

1 kW級 ホールスラスタにおける電子ドリフト不安定性の特性解析

山下, 裕也

九州大学大学院総合理工学府総合理工学専攻プラズマ・量子理工学メジャー

<https://hdl.handle.net/2324/6792855>

出版情報 : Kyushu University, 2022, 修士, 修士
バージョン :
権利関係 :



令和4年度
九州大学大学院 総合理工学府
総合理工学専攻
プラズマ・量子理工学メジャー

修士論文

論文名

1 kW 級ホールスラスタにおける
電子ドリフト不安定性の特性解析

氏 名

山下裕也

指導教員名

小菅佑輔 准教授

目次

1. 緒言	1
1.1. 研究背景	1
1.2. 研究目的	2
2. ホールスラスタ	4
2.1. 基本構造	4
2.1.1. 作動原理	4
2.1.2. 基本設計	5
2.1.3. ホールスラスタの種類	6
2.1.4. 放電電流振動・電子密度揺動	8
2.2. プラズマ揺動	10
2.2.1. 電子ドリフト不安定性	10
2.2.2. イオン音波	10
2.2.3. 混成波	11
2.2.4. 電子サイクロトロン高調波	12
2.2.5. 電子サイクロトロンドリフト不安定性	12
2.2.6. ドリフト波	13
2.2.7. 電離不安定性	14
3. 分散関係の導出	15
3.1. パラメータ	15
3.2. イオン密度揺動	17
3.3. 電子密度揺動	19
3.3.1. 速度分布関数揺動の導出	19
3.3.2. 電子密度揺動の導出	24
3.4. 分散関係の導出	26
4. 分散関係の解析	27
4.1. 近似解の導出	27
4.1.1. $\xi_n \gg 1$ の場合	28
4.1.2. $\xi_n \ll 1$ の場合	29
4.2. 数値解	31

4.3.	計算コードの開発	34
4.4.	計算コードの確認	34
4.5.	分散関係の計算	36
4.5.1.	パラメータ	36
4.5.2.	分散関係	36
4.5.3.	推進剤質量の依存性	38
4.6.	波数 k と周波数 ω の特定	40
4.6.1.	波数 k の特定	40
4.6.2.	周波数 ω の特定	41
4.7.	PIC シミュレーションとの比較	42
5.	結言	46
	参考文献	47
	謝辞	51
	付録 A : 計算に用いたパラメータ群	53
	付録 B : PLASMAPY のインストール手順	55
	付録 C : 計算コード	57

1. 緒言

1.1. 研究背景

1957 年 10 月 4 日, ソビエト連邦によって打ち上げられた人工衛星スプートニク 1 号によって人類の技術は宇宙に到達し, また 1961 年 4 月 12 日, ソビエト連邦の Y. A. Gagarin が人類で初めて宇宙に到達した. それ以降, 世界各国から様々な人工衛星やロケットが打ち上げられ, 今日に至るまで宇宙開発は加速の一途を辿っている.¹ 技術の発展に伴い, 宇宙開発の目的は天体観測のみに留まらず, 気象観測や GPS, 通信, また研究等多岐に渡るようになった.^{2,3} その結果, 人工衛星は様々な装置を搭載することとなり, その質量やサイズが大きくなる傾向にあるが, ロケットの打ち上げコストは今日でさえ非常に高価であり, コストを抑えより多くの衛星を打ち上げるためには, 装置の小型化がカギとなる. ここでいう装置とは太陽光パネルや各種アンテナ, また推進機等のことを指す. 本研究では推進機に焦点を当てる.

推進機の性能を評価する指標として, 以下の式で示す比推力 I_{sp} [s] がある.³

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (1.1.1)$$

ここで F [N] は推進機の推力, $\dot{m}$ [kg/s] は推進剤の質量流量, g [m/s²] は重力加速度である. 単位は秒である. 即ち, 単位質量の推進剤で単位推力を発生させ続けられる秒数を示し, 推進機の推進剤効率を示す. 従来手法である化学推進機は高推力を得ることができるが, I_{sp} が低い傾向にある (~ 450 s).⁴ そのため, 化学推進機を搭載した場合は推進剤質量がその装置の大半を占める. 例えば, NASA のスペースシャトルは大きく分けて 4 つの装置から構成されるが, そのうち 3 つは燃料タンクである. 地球の重力から脱出する, 即ち第二宇宙速度に到達するためには, 通常化学推進機が用いられる. 化学推進機は低推進剤効率であるが, 高推力が得られるため, ロケットに広く搭載されている. 人工衛星の場合でも, 静止軌道に到達するために, アポジモータと呼ばれる化学推進機が通常用いられるが, その推進剤質量は人工衛星の半分ほどを占めている.⁵

