₁), (5.5) により (5.4) は

$$d\tau' = \left\{ 1 + \sum_k' \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}^{(k)}} \left(\frac{d\lambda_{\alpha, \beta, \dots}^{(k)}}{dt} \right) dt \right\} d\tau \quad (5.7)$$

を與へる. 茲に右邊の第二項を總ての獨立量及び其の逐次微係數に就いての集和を表はすものとしておけば, 運動方程式 (4.1) の右邊に速度が含まれる様な場合に就いてもこの式は成立する.

§ 6. 確率函數. 吾々は流體渦動狀態を確率論的に取り扱はんとするもので, この目的のために, § 4 にて述べた様に渦動狀態を次の様に定義した: 吾々が制御し得ないと考へ得る範圍を取り除いて, 全く同一條件のもとに同一種類の實驗を繰返す際に色々の微視的狀態が出現する. 渦動狀態とはこれ等の狀態を包括するところの巨視的描寫であると考へ, 或一つの微視的狀態の出現する確率が考へてゐる渦動狀態の特性を表示する¹. 従つて流體の狀態を表はす様式によつて種々異つた確率函數を考へねばならない.

吾々は先づ獨立物理量の分布函數は總て解析的であると假定して, 流體の一點 (x^i) の周界に於ける狀態を, その點に於ける物理諸量及び其の逐次微係數の値によつて表示する場合を考へてみる.

この様な場合には 確率函數 $f(x^i, t; \lambda_{\alpha, \beta, \dots})$ は (速度 u^i も $\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ 中に含ませる), N 回の試みに際して時刻 t , 場所 (x^i) に於て微視的狀態 $\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ が

$$\lambda_{\alpha, \beta, \dots} - \frac{1}{2} d\lambda_{\alpha, \beta, \dots} < \lambda_{\alpha, \beta, \dots} < \lambda_{\alpha, \beta, \dots} + \frac{1}{2} d\lambda_{\alpha, \beta, \dots} \quad (6.1)$$

の中に落ちる回数が $Nf(x^i, t, \lambda_{\alpha, \beta, \dots}) d\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ に等しいことを意味する.

扱て時刻 t , 場所 (x^i) に於て (6.1) にて與へられる狀態が出現したとするならば, 時刻 $t+dt$ には $x'^i = x^i + u^i dt$ に於て

$$\lambda'_{\alpha, \beta, \dots} - \frac{1}{2} d\lambda'_{\alpha, \beta, \dots} < \lambda'_{\alpha, \beta, \dots} < \lambda'_{\alpha, \beta, \dots} + \frac{1}{2} d\lambda'_{\alpha, \beta, \dots} \quad (6.2)$$

1) § 2 に述べた $\Delta\tau_3$ 内の變動を統計的に取扱つても同様に確率函數 f を考へることが出來, 而も以下求められる基礎方程式はこの f に就いても齊しく成立する. 著者が本論文に於ける形式を選んだ所以は時空間の巨視, 微視的の差違に伴ふ思考上の曖昧さを取除くにある.

なる状態が出現する ((5.2), (5.2_i), (5.3)). そしてこの状態に対しても同じ様に確率函数 f' が考へられる筈である.

§ 7. 表示粒子. 今極く小さい流體の微小質量 m を取り出してみる. 勿論小さいとは言へ, 其の中では統計力學が充分成立する様なものとする. 若しこの m にそれが在るところの點の周界に於ける流體の微視的状态を附與させるならば, 吾々はこの粒子の運動を追跡することに依つて流體の刻々の状態を知ることが出来る. 今假に單位體積毎に ρ/m 箇のこの様な粒子を考へることにする.

一つの渦動状態に際しては, 前節に述べた N 回の試みの各々に上記の粒子の一組の運動が對應して居る. そこでこの N 回の試みを重疊してみると, 單位體積毎に $N\rho/m$ 箇の粒子が様々な運動をして居る一種の巨視的状态が得られる. 吾々の解釋に従へば, この巨視的状态こそ考へて居る渦動状態を直觀的に現はしたものに他ならない. 一層直觀的にするために, この重疊状態に對して平均的に粒子の数が單位體積毎に $\bar{\rho}/m$ 箇である様に定め直して, この假想的粒子を“渦動状態に對する表示粒子”と呼ぶことにする.

この表示粒子の助を藉りるならば, 流體渦動状態も氣體運動論に於けると同様に粒子的に取扱ふことが出来, 吾々はここに Boltzmann の方法¹⁾ に倣つて 確率函数 f に關する微分方程式を求め得るに至つたのである. 流體中の一點 $P(x^i)$ の周りに微小體積 $dx^1dx^2dx^3$ を取れば, この中には平均的に $\bar{\rho}/m dx^1dx^2dx^3$ 箇の表示粒子があり, 其のうち其の特性が (6.1) にて與へられる様な粒子の数は $\frac{\rho}{m} f(x^i, t; \lambda_{\alpha, \beta}, \dots) dx^1dx^2dx^3 d\lambda_{\alpha, \beta}, \dots \left(= \frac{\rho f}{m} d\tau \right)$ である. これらの粒子は dt 後には $P'(x'^i = x^i + u^i dt)$ を圍む微小體積 $dx'^1dx'^2dx'^3$ の中に落ち, 而も其の特性は (6.2) にて與へられる. 又逆に時刻 $t+dt$ に, 場所 $x'' = x^i + u^i dt$ に於ける體積 $dx''^1dx''^2dx''^3$ 内にあつて, 而も特性が (6.2) である様な表示粒子は dt 前に悉く $d\tau'$ の中にあつた筈である. これ等の数は同様に $\frac{\rho'}{m} f(x''^i, t+dt; \lambda_{\alpha, \beta}, \dots) dx''^1dx''^2dx''^3 d\lambda_{\alpha, \beta}, \dots \left(= \frac{\rho' f'}{m} d\tau' \right)$ で與へられる. 従つて $\rho f d\tau/m = \rho' f' d\tau'/m$ でなければならない. 斯くて吾々は

$$\rho f(x^i, t; \lambda_{\alpha, \beta}, \dots) d\tau = \rho' f(x^i + u^i dt, t+dt; \lambda'_{\alpha, \beta}, \dots) d\tau' \quad (7.1)$$

なる關係式を得る.

