

流體渦動状態の研究（II）：新統計理論に基づく渦動 状態の統計力学と渦擾速度の Maxwell-Boltzmann 分 布則に就いて

栗原， 道德
九州帝國大學流體工學研究所

<https://doi.org/10.15017/7151688>

出版情報：流體工學研究所報告. 2 (2), pp.33-47, 1943-09-15. Research Institute for Fluid Engineering, Kyushu Imperial University

バージョン：

権利関係：



流體渦動狀態の研究(II)

新統計理論に基く渦動狀態の統計力學と渦擾速度の Maxwell-Boltzmann 分布則に就いて

所 員 栗 原 道 徳

(昭和18年1月20日受理)

概 要

一様な渦動狀態の場に於て渦擾速度分布が正規誤差曲線になつて居ることはよく知られて居ることである。風洞内の亂流に關する Townend 及び Simmon, Salter の實驗から渦動狀態が一様なることと渦擾速度分布が Maxwell-Boltzmann 則に従ふに到ること、は全く同時に固有の機構に依つて行はれることが推論され、總ての實驗は粘性流體に就いてなされて居るのであるが、Maxwell-Boltzmann 則は粘性の作用に依つて亂されないことが理論的に證明されて居る。

渦動狀態の確率論的新定義に基いて渦動狀態の統計力學的取り扱いが試みられ、その一つの應用として上の分布則の説明が與へられて居る。

緒 言

§ 1. 巨視と微視. 吾々が自然現象を研究するに際しては、それに關與する物理學的諸量を數量的に表はして之を行ふのであるが、その際採用されるべき單位は同一種類の事象の數量的取扱ひに對して最も便利である様に定められなければならない。従つて C. G. S 基本單位は實驗室或は日常の室内に於て普通に取扱はれる諸種の事象を通じて最も便利である様に定められた單位系の一つになつて居る筈である。この事は、例へば長さに就いて言ふならば、實驗室に於ては一輦に準據して物を測定するのが概して便利であり、吾々は自然と一輦程度の長さに準據して物を注視する様に習慣付けられて來て居る事を意味する。同様に野外に於ては一杆を單位にとるのが便利であり、一杆程度の長さに依つて事象を注視する様に習慣付けられて居る。この認識の階段性は夙に天文學者により提唱されたところであるが、其後の科學的發見に

伴つて數段の擴張がなされ、今日に於ては窮極的には極微粒子の世界より宇宙の大きさに到るまでに凡そ十一個の世界が區別され、各階段の間には凡そ $10^4 \sim 10^5$ が乗ぜられて居る。この様に一般に自然現象の認識に際しては、その對象に應じて現在までの經驗或は習慣に基いて自ら或程度の定つた時空の尺度に準據して之を觀察するのが普通である。

上述の認識の段階の撰定には可成の自由性が含まれて居り、その範圍は單に大きさの程度を示すに過ぎないにも拘らず吾々はその存在を領くことが出来る。前論文¹⁾に述べた様に、吾々が同一現象を對象とする場合に於ても觀測に費さるべき時空の擴り $\Delta\tau$ の取り方に依つて見かけ上異つた現象として認識される。然しながら意識して $\Delta\tau$ を定める場合を除いて、吾々はこの $\Delta\tau$ を認識の階段性に從つて自ら或程度の大きさのものに採用する様に習慣付けられて居る。この事は各認識の段階に於て諸物理量間に因果律的關係を見出さんとする吾々の強い要求に基いて居る様に思はれる。即ち考へてゐる認識の段階より一つ低位の段階に於て認められる種々の斑或は不規則性を平均化して得られる状態に就いて諸物理量間の關係を見出さんとするもので、この目的のためには充分に平均化作用を行ひ得る様 $\Delta\tau$ の大きさの程度、從つて又二つの段階間の位數の差には必然的に限られた範圍が存在することになる。觀測に際して $\Delta\tau$ を任意にとることはその物理的意味を失ふことになり、又吾々が微小量 dx を微分 dx に置き換へ得るのもこの均された状態に對してである。

この平均化作用は低位の認識の段階に對する統計的處理であり、從つてその際吾々は總ての可能な状態を考慮しなければならないが、斯くして得られた或認識の段階に於ける一つの状態を取り扱ふ場合には、吾々は其の低位の段階に於ける詳細なる状態に就いては關知しないのである。この様にして今日物質構造に就いて専ら用ひられて居る巨視、微視の概念はそのまゝ認識の各段階に對しても適應し、その間に先驗的確率の導入されることも極めて自然的である。

§ 2. 渦動状態の統計力学。渦動状態に關する統計理論に於ける吾々の立場は、普通状態に於ける流體に關する諸物理法則が因果律的に成立する最低の認識の世界を微視の世界と見做し、流體の流動状態を觀測するのに普通に使ひ慣されて居る實驗室内の時空の尺度に準據した認識の世界を巨視的世界と考へ、普通の状態に於ける渦動状態を統計的に取扱はんとするにある。この取扱ひが可能であるためには先づ $\Delta\tau_2$ が $\Delta\tau_3$ (I, § 2 参照) に較べて極めて小さく $\Delta\tau_3$ 内にあらゆる可能な微視的状态が含まれる様でなければならないが、これは普通の渦動状態に際しては滿されて居る。

渦動状態の微視的状态に關する偶然性に就いては (I) に述べられて居るが、こゝに注意すべきことは吾々が取扱ふところのものは流體がそこに存在することと自體に依つて生ずると見做される偶然性のみであることである。(I) に舉げた例に就いて言ふならば、二平行板間の對流

1) 流體工學研究所報告、第一卷第一號(昭和十七年)。簡單の以下これを (I) と略記する。

に就いては、先驗的確率を導入し得るのは瓦斯が對流を起すこと自體に依つて生ずる境界面の溫度分布の動搖或は熱量輸達量の變化等に關連した量に對してであり、又管内の亂流に就いては流體の流動に起因する境界層の動搖従つて又その作用に起因する流速、壓力分布の動搖等のみを考慮して居るのである。勿論これ等の動搖は境界面の幾何學的な不規則性により著しく増大される筈であるが、この種の微視的狀態は吾々の理論により定められるべきものではなく、既に與へられたものとして取り扱はれる。