この問題の解決策として, 全電化衛星が注目を集めている.⁵⁻⁹ 全電化衛星は電気推進機のみを搭載し, 電力のみで動作する衛星のことである. 化学推進機が化学反

応による燃焼によって推力を得るのに対し、電気推進機は電力から推力を得る。その手法は電熱式、電磁式、静電式と様々である。¹⁰ 電気推進機の代表的なものに、アークジェット、レジストジェット、ホールスラスタ、MPD スラスタ、パルスプラズマスラスタ、イオンスラスタがある。電気推進機は高い比推力を実現できる(500 s ~ 10000 s)。^{3,5} 電気推進機は理論上、消費電力を上昇させればさせるほど推力を得られるが、宇宙での発電量やその使用可能量の小ささから、推力は化学推進より小さなものとなっている。イオンスラスタの場合、その推力は「1 円玉にかかる重力に等しい」と表現される程である。² 実際のところ、人工衛星は無重力下で作動されるため、低推力であること自体は問題でなく、数カ月から数年単位で作動させ続けることで、むしろ化学推進より少量の推進剤で同等の加速を達成できる。電気推進はその電力を増加させることでより推力を得ることができるが、前述の通り宇宙で使用できる電力には限りがあるため、単位電力あたりの推力を示す電力推力比 F/P [mN/kW] が重要な指標となる (ここで P は消費電力である)。³ 低比推力であることを理由に、電気推進では化学推進と比較して目標の軌道に収まるまでに長い時間を要する。静止軌道より低高度の領域にはヴァンアレン帯と呼ばれる、イオンと電子(宇宙線)の密度が高い領域がある。¹¹ 太陽光パネルや電子回路、各種センサー等は宇宙線からのダメージを受けるため、この領域の影響は無視できず、3 カ月以内に脱出することが好ましいとされている。そのためには 90 mN/kW 以上の電力推力比を実現させる必要があるとされている。ホールスラスタと MPD スラスタは比較的高推力で高比推力を実現しているが、MPD スラスタは原理上莫大な消費電力が必要となるため、未だ実用化されていない。³ よってホールスラスタが主推進器として注目を集めている。

1.2. 研究目的

前述の通り、ホールスラスタは電気推進機の中でも比較的低燃費かつ比較的高推力である。また、構造がイオンスラスタ等と比較して単純である。しかし、その原理は複雑で、未解明な点も多い。未解明な現象の一つにホールスラスタの放電電流振動を駆動するプラズマ不安定性の原理がある。^{12,13} 先行研究によって、理論やシミュレーションによって様々な現象が予測されているが、従来の実験方法では精度

の低さから実験検証が難しく、そのため放電電流振動の駆動原理は詳しく解明されていない。[14-18](#)

そこで本研究室の先行研究では、マイクロ波干渉計測機を用いて、ホールスラスト内部の電子密度揺動の様子をプラズマに非接触で観測することに世界で初めて成功した。これにより、理論やシミュレーションの実験検証の高精度化が図れるようになった。

本研究では、マイクロ波干渉計測機で観察された電子密度揺動とプラズマ揺動の同定をおこなうために、揺動の性質を調査するため電子ドリフト不安定性によって生じる摂動電場 $\tilde{E}$ によって摂動するイオンと電子の式を線形計算し、その摂動電場 $\tilde{E}$ の分散関係を求めた。まずは近似値から、ある極限で生じるプラズマ波を予測し、また密度揺動 $\tilde{n}$ とポテンシャル揺動 $\tilde{\phi}$ の応答も調査した。次に分散関係を近似なしで解くことによって実験検証に向けた解析や、シミュレーションとの比較検証を行った。