(7.1) の右邊に (5.2) を代入し, これを Taylor の級數に展開し, 更に (5.7) を用ふるならば, dt の高次の項を省略して吾々は最後に微分方程式

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + u^o \frac{\partial \rho f}{\partial x^o} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha, \beta}^{(k)}} \left[\frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta}^{(k)}}{\Delta t} \cdot \rho f \right] \quad (7.2)$$

を得る. 若しも獨立量として ρ が選ばれて居るならば, 右邊の第二項中 ρ に關するものに (4.5) の關係を用ふれば (7.2) は

1) J. H. Jeans, The Dynamical Theory of Gases (1916), Camb. p. 224.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} = u^\sigma f - \sum_k' \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}^{(k)}} \left[\frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots}^{(k)}}{\Delta t} \dots f \right] \quad (7.3)$$

となることは明かであるが、然らざる場合にも (7.1) に於て $\rho' = \rho - \rho u^\sigma dt$ を用ふれば直接にこれを確かめることが出来る。(7.2), (7.3) の右邊に於ける 集和は總ての獨立量及びその逐次微係數に就いて行はれる。

(7.2) 或は (7.3) は吾々が求めて居たところの渦動状態に關する基礎方程式の一つの形に他ならない。今一つの例として §4 に示した完全瓦斯の場合 ((4.4), (4.5), (4.6)) に就いて (7.3) を陽に示せば次の通りである：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} &= \sum_i u^i f + \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\Phi^i f) + \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial u_k^i} [\{(u^\sigma u^\sigma)_k - u_{\sigma k}^i u^\sigma + \Phi_k^i\} f] + \dots \\ &+ \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial u_{k_1, k_2, \dots, k_l}^i} [\{(u^\sigma u^\sigma)_{k_1, k_2, \dots, k_l} - u_{\sigma, k_1, k_2, \dots, k_l}^i u^\sigma + \Phi_{k_1, k_2, \dots, k_l}^i\} f] + \dots \\ &+ \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f) + \sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k} [\{(\rho_\sigma u^\sigma)_k - \rho_{\sigma k} u^\sigma + (\rho u^\sigma)_k\} f] + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{\partial}{\partial p} (\Theta f) + \sum_k \frac{\partial}{\partial p_k} [\{(p_\sigma u^\sigma)_k - p_{\sigma k} u^\sigma + \Theta_k\} f] + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

茲に $\sum_k'$ は微分記號 ($k_i = 1, 2, 3$) の組合せより得られる總ての微係數に就いての集和を示して居る。

§ 8. (7.3) を $(N+1)$ -次及びそれ以上の總ての微係數に就いて積分すれば、普通に確率函数に與へられる性質、即ち $\lim_{\lambda_{\alpha, \beta, \dots} \rightarrow \infty} (\lambda_{\alpha, \beta, \dots})^m f(x^i, t, \lambda_{\alpha, \beta, \dots}) = 0$ (m は任意の正整數) によつてこれらの微係數に關する項は消えて N -次までの微係數に關する確率函数 f_N に對する基礎方程式を得る。 l, m を $l \leq N, m > N$ なる正整數とすれば f_N は

$$f_N(x^i, t; \lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}) = \int f(x^i, t; \lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}, \lambda_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m}) d\lambda_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m}$$

にて與へられ、(7.3) は

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial f_N}{\partial x^\sigma} = u^\sigma f_N - \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}' \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}} \left\{ \left(\frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}}{\Delta t} \right)^p \cdot f_N \right\} \quad (8.1)$$

となる。茲に $\left(\frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}}{\Delta t} \right)^p$ は N -次までの微係數を一定に保つた場合の $\frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \dots}}{\Delta t}$ の部分平均を意味してゐる。

例へば完全瓦斯の場合に就いて $N=1$ とすれば、(7.4) から直ちに次式を得る：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_i u^i \frac{\partial f_1}{\partial x^i} &= \sum_i u^i f_1 + \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} \{ (\overline{\Phi^i})^p f_1 \} + \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial u_k^i} [\{ u_\sigma^i u_k^\sigma + (\overline{\Phi_k^i})^p \} f_1] \\
&+ \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_1) + \sum_k \frac{\partial}{\partial \rho_k} [\{ \rho_\sigma u_k^\sigma + \rho_k u_\sigma^\sigma + \rho (\overline{u_{\sigma k}^\sigma})^p \} f_1] \\
&+ \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\Theta}^p f_1) + \sum_k \frac{\partial}{\partial p_k} [(p_\sigma u_k^\sigma + \overline{\Theta_k}^p) f_1].
\end{aligned} \tag{8.2}$$

ここに $(\overline{\Phi^i})^p$, $(\overline{u_{\sigma k}^\sigma})^p$ 等は一階の微係数までを一定に保つたときの Φ^i , $u_{\sigma k}^\sigma$ 等の平均値である。(8.1) は無限箇の微係数に関する基礎方程式 (7.3) から導かれたのであるが、初めから N -次の微係数までを考へ、これに Remainders の平均値を附加しておくならば、(7.3) を導いたと全く同様にして (8.3) を直接に求めることが出来る。従つて (8.1) は分布函數が解析函數でなくても適當の次數まで微分可能ならば成立し、又 (7.3) は $N \rightarrow \infty$ の極限として (8.1) から導かれるべきものであらう。

§ 9. **Polytropic Gas.** 渦動状態の力學的機構に重點をおく場合には、その熱力學的反面を放棄して瓦斯の密度と壓力との間に特殊の關係を豫め假定し、問題を簡單化することが便利と思はれる。この目的のために polytropic gas, 即ち, κ , γ を常數として、

$$p = \kappa \rho^\gamma \tag{9.1}$$

を假定する。

この場合には普通やる様に、 $\gamma \neq 1$ として次の様な函數 U を用ふる：

$$U = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa \gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{9.2}$$