統計力學は元來保存力學系に就いて展開されたものであるが、これを假想的な調和振動子の集合に應用することにより連續體の振動をも取り扱ひ得たのである。従つて上述の渦動状態の統計的性質より見て、更に渦動状態の統計力學的取り扱ひも全く不可能とは思はれない。實際古くから、J. M. Burgers 等¹⁾によりこの試みが行はれて居る。彼は平行板間の完全流體の二次元的流動をその間に設けられた微細格子に於ける流れの函數により表はし、これら函數に就いての位相空間に於て Liouville's Theorem の成立することを證明し得たのである。然しながら、彼も指摘して居る様に、渦動状態は一つの dissipative system ではあるが絶えず平均流動の運動エネルギーの補給を受け一つの定常状態を出現し得る。この様に若し定常な状態にあるものならば一般に Liouville's Theorem の成立するであらうことは dissipative dynamical system の場合からも想像されるところである。吾々のこの論文に於ける目的は、(I) に述べた新統計理論に基いて表示粒子に關する位相空間に就いてこの點を確め、理論の一つの應用として、實驗事實より確め得られるところの“一樣な渦動状態の場に於ける渦擾速度の Maxwell-Boltzmann 分布則”の説明を試みんとするものである。

渦動状態の統計力學

§ 3. 表示粒子. 流體の状态は流體の場に於て充分に澤山とられた點に於ける物理諸量の値に依つて定められる。従つて數多くの流體の微小質量を取り出し、それ等の状態變化を追跡するならば、吾々は流體の刻々の状態を知ることが出来る。吾々の理論に於て渦動状態とは同一の巨視的条件のもとに繰り返された N (充分に大なるものとする) 回の試みに際して出現する流體の微視的状态の總括である。従つて上記の多數の微小質量の總括は渦動状態に對する統計的集合と見做すことが出来る。(I) に於て吾々はこの様な假想微小質量を渦動状態の表示粒子と呼び、その數は單位體積毎に $\bar{\rho}/m$ であるとした。

扱へ便宜のために豫め選んだ表示粒子の identification を行ひ、これ等に番號を附し $P_k (k=1, 2, \dots)$ にて表はし、これ等が i 回目の試みに屬することを明示するために iP_k ($i=1, 2, \dots, N$) なる記號を用ふる。又 iP_k が同一試みに屬すること、或は各試みを通じて同

1) Th. v. Kármán, Proc. Ist. Intern. Congress for Applied Mechanics, 1924, p. 97.
J. M. Burgers, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 32 (1929), 414, 643, 818; ibid. 36 (1933), 276.
W. Tollmien, Physics, 4 (1933) 289. 等.

一表示粒子なることを特に示す必要のある場合には、夫々 ${}^{(i)}P_k, {}^{(i)}P_{(k)}$ にて表はすこととする。渦動状態は表示粒子 ${}^{(i)}P_k$ を巨視的に観察した状態であり、氣體運動論のモデルとよく似て居る。

こゝに注意すべきことは、 ${}^{(i)}P_{(k)}$ は氣體運動論に於けると同様に互に全く獨立して振舞ふ粒子であるが、 ${}^{(i)}P_k$ は相互に流體力學、熱力學の諸法則に従つて關係付けられて居ることである。然しながら、流體の状態を表はす物理量 $\lambda^{(j)} (j=1, 2, \dots, m)$ に關する微分方程式の解が一組の essential parameters $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を含むものとして與へられた場合には、これ等に對應して ${}^{(i)}P_k$ の中から適當に選んだ特別の表示粒子のみに依つて状態を表はし得る可能性が生ずる。この様に選ばれた表示粒子を ${}^{(i)}P_k$ と區別して ${}^{(i)}Q_k$ にて表はすことにする。然る時は $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ に含まれた自由性の範圍に於て ${}^{(i)}Q_k$ も亦相互に自由性を有する。この様な場合に巨視的な與條件のもとにパラメーターが動搖する状態が渦動状態であり、吾々はその動搖の確率を求めんとするものである。

以下少しく ${}^{(i)}Q_k$ の撰擇に就いて考察してみる。(I) に於ける記號を用ひて物理量 $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)})$ に關する微分方程式を

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -A \quad (3.1)$$

とする。茲に A は λ 及びその逐次微係數の函數である。

今これ等の一組の方程式の解が求まり

$$\lambda^{(j)} = \lambda^{(j)}(x, y, z, t; \alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (3.2)$$

の形にて與へられたものとする。茲にパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は初期及び境界條件に對應するものである。其等の内に實驗裝置に就き既に動搖の知れて居るものを含んで居ても以下の理論は同様に成立するが、簡單のためにこれ等は含まれて居ないものとし、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は總て流體の流動そのものに起因して動搖を起すと考へられるパラメーターのみであるとする。

(3.2) に依つて A は又

$$A^{(j)} = A^{(j)}(x, y, z, t; \alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (3.3)$$

の形にて與へられ、こゝに含まれるパラメーターは高々 (3.2) に於けるもののみであると考えて差支へない。何んとなれば考へてゐる流體の將來に於ける状態は現在に於ける状態により一義的に定められるものと考えからである。

扱て表示粒子 P の運動は (3.2) に依つて定められる。従つてこれを解くならば、その初位置を (x_0, y_0, z_0) として、 t 時刻に於ける位置は

$$x = x(t; x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$$

の形にて與へられる筈である。然るに初期條件として吾々の與へられるものは λ の分布函數のみであり、表示粒子の位置は全く任意に撰ぶことが出來、 Q 粒子を撰ぶに當つてもその位置