本論文は計 5 章で構成されている。第 2 章ではホールスラストと、先行研究で予測されているプラズマ現象について紹介している。第 3 章では電場摂動の分散関係を導出した。第 4 章では第 3 章で導出した分散関係の解析を行った。近似解を求めて極限で生じるプラズマ波を予測し、次に分散関係を近似せずに直接計算した。実験やシミュレーションによる検証を行うため、近似を行わずに計算できるコードを開発した。実験により計測できていない波数 k の仮定をし、周波数の範囲を特定した。最後に、PIC シミュレーションの結果との比較検証を行った。

2. ホールスラスタ

電気推進機の一つであるホールスラスタ(Hall thruster, Hall effect thruster,²⁰ closed drift thruster,²¹ etc...)は、1960年代にソビエト連邦の A. I. Morozov によって発明された。その形状によって大きく2種類に分けられ、スラスタの奥行がチャンネル幅より大きいものをマグネチックレイヤ型と呼び(Stationary Plasma Thruster, SPT とも呼ばれる)、またその逆をアノードレイヤ型と呼ぶ。ホールスラスタが最初に採用されたのは1971年12月29日にソビエト連邦から打ち上げられた METEOR-18 であり、その後もロシアを中心に世界各国様々な人工衛星に搭載されている。ホールスラスタは比較的高い比推力 I_{sp} (1000 s ~ 3000 s) と電力推力比 F/P (~ 60 mN/kW) を有し、またイオンスラスタが抱えるような空間電化制限則による推力の上限も存在しないため、主推進器としての利用を目指した研究や開発が行われている。

2.1 節ではホールスラスタの仕組みについて解説し、2.2 節ではホールスラスタで予測されるプラズマ現象の一部について解説する。

2.1. 基本構造

2.1.1. 作動原理

図 2.1 にホールスラスタの概略図を示す。ホールスラスタは円筒形状をしており、その一端に設置されたアノードと、スラスタ外部に設置されたホローカソードからなる電場 E が軸方向に、またスラスタ内外に設置されたコイルによる磁場 B が半径方向に印加されている。推進剤には通常キセノンガスが用いられる。推進剤はアノード側から供給され、電子との衝突で電離する。スラスタの軸方向の長さはイオンのラーマ半径より短く、電子のそれより長く設計されている。そのためイオンは磁場の影響を受けないとみなすことができ、電場に沿って加速・排出される。この反作用を推力として利用している。一方、衝突により生じた電子と、カソード側から引き出された電子は、磁場に捉えられてスラスタ周方向に $E \times B$ ドリフトする。このとき周方向に生じる電流はホール電流と呼ばれ、ホールスラスタの名称はここに由来する。磁場に捉えられた電子は軸方向電場 E を強化する役割がある。電子は最終的に中性粒子との衝突により運動エネルギーを得ることで磁場から外れ、アノードへと拡散すると考えられている。最後に、プラズマが準中性を保つよ

う、カソードから引き出される電子の一部は排出されたイオンと混ざる．イオンのみを排出すると電子が余り、装置全体が負に帯電してしまい、排出されたイオンが逆流するが、それを防ぐ役割がある．