而して運動方程式及び連續條件式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du^i}{Dt} &= -\Phi^i, \quad \Phi^i = \frac{\partial}{\partial x^i} (U + \varrho) - \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} (\text{div } \mathbf{v}) - \nu \nabla^2 u^i, \\ \frac{DU}{Dt} &= -\Psi, \quad \Psi = (\gamma - 1) U \text{div } \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \tag{9.3}$$

となる。従つて (7.3) は次の如くなる：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} &= \sum_i u^i f + \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\Phi^i f) + \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial u_k^i} [(u_\sigma^i u_k^\sigma + \Phi_k^i) f] + \dots \\
&+ (\gamma - 1) \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial U} (U f) + \sum_k \frac{\partial}{\partial U_k} [\{ U_\sigma u_k^\sigma + (\gamma - 1) (U u_{\sigma k}^\sigma + U_k u_\sigma^\sigma) f \} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{9.4}$$

$\gamma = 1$, 即ち等温瓦斯の場合には ρ 或は p を獨立變數に選べば簡單である。

流體の壓縮率が極めて小さくて液體に近い場合には、 ρ_0 を平均密度とし、 ρ' をそれからの偏りとすれば

$$p = \kappa \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (9.5)$$

とおくことが出来るであろう。而して $\kappa \rightarrow \infty$, $\rho'/\rho_0 \rightarrow 0$ の極限が完全液體であると考へられる。この様なときには p を獨立量に選べば

$$\frac{Dp}{Dt} = -\Theta, \quad \Theta \equiv \frac{\kappa}{\rho_0} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = (p + \kappa) \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (9.6)$$

であり、(7.3) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} &= \sum_i u^i f + \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\phi^i f) + \dots \\ &+ \frac{\partial}{\partial p} (\Theta f) + \sum_k \frac{\partial}{\partial p_k} [(p_\sigma u_k^\sigma + \Theta_k) f] + \dots \end{aligned} \quad (9.7)$$

となる。

II. N -點に關する基礎方程式

§ 10. 吾々は第一章に於て流體の状態を一點に於ける獨立物理諸量及びその逐次微係數により表はし、此等に關する確率函數を規定する基礎微分方程式を Boltzmann の方法に倣つて誘導した。然しながら斯の如き流體狀態の表現法よりも、流體中の各點に於ける獨立量の値を以つてする方がより直截的であり、場合に依つては問題を容易に取り扱ひ得ることもあらうと思はれる。この章に於ては斯くの如き場合に際しての渦動狀態の基礎方程式を誘導してみる。

扱てこの場合には § 6 に説明した確率函數 f に對應して、吾々は任意に選んだ N 箇の點 $(P_1, P_2, \dots, P_N)$ に於ける獨立量 λ に關する確率函數 $F_N(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(N)})$ を考へなければならぬ。この F_N は、 P_i 點に於て λ が $(\lambda_{(i)} - \frac{d\lambda_{(i)}}{2}, \lambda_{(i)} + \frac{d\lambda_{(i)}}{2})$ の間に落ちる確率が $F_N(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(N)}) \times d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots d\lambda_{(N)}$ に等しいことを意味する。 F_N に關する基礎方程式を一般に導くことが出来るならば、吾々の目的に相應しいのであるが、ここでは λ の分布函數の性質及び點の選擇法に或種の制限を加へてその誘導を試みる。

先づ吾々は第一章に於けると同様に獨立物理量の分布函數は總て解析的であると假定して、基礎方程式 (7.3) から出發する。 $P_1(x_1^i)$ に於ける獨立量及びその逐次微係數 $(\lambda_{\alpha, \beta}, \dots)$ が與へられて居るならば、他の任意の點 $P_n(x_n^i)$ に於ける $\lambda_{(n)}$ の値は、 $\xi_n^i = x_n^i - x_1^i$ とおいて、

$$\lambda_{(n)} = \lambda_{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \xi_n^{\alpha_1} \xi_n^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_l} \quad (10.1)$$

にて與へられる。若し近似的に m -次の微係數にて止めるならば、逐次微係數の總數は $m\{(m+1)(m+5)+6\}/6$ 箇である。従つて P_1 以外にこの總數に等しいだけの點 (N 箇とす

る)を適當にとるならば, $\lambda_{\alpha,\beta}, \dots$ の一組と $\lambda_{(n)}$ の一組との間の對應が得られる. 従つて §8 に説明した f_m と F_N との關係が知られる筈である. 然るに吾々は λ の分布函數を解析函數と假定して居るから m を限りなく増大させ, P_1 點の周りに適當に選んだ可附番數箇の點 (その中の有限箇は全く任意に選ぶことが出来る) に於ける λ の値と, P_1 點に於けるその逐次微係數とを對應させることが出来る. 従つて $F(=\lim_{n \rightarrow \infty} F_N)$ と f との間には

$$F(x_1^i, \xi_n^i, t; \lambda_{(n)}) d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots = f(x_1^i, t; \lambda_{\alpha,\beta}, \dots) d\lambda_{\alpha,\beta}, \dots \quad (10.2)$$

なる關係が成立する. 但し以下に於て F に於ける ξ_n^i は單に parameter として考へることにする.

(7.3) に $d\lambda_{\alpha,\beta}, \dots$ を乗じて, これに (10.2) を代入するならば, 右邊の第二項は (5.1) 及び (10.1) を用ひて次の如く變形される:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots} \left[f \frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots}{\Delta t} d\lambda_{\alpha, \beta}, \dots \right] &= \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots} \left[\frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots}{\Delta t} F d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots \right] \\ &= \sum_{\alpha} \sum_n \frac{\partial \lambda_{(n)}}{\partial \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_{(n)}} \left[\frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots}{\Delta t} \cdot F d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots \right] \\ &= \sum_n \frac{\partial}{\partial \lambda_{(n)}} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\Delta \lambda_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots, \alpha_l}{\Delta t} \xi_n^{\alpha_1} \xi_n^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_l} F d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots \right] \\ &= -d\lambda_{(1)} d\lambda_{(2)} \dots \cdot \sum_n \frac{\partial}{\partial \lambda_{(n)}} \left[\{ (u^\sigma \lambda_\sigma)_{(n)} - (u^\sigma)_{(1)} (\lambda_\sigma)_{(n)} + A_{(n)} \} \cdot F \right] \end{aligned}$$

従つて (7.3) は

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} = u^\sigma F + \sum_{\lambda, j} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} \left[\{ (A)_{(j)} + (\lambda_\sigma u^\sigma)_{(j)} - (\lambda_\sigma)_{(j)} (u^\sigma)_{(1)} \} \cdot F \right] \quad (10.3)$$

となり, これは吾々が求めて居たところの基礎方程式である.