は初期及び境界条件により許された範囲に於て全く任意にとることが出来る筈である。従つて任意の時刻に於ても P 粒子が取り得る總ての位置の中その孰れを Q 粒子に與へても差支へない。又初位置として (x_0, y_0, z_0) を全く自由に與へることなく、例へば $y_0=f_1(x_0)$, $z_0=f_2(x_0)$ の如くに只一個の自由性を與へることも可能である。 f_1, f_2 は任意の函数であるから前同様に任意の時刻に於ける x -座標のみに自由性を與へることになる。更に自由度をも一つ増して x, y 座標を獨立させることも出来る。前者を假に $Q(1)$ 後者を $Q(2)$ と記號しておく。

今パラメーター $a, \beta, \gamma, \dots$ に應じて Q_k 粒子を撰擇する場合に、パラメーターの總數 s が獨立物理量 λ の總數 m の整數倍、例へば n であるときには吾々は n 個の Q 粒子を撰べばよろしい。然らざる時には適當に $Q(1)$ 或は $Q(2)$ 粒子の助を籍りるならば、總てのパラメーターを Q 粒子に附與さるべき λ の値に依つて定め得ることが容易に知られる。數學的には、この撰擇が可能であるためには

$$J = \left| \frac{\partial(\lambda_k(x_k, y_k, z_k, t; a, \beta, \gamma, \dots))}{\partial(a, \beta, \gamma, \dots)} \right| \neq 0 \quad (3.4)$$

が任意の時刻に於て成立しなければならない。以下に於ては簡單のために n 個の正規の Q 粒子が撰擇されたものとして考察して行く。

吾々の渦動状態の研究に於ける立場は $a, \beta, \gamma, \dots$ が各種の値を取るものとする點にある。従つて (3.4) が成立する範囲に於て Q_k 粒子に附與された座標 (x_k, y_k, z_k) 及び物理量 λ_k を獨立な變數と見做すことが出来る。

§ 4. 渦動状態の幾何學的表示. n 個の Q 粒子を用ふるならば刻々の流體の状態はこれ等を追跡することに依つて知ることが出来る。今一個の Q 粒子の状態をその位置及びそれに附與された物理量 $\lambda^{(j)}$ に関する $(3+m)$ 次元の空間を用ひて表はし、更に $Q_k (k=1, 2, \dots, n)$ に就いて $n \times (3+m)$ 次元の空間を用ふるならば、或時刻に於ける流體の状態 ($a, \beta, \gamma, \dots$ の一組の値に應ずる) はこの空間内の一點により示される。前者を μ -空間、後者を r' -空間と呼んでおく。 N 回の試みの重疊である渦動状態は r' -空間を部分空間として持つ $N \times n(3+m)$ 次元の空間内の一點にて表はされ、この表示點は時と共に一つの曲線を書いて行く。この空間を r -空間と呼ぶことにする。

N 回の試みに際してパラメーターは一組の値 $(a, \beta, \gamma, \dots)$ を取る。これに對應して $\lambda^{(j)}$ を $\lambda^{(j)}$ と書けば、 r -空間は $(x_k, y_k, z_k, \lambda_k^{(j)})$ ($i=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, n$) を表はす互に直角な座標系である。従つて $(x_k, y_k, z_k, a, \dots)$ が少しく異なれば r -空間内の表示點も少しく移動し、而も (3.4) の条件のもとに表示點は r -空間内に連續分布を作ることが出来る。この連續分布は時と共に流動して行く。

吾々はこの雲を r -空間内の假想流體と呼ぶことにする。

上に於て吾々は (I) に展開した思想形式に従つて渦動状態を Q_k 粒子に關する r -空間を

用ひて表はすことを試みたのであるが、新らしく立場を代へて、流體の状態を (3.4) に満す様な空間に固定した n 個の點 $R_k (k=1, 2, \dots, n)$ に於ける $\lambda^{(j)}$ の値を用ひて表はすならば、 r -空間、 r -空間に對應する Γ , Γ -空間に依つて夫々流體の状態及び渦動状態を表はすことが出来る。

§ 5. 定常な渦動状態¹⁾ 扱て巨視的に見て一定の實驗装置を用ひ一定の初期條件のもとに實驗を行ひ、充分永い時間の後に定常な渦動状態を出現し得たものとする。この定常の意味は時間統計的には、或時刻に於て其の前後に充分永い時間 T に就いて微視的觀測を行つて得られる統計的結果が時刻に關係しないことを言ふのであり、吾々の理論に於ては (3.2) で與へられる $\lambda^{(j)}$ の集りが統計的に時刻に無關係であることである。そして實驗開始當時の多くの要素は最後の状態に殆んど影響を持たぬ様になり、最後まで残り得るものに關するパラメーターが (3.2) に含まれることになる。この様な定常な渦動状態に際しては、吾々が或任意の時刻に於て其の時の状態を初期條件として實驗を開始するものとするならば、同一の巨視的條件のもとに實驗を數多く繰返すことは初期時刻 t_0 を全く無秩序に選ぶことをも其の内容に含んで居る。従つて (3.2) が t を陽に含んで居る場合にはパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 中には少くとも t_0 が含まれて居なければならない。

この意味を明示するために (3.2), (3.3) を

$$\lambda^{(j)} = \lambda^{(j)}(x, y, z, t + \varepsilon; \alpha, \beta, \gamma, \dots), \quad (5.1)$$

$$A^{(j)} = A^{(j)}(x, y, z, t + \varepsilon; \alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (5.2)$$

と書き改めておく。

§ 6. Liouville の定理. これは統計力學の根底になる重要な定理である。従つて渦動状態に就いても Liouville の定理が成立するならば、その統計的取扱ひに大きな根據が得られるのである。實際音波に就いてはその位相空間にてこれが成立し、又 Burger の位相空間に於ては粘性のない流體の平行板間の二次元的流動に就いてこれが成立する。然しながら一般に渦動状態に就いては、只に流體が dissipative system である理由からだけではなく證明は容易でない。然しながら力學系が非保存系である場合に於ても、充分に永い時間の後には初期條件の如何に關らず表示點は位相空間内に於てエネルギー極小の部分に集合し、そこでは Liouville の定理が成立するに到る。これと同様に渦動状態に就いても、若し定常状態がある場合には、 N 回の試みの重疊に對應する r -空間内に於ては Liouville の定理が成立するであらうと想像される。