茲に $(A)_{(j)}$, $(\lambda_\sigma u^\sigma)_{(j)}$, $(\lambda_\sigma)_{(j)}$ 等は $\lambda_{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$) の函數として表はされて居るものとする.

吾々は (7.3) より (8.1) を求めたのと同じ様にして N 箇の點 ($P_1, P_2, \dots, P_N$) に關する確率函數 $F_N(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(N)})$ に對して, (10.3) を $\lambda_{(N)}$, $\lambda_{(N+1)}, \dots$ に就き積分し, 陽に書けば,

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial F_N}{\partial x^\sigma} = \bar{u}_\sigma^p F_N + \sum_n \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} \left[\{ (\bar{A}^{(n)})_{(j)}^p + (\bar{\lambda}_\sigma^{(n)} u^\sigma)_{(j)}^p - (\bar{\lambda}_\sigma^{(n)})_{(j)} (u^\sigma)_{(1)}^p \} \cdot F_N \right] \quad (10.4)$$

なる基礎方程式を得る. 茲に記號 $(\bar{})^p$ は $\lambda_{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N$) を一定に保つたときの平均値を意味する.

§ 11. 前節に於ては λ の分布函數が解析的であると假定して基礎方程式 (10.3) を求めたが, 其の結果はこの假定を陽に含んで居ない. 従つて一般に成立する様に思はれる. この點を少しく明かにする意味を以つて吾々はここに直接の方法による誘導を試みてみる.

簡単のために流體の状態を規定する基礎方程式 (4.6) 或は (4.7) の解が幾かの、例へば $\lambda^{(n)}$ は r_n 箇の essential parameters を持つ函数として與へられるものとする¹⁾。然るときは適當に選んだ r_n 箇の點に於ける $\lambda^{(n)}$ の値を與ふれば、 $\lambda^{(n)}$ の分布は定められてしまふ。即ち

$\left| \frac{\partial \lambda_{(j)}^{(n)}(x_j^i, t, a^\alpha)}{\partial a^\alpha} \right| \neq 0$ なる様に點 $P_j^{(n)}$ を選ぶならば、parameters a^α を $\lambda_{(j)}^{(n)}$ の函数として解くことが出來、從つて $\lambda^{(n)}$ 及び $A^{(n)}$ に現はれる必要なだけの微係數を $\lambda_{(j)}$ の函数として表はすことが出来る。從つて $\sum_n r_n > \mu$ 箇の點を出来るだけ總ての λ に就て共通である様に選んで總ての $A_{(j)}$ はこれ等の點に於ける λ の値の函数として與へることが出来る。

前節に於けると同様に μ 箇の點に於て物理諸量 $\lambda_{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, \mu$) が $\left(\lambda_{(j)} - \frac{d\lambda_{(j)}}{2}, \lambda_{(j)} + \frac{d\lambda_{(j)}}{2} \right)$ 内に落ちる確率を $F_\mu(x_j^i, t; \lambda_{(j)}) d\lambda_{(j)}$ ($d\lambda_{(j)} = d\lambda_{(1)} \times d\lambda_{(2)} \times \dots \times d\lambda_{(\mu)}$) に就いて考へるのであるが、特に P_1 點 (總ての λ に就て共通である様に選ばれた點の一つ) を重視して x_1^i を獨立變數とし、他の點の座標には相對座標 ξ_j^i を用ひ、これは單に parameters として取扱ふ。又 $\lambda_{(1)}$ をも別扱ひにして $F_\mu(x_1^i, t; \lambda_{(1)}, \lambda_{(j)}) \times d\lambda_{(1)} d\lambda_{(j)}$ と書くことにする。

今 P_1 の周りに微小體積 $dx_1^1 dx_1^2 dx_1^3 (=dv_1)$ を取れば、この中にある表示粒子の數は

$$\frac{\rho_{(1)}}{m} F_\mu(x_1^i, t; \lambda_{(1)}, \lambda_{(j)}) dv_1 d\lambda_{(1)} d\lambda_{(j)}$$

である。 dv_1 を流體と共に流動させ、其の他の點は總て P_1 に並行移動させるものとするならば、 dt 後には P_1 は $u_{(1)}^i dt$ だけ移動するを以て各點に於て $\lambda_{(1)} \rightarrow \lambda_{(1)} - A_{(1)} dt$, $\lambda_{(j)} \rightarrow \lambda_{(j)} - \{A_{(j)} + (u_{(j)}^\sigma - u_{(1)}^\sigma) \frac{\partial \lambda_{(j)}}{\partial x_j^\sigma}\} dt$ なる變化が起る。これ等の値をダツシュを附けて表はせば、§7 に於けると同様の推論に依り、吾々は次の關係式を得る：

$$\frac{\rho_{(1)}}{m} F_\mu(x_1^i, t; \lambda_{(1)}, \lambda_{(j)}) dv_{(1)} d\lambda_{(1)} d\lambda_{(j)} = \frac{\rho'_{(1)}}{m} F_\mu(x_1^i, t+dt; \lambda'_{(1)}, \lambda'_{(j)}) dv'_{(1)} d\lambda'_{(1)} d\lambda'_{(j)} \quad (11.1)$$

又簡単な代數計算が示す様に、(5.7) に對應して

$$dv'_{(1)} d\lambda'_{(1)} d\lambda'_{(j)} = \left[1 - \sum_{\lambda} \left\{ \frac{\partial A_{(1)}}{\partial \lambda_{(1)}} + \sum_{j=2}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} (A_{(j)} - (u_{(1)}^\sigma - u_{(j)}^\sigma) \frac{\partial \lambda_{(j)}}{\partial x_j^\sigma}) \right\} dt \right] dv_{(1)} d\lambda_{(1)} d\lambda_{(j)}$$