今第三節に述べた様に正規表示粒子 Q_k に就いて x_k, y_k, z_k 及び $\lambda_k^{(j)}$ を獨立量に選ぶならば運動方程式は

1) こゝに定常とは時に就いて不變なることを意味する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^i \lambda_k^{(j)}}{dt} &= -{}^i A_k^{(j)} ({}^i x, {}^i y, {}^i z, {}^i \lambda, t), \\ \frac{d^i x_k}{dt} &= {}^i u_k, \dots, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

特に速度に就いては

の形で與へられる。従つて r -空間内の假想流體の密度を τ とすれば

$$\frac{D\tau}{Dt} = \tau \sum_{i,k,j} \frac{\partial^i A_k^{(j)}}{\partial^i \lambda_k^{(j)}} \quad (6.2)$$

が成立する。

Dissipative system の場合には dissipative force を F とすれば (6.2) の右邊は $\tau \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_s \partial q_s}$ となり、これは常に正或は零であり、エネルギーが極小値を取る時に零となる。吾々の場合には正或は負となり得るが、定常な渦動状態に就いては r -空間内の軌道に沿つて一定でなければならない。

今表示點が時刻 t に於てその軌道上の一點 $A (({}^i x_k, {}^i y_k, {}^i z_k, {}^i \lambda_k^{(j)}))$ にあつたとし、これが δt 後に $B (({}^i x_k + \delta^i x_k, {}^i y_k + \delta^i y_k, {}^i z_k + \delta^i z_k, {}^i \lambda_k^{(j)} + \delta^i \lambda_k^{(j)}))$ に移つたとするならば、 $\delta^i x_k, \dots, \delta^i \lambda_k$ は (6.1) により ${}^i u_k \delta t, \dots, {}^i A_k^{(j)} \delta t$ に等しいことは明かであるが、或は (5.1) より直接に求められる。 i -回目の試みに就いて考へるならば、 ${}^i \lambda^{(j)}$ は (5.1) に於ける $\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ に ${}^i \epsilon, {}^i \alpha, {}^i \beta, {}^i \gamma, \dots$ を代入すれば得られる。時刻 t に於て B にある流體の状態は明らかに ${}^i \epsilon + \delta^i \epsilon (= \delta t), {}^i \alpha, {}^i \beta, {}^i \gamma, \dots$ に對應し、 $t + \delta t$ に B にある状態に同じである。従つて $({}^i x_k + \delta^i x_k, {}^i y_k + \delta^i y_k, {}^i z_k + \delta^i z_k)$ なる ${}^i Q_k$ 粒子の位置は t 時刻に於ても亦可能な位置であり、 B に於ける i 回目の試みの状態は A に於ける何れかの試みの状態に含まれて居なければならない。この事は r' -空間に於て考ふれば一層明瞭である。

r -空間内の一點は r' -空間内の連續分布に對應して居る。初期時刻が全く無秩序に與へられて居ることはこの連續分布が時に對して全く其の形を變へないことを意味して居る。従つて r' -空間内の表示點の任意の函數は r -空間内の表示點の軌道に沿つて一定である。假想流體の軌道は定常な流線をなし、表示點はその上を一定の速さで移動して行く。

(6.2) の右邊を $\sum_i (\sum_{k,j} \frac{\partial^i A_k^{(j)}}{\partial^i \lambda_k^{(j)}})$ と書き直せば上に述べたことにより、これは t に無關係に一定であることが知れる。更に定常渦動状態なる假定のもとにこれは零でなければならぬ事が次の様にして容易に確められる：今 A 點に於て極めて小さい斷面を有する流管を考へ、その中に微小體積 Δv をとる。この流管の中心線上の一點と管側上の一點とは少なくとも ϵ 以外にパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ の一つ例へば α が有限の値 $\delta \alpha$ だけ異つて居なければならない。従つて如何なる時刻に於ても中心線上の一點と管側上の任意の一點との距離は有限である。即ち

流管の断面は有限である。又 dv が切り取る中心線の長さ dl は不変であるから、従つて dv は零となり得ない。斯くて (6.2) の右邊は正ではあり得ない。又これが負であり得ないことも容易に知られる。この様にして渦動状態が定常であるならば假想流體は非壓縮性流體の如く振舞つて居ることが知られる。

以上の推論に於ては流體力學の法則は何等直接に用ひられて居ない。一つの物理學的な状態があつて、それに關する物理法則が (3.1) の形式で與へられ、而も状態が時間統計的に定常である場合には、これより作つた空間集合に關する位相空間に於ては空間容積は時に對して不変でなければならぬことを一應形式的に推論したのである。

§ 7. 確率函数. 巨視的に見て二つの渦動状態が等しいか否かを區別するに用ひらるべき幾つかの量が必ず存在する筈である。(I) に挙げた二平行板間の對流に就いて言ふならば、一定の裝置に依つて惹き起される對流を如何なる場合に同じであると見做すかの問題が起る。恐らく吾々は、兩面の平均温度が同一であり、且つ對流に依つて傳へられる熱流量が同一である様な實驗に際してはそこに起る對流は全く同一性質のものであると見做すであらう。管内の亂流に就いては、管の兩端に加へられる平均壓力及び平均流量に依つて亂流は定められるであらう。この様に一定の實驗裝置に依つて發生される渦動状態に就いてそれを規定すると考へられる巨視的の幾つかの獨立量 $E_1, E_2, \dots$ がある筈である。而してこれ等は一般に微視的状态に關する量 $f_1(x, y, z, t + \varepsilon, \alpha, \beta, \dots), f_2, \dots$ の集和で與へられるものとするならば、 N 回の試み中 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ が一組の値 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を取る回数を n_p として、 $E_1, E_2, \dots$ が一定であることは