を得る。(11.1) に λ' , x' の値及びこの關係式を代入すれば、前同様にして

$$\frac{\partial \rho_{(1)} F_\mu}{\partial t} + u_{(1)}^\sigma \frac{\partial \rho_{(1)} F_\mu}{\partial x_1^\sigma} = \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(1)}} [A_{(1)} \rho_{(1)} F_\mu] + \sum_{j(\neq 2)} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} \left[\left\{ A_{(j)} - (u_{(1)}^\sigma - u_{(j)}^\sigma) \frac{\partial \lambda_{(j)}}{\partial x_j^\sigma} \right\} \rho_{(1)} F_\mu \right], \quad (11.2)$$

或は $\rho_{(1)}$ を微分記號の前に出せば、兩邊に $(u_{(1)}^\sigma) F_\mu$ を加へて、

1) この様な場合には渦動状態とは、これ等の essential parameters が或法則に従つて動揺する状態であると考へられる。

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial t} + u_{(1)}^\sigma \frac{\partial F_\mu}{\partial x_1^\sigma} = (u_\sigma^\sigma)_{(1)} F_\mu + \sum_{\lambda, j (\geq 1)} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} \left[\left\{ A_{(j)} - (u_{(1)}^\sigma - u_{(j)}^\sigma) \frac{\partial \lambda_{(j)}}{\partial x_j^\sigma} \right\} F_\mu \right] \quad (11.3)^{1)}$$

を得る。この基礎方程式は物理諸量の分布函数が有限箇の點に於ける函数値により定められる場合に成立する。若し一般の場合を分布函数に含まれる parameters の数が次第に増加して行く極限に相當するものと考へるならば、(11.3) に於て $\mu \rightarrow \infty$ とすればこれは (10.3) を確めるものである。又 (11.3) を $P_i (\mu \geq i > N)$ なる總ての點に於ける總ての λ に就いて、其の全變域に亘り積分するならば、直ちに (10.4) を得る。

III. 平均乗積に關する基礎方程式

一般輸達方程式²⁾

§ 12. 第一章に求めた一點に關する基礎方程式 (7.2) 或は (7.3) の一つの應用として Maxwell の方法に倣つて氣體運動論に於ける General Equation of Transfer に全く並行的な方程式を誘導することが出来る。

Q を獨立物理量及び其の逐次微係數の任意の函数とし、(7.3) に Q を乗じ總ての $\lambda_{\alpha, \beta, \dots}$ に就きその全變域に亘つて積分すれば

- 1) (10.3), (11.3) に於ては P_1 點を重視し、其の他の點の座標は單に parameters として含まれて居るため陽にそれに対応する項は含まれて居ない。然しながら全く形式的ではあるが、(11.3) から出發して各點に就いて對稱的な微分方程式を導くことが出来る。

考へてゐる各點に於て dv_1 に対応する微小體積 dv_j を取り、これ等を流體と共に流動さす。始めに各 dv_j 内にある表示粒子の數を悉く等しくする様にその容積を定め、全表示粒子に就いて上と同様の考察を行へば、吾々は容易に次の關係式を得る：

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\mu} \rho_{(j)} dv_j F_\mu \right\} d\lambda = \left\{ \sum_{j=1}^{\mu} \rho'_{(j)} dv'_j F'_\mu \right\} d\lambda'.$$

茲に $\lambda' = \lambda - \Delta dt$, $\rho' = \rho(1 + u_\sigma^\sigma dt)$, $dv'_j \Pi d\lambda'_{(\alpha)} = \left(1 - \sum_{\lambda_{(\alpha)}} \frac{\partial \Delta_{(\alpha)}}{\partial \lambda_{(\alpha)}} dt\right) dv_j \Pi d\lambda_{(\alpha)}$ であるから、これ等を代入すれば

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} u_{(j)}^\sigma \frac{\partial F_\mu}{\partial x_j^\sigma} = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} (u_\sigma^\sigma)_{(j)} F_\mu + \frac{1}{\mu} \sum_{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(j)}} (\Lambda_{(j)} F_\mu) \quad (i)$$

を得る。

ここに於て吾々は流體と共に流動する有限の擴りを有する容積 Δv をとり、これを μ ケに等分し各小容積の中に P_i が落ちる様にすることが出来るものとするならば、 μ が充分大なるときには $F_\mu(x_j, t; \lambda_{(j)}) = F(x, t; \lambda(x))$ において、(i) から

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Delta v + \int_{\Delta v} u^\sigma \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} dv = \int_{\Delta v} u_\sigma^\sigma F dv + \sum_{\lambda} \int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Lambda F) dv$$

を得る。或は Δv を極めて小さいものとして

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} = u_\sigma^\sigma F + \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Lambda F).$$

$F(x, t; \lambda(x))$ は x の極く近傍に於て分布函数が函数群 $\lambda(x)$ と $\lambda(x) + \delta\lambda(x)$ の間に落ちる確率函数と考へられる。

- 2) 詳しくは Jeans (前出) p. 248 を参照。

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^\sigma \bar{Q}}{\partial x^\sigma} = \bar{u}^\sigma \bar{Q} + \sum' \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}} \cdot \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots}}{\Delta t} \quad (12.1)$$

を得る。従つて兩邊に $\bar{u}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x^\sigma}$ を加ふれば

$$\frac{D\bar{Q}}{Dt} = \bar{u}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \bar{u}^\sigma \bar{Q}}{\partial x^\sigma} + \bar{u}^\sigma \bar{Q} + \sum' \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}} \cdot \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots}}{\Delta t} \quad (12.2)$$

これは $\bar{Q}$ に關する輸達方程式に他ならない。右邊は單位時間、單位體積毎の $\bar{Q}$ の發生量である。但しここでは流體の單位體積に對して量 Q を屬さして居るため容積の變化に伴つて生ずる影響として右邊の第三項が現はれて居る。

§ 13. 特に速度成分のみの函數に就いて考へる時には、 ρ を重みとする荷重平均を使用する方が平均値の意味が明瞭になる。即ち吾々は流體の質量に伴つて Q 量が流動する場合を考へるのである。