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sum_p n_p \varphi_1(p\alpha, p\beta, p\gamma, \dots) = \text{一定} \\ E_2 &= \sum_p n_p \varphi_2(p\alpha, p\beta, p\gamma, \dots) = \text{一定} \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1 &= \frac{1}{T} \iiint f_1(x, y, z, t, \alpha, \beta, \dots) dx dy dz dt, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

にて表はされる。茲に T は平均をとるために用ひた充分永い時間を示し、 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ は假定により時刻に無關係である。

こゝに於て吾々はパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ が $(\alpha, \alpha + d\alpha; \beta, \beta + d\beta; \dots)$ なる變域に落ちる確率を求め得るに到つた。即ち $E_1, E_2, \dots$ の微小變化 $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots$ に對應する γ -空間の領域に就いて先驗的確率を採用するならば、單に領域 $d\alpha d\beta d\gamma \dots$ の重みを計算すればよろしい。パラメーター $\varepsilon, \alpha, \beta, \dots$ 及び $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ に關する空間を微小體積 (h) に等分すれば、この容積 h は γ -空間の容積 $\Delta h (= J h)$ に對應して居る。

然るに ε 及び $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots)$ は夫々全く無秩序に出現するものと考へて居る. 従つて ε 及び $(x_1, \dots, x_2, \dots)$ の區割の數を夫々 r, s とし, 各區割に關する Δ を $\Delta(i\varepsilon, x_k)$ と記號するならば, 上に述べた重み $g(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ は明かに

$$g(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = g_0 \left(\prod_{i\varepsilon, x_k} \Delta(i\varepsilon, x_k) \right)^{\frac{1}{rs}} \quad (7.2)$$

にて與へられる. この右邊は吾々の假定のもとに時刻に對して一定である. 而して求める確率函数は

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = C g(\alpha, \beta, \gamma, \dots) e^{-\sum_i \lambda_i \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma, \dots)} \quad (7.3)$$

にて表はされ, λ_i は渦動状態に關する巨視的條件に依つて定められるべき常數である.

(7.2) の對數をとり, $i\varepsilon$ に就いての和を t に就いての積分に, $(x_1, \dots, x_2, \dots)$ に就いての和を空間積分に代へるならば, 流體の占める容積を V として

$$\log g(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \log g_0 + \frac{1}{TV^n} \iint \dots \int \log \Delta(t, x_k) dx_1 dy_1 dz_1 \dots dt \quad (7.4)$$

を得る. 斯くして $\log g$ は表示粒子 (Q_k) に關する時間軸をも加へた configuration space に於ける $\log \Delta$ の平均値であることが知られる.

物理量 λ の變化が極めて小さい場合には運動方程式は線形となり, その一般解が

$$\lambda^{(j)} = \sum_q A_q \lambda_q^{(j)}(x, y, z, t; \alpha_q, \beta_q, \dots) \quad (7.5)$$

にて與へられるならば, 流體の状態は各特解 $A_q \lambda_q^{(j)}$ を重ね合せたものである. 従つて吾々はこれ等の特解を獨立に取り扱ふことが出来る. 即ち各解に就いて夫々表示粒子を獨立に撰擇することが出来, (7.2), (7.4) に於ける Δ は各解に對するものゝ積となる. 若しこの時に (7.1) に於ける φ が又各解に對するものゝ和となるならば確率函数 $f(\alpha, \beta, \dots)$ は分離され, 吾々は直ちに $f(A_q, \alpha_q, \beta_q, \dots)$ を求めることが出来る. 即ち

$$\left. \begin{aligned} f(A_q, \alpha_q, \beta_q, \dots) &= C g(A_q, \alpha_q, \beta_q, \dots) e^{-\sum_i \lambda_i \varphi_i(A_q, \alpha_q, \dots)} \\ g(A_q, \alpha_q, \dots) &= g_0 \left(\prod_{i\varepsilon, x_k} \Delta_q(i\varepsilon, x_k) \right)^{\frac{1}{rs}} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

であり, λ_i は q を通じての常數である.

扱て吾々の理論に於ては, 微視的な初期及び境界條件が詳細に知れたものとした場合の運動方程式の解が, 流體自身に起因して物理的或は試考的に動搖をなすものと見做される一組のパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を含む様な場合に, 渦動状態とはこれ等のパラメーターが巨視的に與へられた條件のもとに動搖する状態であつて, パラメーターの許されたあらゆる値に對する状態

が N 回の試み中に出現するものとして取扱はれて居る。そこでこの様な理論が実際の渦動状態を表はして居るか否かと言ふ問題が生ずるが、これは渦動状態とは何かと言ふ初めの問題に戻つて仕舞ふのであつて、実際の渦動状態を與へられた微視的條件により因果律的に定められるものとするならば、問題は既に單なる流體力學的のものに歸せられる。又これを若干の偶然性に基く動搖現象と見做すときに統計理論が生れ、この統計的取扱ひの妥當性に就いては緒言に於て述べた通りである。従つて、定常な渦動状態に際して時間的集合を空間的集合により置き換へる吾々の理論の妥當性は、これ等兩集合が統計的に全く對當であるか否かに依つて確められるものと考へられる。特に上記の解 $\lambda^{(j)}(x, y, z, t; \alpha, \beta, \dots)$ に於て $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ が時間的に極めて緩かに動搖する場合にはこの解は又運動方程式の解と見做すことが出来る。そこで假りにこの様な状態が実際の渦動状態であると考へることが出来るならば、前節までの理論は確められることになる。理論のこの段階に於て、既に連續體の統計力學により取り扱はれて居る音波を吾々の理論により調べることは興味深いことで、實際 (7.5), (7.6) に依つて容易に行ふことが出来る。¹⁾

- 1) 今 x, y, z の方向に夫々 a, b, c の長さを持つ一つの四角な箱に閉ぢられた空氣の振動を考へて見る。速度ポテンシャルを ψ とすれば、この問題の解は

$$\psi = \sum K_i \cos(p_i(t + \varepsilon_i) \pm \frac{l_i \pi x}{a} \pm \frac{m_i \pi y}{b} \pm \frac{n_i \pi z}{c}) \quad (i)$$

にて與へられる。右邊の各項は夫々平面波を表はして居る。そこで其の進行方向に新しく ξ_i 軸を取り、流體の状態を (ξ_i) 空間で表はす。但し p_i は各軸に就いて固有のものである。この様にすれば平面波は單振動 $K_i \cos(p_i(t + \varepsilon_i) \pm \frac{p_i}{c} \xi_i)$ となり、獨立な parameters は K_i 及び ε_i の二つであ

る。速度は $A_i \sin(p_i(t + \varepsilon_i) \pm \frac{p_i}{c} \xi_i)$ にて與へられ、吾々は表示粒子として ξ_i 軸上の二つを選べばよい。

今巨視的條件として箱の内部の全エネルギーが一定であることのみが與へられて居るものとすれば、(7.1) の條件として $A_1^2 + A_2^2 + \dots = \text{一定}$ を得る。これは各特解に就いて分離して居るから吾々は直ちに $f(A) = Cg(A)e^{-\lambda A^2}$ を得る。 g を求める際に Δ は各特解のものをを用ふればよいから、(7.4) の積分の形にて g を計算すれば、單なる數值的對數の無限大を g_0 に吸収させて、音波の各成分の振幅が A から $A + dA$ の間に落ちる確率として

$$Ce^{-\lambda A^2} dA \quad (ii)$$

を得る。この結果は統計力學によるものと一致して居るが、その物理的内容は著しく異つて居る。

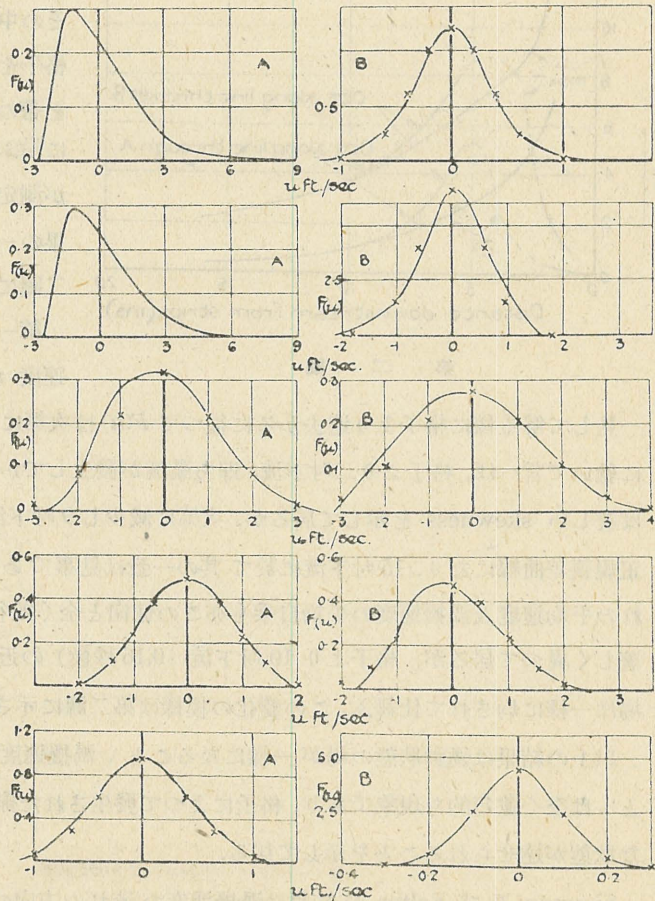
(ii) に於ける λ が各成分を通じて一定であることは、各成分の有する平均のエネルギーは總て相等しいことを意味する。この種の運動に附與される統計的性質の歸着さるべき要因に就いて考へて見るに、統計力學の場合には、瓦斯が或溫度にあること自體に起因されて居るところの構成分子の無秩序運動によつて統計的動搖現象が起される。吾々の場合にも同様に偶然性或は統計的性質が、器の中の瓦斯が運動して居ること自體に起因されなければならない。従つて、例へば次の如くに解釋されるべきである。時刻 t_0 に器の中に振動數 ν の音波(全エネルギーを E とする)が閉ぢ込められたものとする。若し器の内壁が完全反射をするものならば、その後の音波の状態は一義的に定められて仕舞ふ。然しながら壁は完全彈性體ではあるが、側面の壓力を受けて變形し得るものとすれば、その内部に音波があることに依つて振動を始める。従つて反射波の波長及び方向は極めて緩々ではあるが不規則な擴散を受けることになる。この様にして充分永い時間の後にはその中にあらゆる振動數を持つた波があらゆる方向に進行し、その状態は巨視的にはエネルギーが一定であること以外に識別し得ない様な状態に到るであらう。吾々はこの様な定常状態を取り扱つて居るのである。その際音波のエネルギーと壁の振動エネルギーとの和が E に等しい筈である。

一様な渦動状態の場合

§ 8. Townend 及び Simmon, Salter の実験. 一般に渦動状態に際して, それを惹き起す作用が取除かれてから時間が経過するに従つて, 或は其の作用の行はれて居る領域から遠ざかるに従つて渦擾速度の三つの成分の平均自乗は互に等しくなつて行く強い傾向を有する. 實際管内の亂流に就いては, 管の中心に向ふ程, 又格子により形成される渦動状態はそれより遠去かるに従つて, 等方性となる強い傾向を有することは一般に認められて居ることである. これ等の事實は渦動状態が一様になるに従つて等方性となることを示すものである. 従つて渦擾運動の統計的性質を思ひ合せらば, 氣體運動論に類推をとつて, 一様な渦動状態に際して渦擾速度の分布は Maxwell-Boltzmann 則に従つて居るであらうと推測される. 以下この見解を Townend¹⁾ 及 Simmon, Salter²⁾ の実験により確め, 吾々の統計理論によつて説明を試みて見る.