(12.1) に於て $Q \rightarrow \rho Q$ とおくと

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{Q}) = - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \phi^\sigma, \quad (13.1)$$

茲に

$$\phi^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} - \nu \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \text{div} \mathbf{v} + \nabla^2 u^i \right\}. \quad (13.2)$$

$Q=1$ とおけば

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \mathbf{v} = 0 \quad (13.3)$$

を得る。これは流體の平均運動に就いての連續條件式に他ならない。

$Q=u^i$ とすると

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^i \bar{u}^\sigma) = - \bar{\rho} \bar{\phi}^i \quad (13.4)$$

を得る。ここで

$$u^i = \bar{u}^i + \mathbf{u}^i, \text{ etc.} \quad (13.5)$$

とおき、(13.3) に $\bar{u}^i$ を乗じて (13.4) から引けば

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{u}^i}{Dt} = - \bar{\rho} \bar{\phi}^i - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \mathbf{u}^i \bar{u}^\sigma) \quad (13.6)$$

となる。ここで $\text{div} \mathbf{v} = 0$ とすれば、(13.6) は Reynolds により求められた非壓縮流體の平均の流れに關する運動方程式¹⁾ に他ならない。

1) Lamb (前出) p. 676.

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^\sigma \bar{Q}}{\partial x^\sigma} = \bar{u}^\sigma \bar{Q} + \sum' \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}} \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots}}{\Delta t} \quad (12.1)$$

を得る。従つて兩邊に $\bar{u}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x^\sigma}$ を加ふれば

$$\frac{D\bar{Q}}{Dt} = \bar{u}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \bar{u}^\sigma \bar{Q}}{\partial x^\sigma} + \bar{u}^\sigma \bar{Q} + \sum' \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \lambda_{\alpha, \beta, \dots}} \frac{\Delta \lambda_{\alpha, \beta, \dots}}{\Delta t} \quad (12.2)$$

これは $\bar{Q}$ に關する輸達方程式に他ならない。右邊は單位時間、單位體積毎の $\bar{Q}$ の發生量である。但しここでは流體の單位體積に對して量 Q を屬さして居るため容積の變化に伴つて生ずる影響として右邊の第三項が現はれて居る。

§ 13. 特に速度成分のみの函數に就いて考へる時には、 ρ を重みとする荷重平均を使用する方が平均値の意味が明瞭になる。即ち吾々は流體の質量に伴つて Q 量が流動する場合を考へるのである。

(12.1) に於て $Q \rightarrow \rho Q$ とおくと

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{Q}) = - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \phi^\sigma, \quad (13.1)$$

茲に

$$\phi^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} - \nu \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \text{div} \mathbf{v} + \nabla^2 u^i \right\}. \quad (13.2)$$

$Q=1$ とおけば

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \mathbf{v} = 0 \quad (13.3)$$

を得る。これは流體の平均運動に就いての連續條件式に他ならない。

$Q=u^i$ とすると

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^i \bar{u}^\sigma) = - \bar{\rho} \bar{\phi}^i \quad (13.4)$$

を得る。ここで

$$u^i = \bar{u}^i + \mathbf{u}^i, \text{ etc.} \quad (13.5)$$

とおき、(13.3) に $\bar{u}^i$ を乗じて (13.4) から引けば

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{u}^i}{Dt} = - \bar{\rho} \bar{\phi}^i - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \mathbf{u}^i \bar{u}^\sigma) \quad (13.6)$$

となる。ここで $\text{div} \mathbf{v}=0$ とすれば、(13.6) は Reynolds により求められた非壓縮流體の平均の流れに關する運動方程式¹⁾ に他ならない。

1) Lamb (前出) p. 676.

更に原本に於けると全く同様にして, (13.1) (13.3) (13.6) を用ひ $\bar{Q}(u^i)$ 及び $\bar{Q}(u^i)$ に對する方程式を導くことが出来る. 其の結果は夫々次の通りである.

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{Q}}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{Q}) - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \bar{\varphi}^\sigma, \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left\{ \frac{D\bar{Q}}{Dt} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \frac{D\bar{u}^\sigma}{Dt} \right\} = & -\frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{Q}) + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\tau} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{u}^\tau) \\ & - \bar{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \bar{\varphi}^\sigma - \bar{\varphi}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

例へば, (13.8) に於て $Q = \frac{1}{2} \sum (u^i)^2$ とおけば擾亂エネルギー $\bar{\rho} q = \bar{\rho} \frac{1}{2} \sum (\bar{u}^i)^2$ に對して

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{Dq}{Dt} = & -\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{u}^\tau \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial x^\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\tau} (\bar{\rho} \bar{u}^\sigma \bar{u}^\sigma \bar{u}^\tau) \\ & - \bar{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \bar{\varphi}^\sigma - \bar{\varphi}^\sigma \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u^\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (13.9)$$

を得る. 茲に右邊の第一項及び第二項は夫々渦動状態による粘性, 及び擾亂エネルギーの擴散による擾亂エネルギーの増加の割合を示し, 第三項は瓦斯壓及び氣體粘性等の寄與を表はしてゐる.

平均乗積函数に關する基礎方程式

§ 14. 平均乗積函数. 流體の渦動状態は § 6 及び § 12 に於て導入した確率函数 f 或は F に依つて特徴づけられる. 又函数 F を決定することは吾々が適當に選んだ各點に於ける物理量 $\lambda_{(i)}$ の各種の相乗積の平均値を定めることに對等であると考へられる. 従つて平均乗積を以つて渦動状態を特徴づけさすことが出来る筈である. この平均乗積は選んだ各點の位置の函数であるから, 今後これを平均乗積函数と呼ぶことにする.

平均乗積函数に關する基礎方程式は (10.4) から容易に求めることが出来る. 前同様に $P_1, P_2, \dots, P_N$ 點に於ける物理量を $\lambda_{(1)}^{(\alpha)}, \lambda_{(2)}^{(\alpha)}, \dots, \lambda_{(N)}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, m$) とし, 先づ一般的に各點に λ の函数 $Q_{(i)}$ ($\lambda_{(i)}^{(\alpha)}$) を與へ, $\bar{\Pi} Q_{(i)}$ の平均値に就いて考へてみる.