1933 年に H. C. H. Townend

は Schlieren Method に依つて風洞内の亂流に就いて渦擾速度の三成分の頻度曲線を測定した. 彼の使用した風洞は四面が硝子板で張られて居る四角なものである. 電気火花に依つて發生された微小の高温空氣の流動を Schlieren Method により撮映し, その移動を追跡することに依つて流體の場の任意の點に於ける渦動速度の三成分の頻度及び相關々係が研究されて居る. 實驗の結果によれば, 各成分に就いて頻度曲線は風洞の断面を通じて夫々正規誤差曲線によく一致して居る. 特に風洞の中心部に於ては各成分の平均自乗速度も殆んど互に相等しく, 且つ各成分間の相關係数は極めて小さいことが示されて居る. この結果は吾々の見解を力強く裏

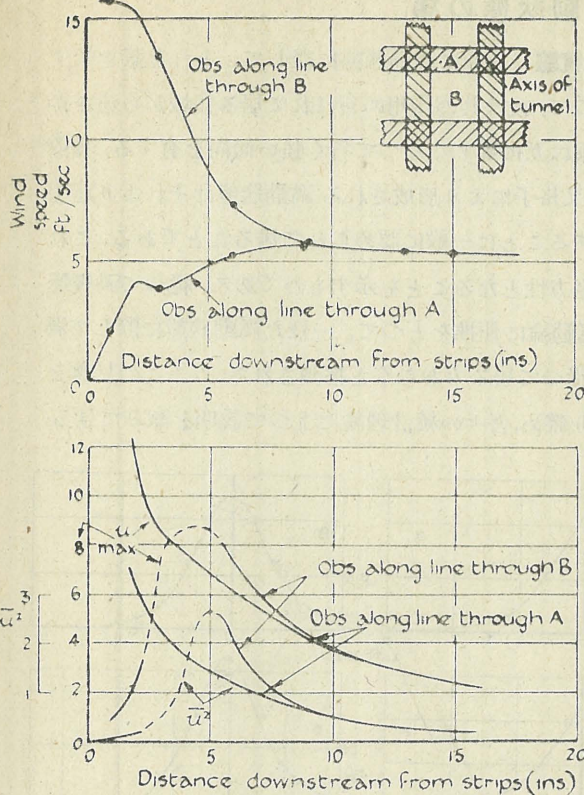


15-inch downstream of strips.

Free stream.

第一圖

1) Proc. Roy. Soc. A, 145 (1934) 180. 2) Ibid. 145 (1934) 212.



第 二 圖

一見して解る様に格子より遠去かるに従つて $F(u)$ は次第に正規誤差曲線に近付いて行く。(A) に就いて言へば、格子より二吋下流、即ち亂流が発生してから約 0.03 秒後に於ては $F(u)$ 曲線は著しい skewness を示して居るが、次第に減少し 9 吋下流、即ち 0.14 秒後に於ては殆んど正規誤差曲線になり、15 吋下流に於て其の一致は見事である (原論文 Fig. 22 参照)。他方流れの平均速度及渦擾速度の平均自乗も亦この傾向と全く並行して、始めは A 部、B 部に於て著しく異つて居るが、格子より 10 吋下流 (0.16 秒後) の近くにては全く一致し、渦動状態の場は一様に均されて仕舞ふ。この変化の様子は第二圖に示されて居る。

以上の結果は渦動状態の場が一様になること、渦擾速度分布が正規誤差曲線に一致すること、は全く並行的な現象であり、格子によつて発生された亂流に就いては極めて迅速にこの様な状態が達せられることを示して居る。

Simmon 及び Salter の結果は渦擾速度の流れの方向の成分のみに關するものであるが、Townend の結果と併せ考へるならば、格子に依つて惹き起された渦動状態は一定の状態即ち一様な場に収斂する強い傾向を有し、場が一様になると共に渦擾速度の分布も亦 Maxwell-

書きするものであるが、彼の測定は管の一つの横断面に就いて行はれたものであるため、如何にしてこのような状態が成立されるに到るかの過程を知るために吾々は更に L. F. G. Simmon 及び C. Salter の實驗結果を俟たねばならない。即ち彼等は熱線風測計を用ひ、風洞内におかれた格子により發生された渦動状態が格子を遠去かるに従つて次第に變化して行く様子を明かにしたのである。

使用された風洞は直徑一呎のもので、その中に幅 3 吋の帯で作られた一時の角格子をおき、これにより發生された亂流を帯の影の部分 (A) 及び角格子の中心線に沿ふ部分 (B) に就いて其の變化の様子が測定されて居る。便宜のために其の結果の一部を原論文より引用して第一、第二圖に示しておいた。

第一圖は格子の後方諸點に於ける渦擾速度 u の頻度曲線 $F(u)$ を示して居る。

Boltzmann 則に収斂して行くことが知られる。

§ 9. 扱て前節に述べた準定常な渦動状態が如何なる機構に依つて達せられるかをこゝに吟味して見る。この準定常状態は亂流が発生されてより僅かに 0.15 秒程度の後に達せられて居り、この様な急激な變化は粘性のみに依つては到底説明することが出来ない。従つて場が一樣に均されることは粘性と関係のない渦動状態それ自身に固有の機構に依つて説明されるべきであらう。

格子によつて發生された發生機の亂流には著しい斑があるが、この斑を均らす有力な機構で、而も斑自身に起因するものとして渦擾エネルギーの擴散が挙げられる。風洞の軸に直角の方向の速度成分を v 、格子の大きさを M とすると、第二圖に於ける格子の中心部 B と蔭の部分 A との間に行はれる渦擾エネルギーの傳達は、單位體積、單位時間に就いて $\frac{1}{2}\rho\bar{v}^3/M$ の程度で測られる。従つて a を三重相關係數とし、假に $\bar{v}^2 \sim (2 \text{ ft/sec})^2$ (第二圖参照)、 $M \sim 1''$ を用ふるならば、A 部に於けるエネルギーの増加は毎秒 $2400 \times a\%$ の程度となる。格子の直後に於て a は相當に大きいことが想像される。そこで $a=1$ とすれば、0.05 秒程度にて渦擾エネルギーは均されることになり、若し $a \sim \frac{1}{2}$ とすれば大體實驗の結果を説明することが出来る。Simmon, Salter の實驗に就いては A 部分の格子より 2 吋下流に於て $a \approx 0.6$ である。これは風洞軸の方向の渦擾速度成分に關するものであるが、軸に直角な方向に就いても相當大きな相關係数が想像されるので、假に同程度のものを假定するならば、大略現象を説明して居るものと考へられる。

この様にして一樣な渦動状態の場合は渦動そのものの機構に依つて到達し得られるのであるから、前節の結果も粘性の有無に拘らず成立する筈である。然しながらこの推論が主張されるためには、事實として準定常状態が成立してから後に於ても Maxwell-Boltzmann 則が成立して居るのであるから、この分布則が粘性に依つて亂されないことを確めなければならない。これは (I) に於て導いた確率函數 f に關する基礎方程式 (7.3) に依つて容易に確めることが出来る。

(7.3) に密度 ρ を乗じて、速度成分 $u^i (i=1, 2, 3)$ 以外の總ての量に就いて積分するならば、場が一樣であるとの假定のもとに、 u^i に關する確率函數 $f(u^i)$ に關して

$$\frac{\partial \bar{\rho}^p f(u^i)}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^j} \left\{ (\bar{\rho} \Phi^j)^p f(u^i) \right\} \quad (9.1)$$

を得る。茲に $\Phi^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} - \nu \nabla^2 u^i - \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} (\text{div } \mathbf{v})$ であつて、 $\bar{\rho}^p, \bar{\rho} \Phi^j$ は u^i を一定に保つた際の ρ 及び $\rho \Phi^i$ の部分平均値である。

扱てこれ等の部分平均値に對して最も簡單であり、而も合理的な近似値として回歸平面を採用するならば、等方性の假定のもとに吾々は

$$\bar{\rho}^p = \bar{\rho}, \quad (\bar{\rho} \Phi^j)^p = \bar{\rho} a(t) u^j \quad (9.2)$$

を得る。茲に $\bar{\rho}$ は平均密度であるが、その時間による變化は省略出来るものとする。又 $\alpha(t)$ は粘性による渦擾エネルギーの消失率を示し、 $\alpha(t) > 0$ である。

(9.2) を (9.1) に代入すれば

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha(t) \sum_j \frac{\partial}{\partial w^j} (w^j f) \quad (9.3)$$

となり、Maxwell-Boltzmann 則がこれを満して居ることは明かである。

§ 10. 統計理論による説明。渦擾速度の分布が実際に観測されるのは粘性流體に就いてであるが、粘性作用のない場合に於ても前節に述べた様に、これは Maxwell-Boltzmann 則に従つて居るものと考へられる。従つて一様な定常渦動状態に際してその統計理論的説明が望ましくなる。

考へて居る様な渦動状態に際して流體の流動状態が幾つかのパラメーターを持つた運動方程式の解で與へられるものと假定する。簡単に、流體の状態は速度と壓力だけで規定され、それに應じて適當に表示粒子 Q_k を選ぶことが出来たものとする。

扱て平均流動のない一様な定常状態の場に於て任意の二つの表示粒子 P_1, P_2 を取り出して見る。 P_1, P_2 は μ -空間内に夫々曲線 A, B を畫くが、場が一様であるから充分永い時間の間に A, B は全く同一形の領域を占めるに至るものと考へて差支へないであらう。従つて P_1, P_2 の平均のエネルギーは相等しく、流體系のエネルギーの平均値は一個の表示粒子のそれに比例する。若し巨視的條件 (7.1) として流體系の運動エネルギーが一定であることが與へられるならば、これは任意の一つの表示粒子を選んで

$$\sum_i [(iu)^2 + (iv)^2 + (iw)^2] = \text{一定} \quad (10.1)$$

にて表はされる。

前節までに於て取り扱つた風洞實驗に就いての一様な定常渦動状態に際して吾々は巨視的條件として (10.1) を採用することが出来るであらう。今一定の實驗裝置に就いて考へるならば、格子に依つて發生される亂流は風速に依つて定められ、従つて格子の充分後方に於ける渦擾エネルギーは風速に依つて定まるものと考へられる。これを逆に見て、一定の實驗裝置に際して、渦動状態が一様であると思はれる部分に於て渦動状態は渦擾エネルギーに依つて規定されるものと考へて差支へないであらう。従つてこの場合には (10.1) が成立し、吾々は最早パラメーター、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ に關する空間を考へるまでもなく直接 γ -空間内の、而も(總ての Q_k 粒子は互に獨立であり、 μ -空間内の同一形の領域内を變動することが出来るから)一個の Q 粒子に關する部分空間に就いて統計を行へば充分である(然しながらこの處理法が可能なるためには $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を含む解の存在を假定する必要がある)。

μ -空間を微小なる等容積の枠目に分割し、これ等に番號を付け、 N 回の試み中特定の表示粒子 Q_k が第一の枠目に入る回数を a_1 、第二の枠目に入るものを a_2 等とするならば、この配

列に對する r -空間内の容積は

$$\frac{N!}{a_1!a_2!a_3!\cdots}$$

に比例する. 従つて u, v, w の分布則として (10.1) の條件のもとに吾々は直ちに

$$f(u, v, w) = \frac{h^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{h^2}{2}(u^2+v^2+w^2)} \quad (10.2)$$

を得る. 茲に函數 f が x, y, z を含んで居ないことは, 表示粒子 Q_k は流體に許された空間内に一樣の確率を以つて存在し得ることを示して居る.

(10.2) は Q_k に關するものであり, 直ちに擾亂速度が Maxwell-Boltzmann 分布則に従つて居ることを示すものではないが, 今流體の場に微小容積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ を取るならば, この中に入り込んで來る粒子の速度は總て (10.2) の確率を持つて居る. 従つて流體の場内の任意の點に於ける速度分布は又この法則に従ふことが知られる.

(昭和 18 年 1 月)