(10.4) に $\bar{\Pi} Q_{(i)}$ を乗じて總ての λ に就きその全變域に亘つて積分すれば容易に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\Pi} Q_{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x_1^\sigma} (\bar{u}_{(1)}^\sigma \bar{\Pi} Q_{(i)}) = & (\bar{u}_{(1)}^\sigma) \bar{\Pi} Q_{(i)} \\ & - \sum_i \sum_{j \neq i} \bar{\Pi} Q_{(j)} \frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \lambda_{(i)}^{(\alpha)}} \{ A_{(i)}^{(\alpha)} + (\lambda_{(1)}^{(\alpha)} u_{(1)}^\sigma) - (\lambda_{(1)}^{(\alpha)})_{(i)} (u_{(1)}^\sigma) \} \end{aligned} \quad (14.1)$$

を得る. ここに左邊の第二項に於ける微分記號は $P_1, P_2, \dots$ の相對位置をその儘に保ちつつ x_i^j に就いて微分する意味であるから, 普通の様に總ての x_j^i を獨立變數に選ぶならば, $x_j^i = \xi_j^i + x_j^i$

であるから $\frac{\partial}{\partial x_1}$ を $\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}$ におき代へねばならぬ. この代入を (14.1) に行へば左邊の第二項は右邊の第一項及び括弧の中の最後の項と消へ合つて結局

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(\Pi Q_{(i)})} + \sum_i \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} u^{\alpha})_{(i)} \frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \lambda_{(i)}^{(\alpha)}} \Pi Q_{(j)} = - \sum_i \sum_{\alpha} A_{(i)}^{(\alpha)} \frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \lambda_{(i)}^{(\alpha)}} \Pi Q_{(j)} \quad (14.2)$$

となる.

§ 15. 確率函数 F を定めることは, 一般には各點に於ける $Q_{(i)} = \Pi (\lambda_{(i)}^{(\alpha)})^{l_{\alpha,i}} (l_{\alpha,i}=0,1,2,\dots)$ の平均乗積を知ることと對等であるから, § 11 に述べた様な場合には状態を定めるに必要な μ 箇の點に關するこれらの平均乗積を考慮しなければならない. 従つて渦動状態の特徴づけに際しては, 使用した點の數に従つて段階が當然起る筈である. 例へば N -次の特徴づけに於て全く等しいと考へられる渦動状態も, 更に一點を附加した場合には異つたものとなり得ることが考へられる. そして μ -次の特徴づけに際して尙且つ平均乗積が等しい場合に始めて二つの状態は等しいのである.

N -次の特徴づけに際しては

$$Q_{(i)} = \Pi_{\alpha} (\lambda_{(i)}^{(\alpha)})^{l_{\alpha,i}}, \quad i=1,2,\dots,N, \alpha=1,2,\dots,m, l_{\alpha,i}=0,1,2,\dots, \quad (15.1)$$

において, $\overline{\prod_{i=1}^N Q_{(i)}}$ を知れば充分である. (15.1) を (14.2) に代入すれば, $A_{(i)}^{(\alpha)}$ は一般には $\lambda_{(i)}$ 及びその微係數の函数であるから, 吾々は平均乗積函数に關する直線的微分方程式を得る. 然しながら (14.2) が示す様に, $(\sum l_{\alpha,i})$ -次の平均乗積に關する式には少なくともこれより一次だけ高い平均乗積が現はれる. 従つて問題を完全に解くためには, 吾々は無限箇の聯立直線的微分方程式を取扱はねばならない.

§ 16. **Kármán の相關函数に關する基礎方程式**¹⁾ Kármán は非壓縮性流體内の等方等質渦動状態に關する統計理論の研究に際して, 相關函数の傳播に關する基礎方程式を導いたが, これは又吾々の基礎方程式 (14.2) に含まれて居る筈である. 實際二點 P, Q による二次の特徴づけを行ひ, $Q_{(1)} = u^i, Q_{(2)} = u'^j$ とおけば, (14.2) は直ちに

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u^i u'^j} + u^{\sigma} \frac{\partial u^i}{\partial x^{\sigma}} \overline{u'^j} + u^i u'^{\sigma} \frac{\partial u'^j}{\partial x^{\sigma}} = - \overline{\phi^j u'^i} - \overline{\phi'^j u^i} \quad (16.1)$$

を與へる. 而して非壓縮性流體に對しては (4.5) により $\phi^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} - \nu \nabla^2 u^i$ であり, 更に等方, 等質の場合には Kármán によれば $\overline{p u'^j} = 0$ である. 又明かに $\overline{u'^j \frac{\partial \Omega}{\partial x^i}} = 0$ である. 従つて彼に倣つて

1) Kármán (前出)

$$\bar{u}^2 R_{ij} = \bar{u^i u^j}, \quad (\bar{u}^2)^{3/2} T_{ijk} = \bar{u^i u^j u^k}$$

とおけば、等方等質の假定によつて

$$\overline{u^i(u^j u^k)'} = -\overline{u^i u^j u^k} = -(\bar{u}^2)^{3/2} T_{kji}$$

であるから (16.1) は非壓縮性の假定のもとに

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}^2 R_{ij}) - (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (T_{a ij} + T_{j ai}) = 2\nu \nabla^2 (\bar{u}^2 R_{ij}) \quad (16.2)$$

となる。茲に $\xi^i = x^{i*} - x^i$ である。(16.2) は Kármán の論文に於ける式 (50) に他ならない。従つて彼に倣つて速度に就いての二重相關函數 f, g 及び三重相關函數 k, g, h を導入すれば、等方等質の假定¹⁾のもとに (16.2) は彼が Fundamental equation of the propagation of the correlation function $f(r)$ と稱するところの亂流の研究に際して重要な方程式の一つ

$$\frac{\partial \bar{u}^2 f}{\partial t} + 2(\bar{u}^2)^{3/4} \left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{4}{r} h \right) = 2\nu \bar{u}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (16.3)$$

を與へる筈である。ここに r は二點 P, Q 間の距離である。

§ 17. 渦動状態の重疊原理. § 15 に於て述べた様に、 N -次の特徴づけを行ふ際には、渦動状態は (15.1) にて與へられる量 $Q_{(i)}$ に就いての平均乗積に依り定められる。この平均乗積は無限箇の聯立直線的微分方程式 (14.2) の一組の解として與へられる筈である。今幾組かの解が得られたものとすれば、それらの和も又 (14.2) の一組の解である。従つて各解及び其の和に對する渦動状態を夫々 E_i 及び E にて表はせば、吾々は渦動状態の重疊原理

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_m \quad (17.1)$$

を得る。

今極く簡単な場合に就いてこの渦動状態の重疊原理を少しく吟味してみよう。非壓縮性流體內の等質等方性渦動状態に對しては Kármán の基礎方程式 (16.3) が成立する。若し Reynolds 數が極めて小さいとか、或は三重相關函數 h が極めて小さい場合には (16.3) は簡単に

$$\frac{\partial \bar{u}^2 f}{\partial t} = 2\nu \bar{u}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (17.2)$$

となる。従つて高次の相關函數を考慮することなく二重相關函數を知ることが出来る。ここで吾々が 2-次の特徴づけの上に更に條件を緩和して、單に二次の平均乗積を以つて渦動状態を特徴づけることに満足するならば、(17.2) の一つの解は一つの渦動状態を表はすことになる。

$\bar{u}^2 f = \psi(r, t)$ とおけば、(17.2) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (17.3)$$

となる。その解を $\psi_i (i=1, 2, \dots)$ とすれば、

1) 渦動状態の等方等質の幾何學的叙述に就いては後報に於て詳細に論ずる。

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots \quad (17.4)$$

も亦 (17.3) の解であり、一つの渦動状態を表はす。各成分の渦動状態はお互に他のものが無い場合と同様に夫々初期条件に従つて振舞ふのである。

今實際問題として二つの渦動状態を重ね合せた場合の機構を少しく調べて見る。ここに一つの等方等質の渦動状態が既に存在してあり、其の無秩序運動の速度を u' とし、これに對應する函数を $\psi'(r,t)$ とする。この状態に第二の渦動状態 ($u'', \psi''(r,t)$) を附加するならば (その時刻を $t=0$ とする)、合成速度¹⁾は $u=u'+u''$ であるから、 $t=0$ に於て

$$\psi(r,0) = \overline{u(P)u(Q)} = \overline{u'(P)u'(Q)} + \overline{u''(P)u''(Q)} + \overline{u'(P)u''(Q)} + \overline{u''(P)u'(Q)}$$

を得る。等方等質として居るから $\overline{u'(P)u''(Q)} = \overline{u''(P)u'(Q)}$ なる關係が成立つ。そこで $t=0$ に對し

$$\left. \begin{aligned} \overline{u'(P)u''(Q)} &\equiv K \cdot (\overline{u''})^2 f'''(r,0) \equiv K \cdot \phi'''(r,0), \\ (\overline{u''})^2 &= \sqrt{(\overline{u'})^2 \cdot (\overline{u''})^2} \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

とおけば、上式は

$$\psi(r,0) = \psi'(r,0) + \psi''(r,0) + 2K\phi'''(r,0) \quad (17.6)$$

を與へる。茲に K は $f'''(0,0)=1$ なる様に定めた定數で、 P 點に於ける u', u'' の相關係數である。

二つの渦動状態を合成した時刻に於て、状態が $2K\phi'''(r,0)$ にて與へられる様な (17.3) の解を $2K\phi'''(r,t)$ とすれば、 $\psi(r,t) = \psi'(r,t) + \psi''(r,t) + 2K\phi'''(r,t)$ は其の後に於ける渦動状態を表はし、初めの二項は各成分が獨立に存在することを示し、第三項は合成機構に依つて新しく生じた附加的渦動状態を示す。合成に際して、若し各點即ち P 點に於ける各成分 u', u'' の間の相關係がなければ $K=0$ であるから第三の渦動状態は發生せず、合成は單なる和となる。

(昭和 17 年 3 月)

1) ここに考へてゐる場合には P, Q を結ぶ直線の方の速度成分のみを考慮すれば充分である

UNTERSUCHUNGEN ÜBER TURBULENZ I.

Neue Wahrscheinlichkeitstheoretische Definition von Turbulenz und
Ableitung der Fundamentalgleichungen.

Von

Mitinori KURIHARA.

Auszug.

Es ist dem Verfasser gelungen, die Turbulenzerscheinung wahrscheinlichkeitstheoretisch umzudeuten; d.h. unter der Turbulenz versteht man solchen Zustand, in welchem jede Verteilungsfunktion der die Flüssigkeit charakterisierenden physikalischen Grössen in einer Funktionenmannigfaltigkeit schwankt, deren Eigenschaft durch gewisse dort herrschende physikalische Gesetze bestimmt wird. Als mathematische Darstellung der Turbulenz wird dann die Wahrscheinlichkeit dafür aufgefasst, dass jene Verteilungen ein bestimmtes System von Funktionalformen in den Mannigfaltigkeiten nehmen; um diese Vorstellung zu veranschaulichen, ist ein neuer Begriff "Repräsentative Partikel" eingeführt worden, die dem Molekül in der kinetischen Gastheorie analog ist.

Die praktische Formulierung dieses Gedankens lässt sich dadurch ausführen, dass man die Verteilungsfunktionen in der Umgebung eines Punktes durch die Werte der physikalischen Grössen und ihre sukzessiven Ableitungen, oder alternativerweise durch ihre Werte an passend ausgewählten abzählbar vielen Punkten in der betreffenden Umgebung ausdrückt. Jedenfalls kann man mittels der repräsentativen Partikeln die Fundamentalgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsfunktion in nicht stetigem Turbulenzzustande erhalten. Daraus sind dann die Fundamentalgleichungen für die Diffusion des Mittelwertes des Produktes der Werten in N Punkten abgeleitet worden. Es werden schliesslich einige Bemerkungen hinsichtlich des Superpositionsprinzipes von Turbulenzen gegeben.