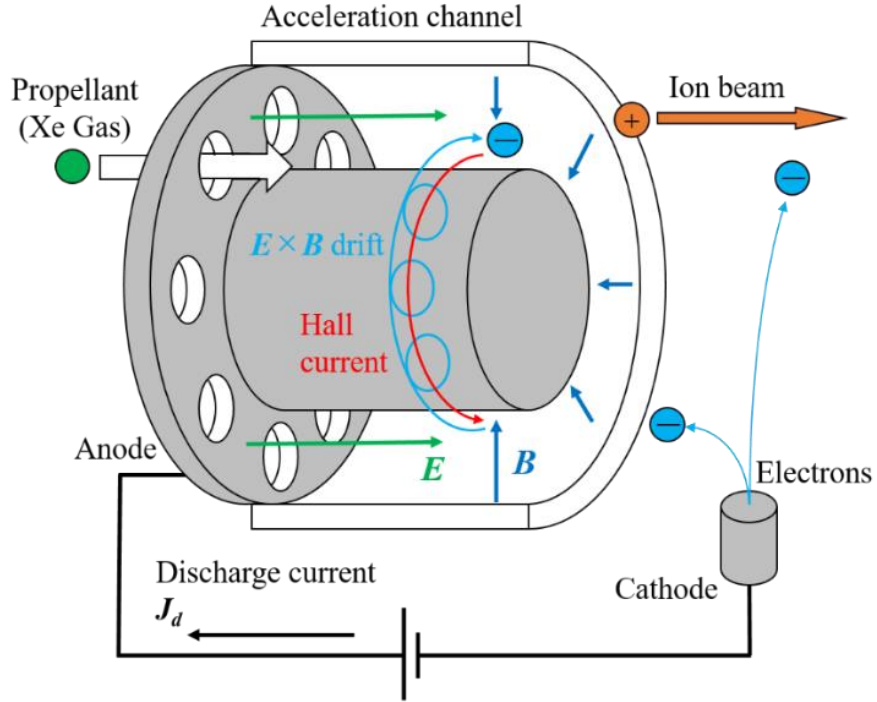


図 2.1 ホールスラスタの基本構造

2.1.2. 基本設計

ホールスラスタは、以下の条件を満たすように設計されている.³

$$\rho_e \ll L \ll \rho_i \quad (2.1.2.1)$$

$$\omega_{ce} \tau_e \gg 1 \quad (2.1.2.2)$$

$$L \ll \lambda_m \quad (2.1.2.3)$$

ここで ρ_e [m] と ρ_i [m] は電子とイオンのラーマ半径, L [m] はスラスタ長, ω_{ce} [rad/s] は電子のサイクロトロン角周波数, τ_e [s] は電子の衝突時間, λ_m [m] はイオンの平均自由行程である．それらについて以下で説明する．

式 (2.1.2.1) について、電子のみが閉じ込められるようにこのように設定されている． ρ_e と ρ_i は以下で定義される．

$$\rho_e = \frac{mv_e}{eB} \quad (2.1.2.4)$$

$$\rho_i = \frac{Mu_i}{eB} \quad (2.1.2.5)$$

ここで m [kg] と M [kg] は電子とイオンの質量, v_e [m/s] と u_i [m/s] は電子とイオンの速度, e [C] は粒子の電荷, B [T] は磁場である. 電子速度がマクスウェル型をしている場合, v_e は

$$v_e = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m}} \quad (2.1.2.6)$$

ここで k_B はボルツマン定数, T_e [eV] は電子温度である.

式 (2.1.2.2) はチャンネル内を電子が十分にドリフトする条件を示す. $\omega_{ce}\tau_e$ はホールパラメータと呼ばれ, 電子が一回衝突するまでの時間を示す. ω_{ce} は以下の式で定義される:

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \quad (2.1.2.7)$$

式 (2.1.2.3) はイオンが中性粒子と衝突せずに排出される条件を示す. λ_m は以下の式で定義される:

$$\lambda_m = \frac{1}{\sigma_i n_0} \quad (2.1.2.8)$$

ここで σ_i [m²] はイオンと中性粒子の衝突断面積, n_0 [m⁻³] はプラズマ密度である. プラズマの準中性条件より, n_0 とイオン, 電子密度 n_i , n_e は以下の関係にある.

$$n_0 = n_i = n_e \quad (2.1.2.9)$$

2.1.3. ホールスラスタの種類

今日に至るまで, 様々な種類のホールスラスタが開発されている. 代表的なものに, ロシアの Fakel 社が開発した SPT シリーズがある. また, ESA (European Space Agency) からは, 2003 年に SSP-1350-G ホールスラスタを採用した月周回衛星 SMART-1 (Small Mission for Advanced Research in Technology) がフランスから打ち上げられた.²³ 一方, 日本の JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) では, ホールスラスタを搭載した全電化衛星 ETS-9 (Engineering Test Satellite-9) の打ち上げを 2023 年に計画している.^{24,25} この衛星は, 海外の実績のあるホールスラスタを主推進器として採用し, 試験的にいくつかの国産ホールスラスタを搭載している. このように, ホールスラスタの実用化は現在の大きなトピックの一つである.

日本でもこれまでにホールスラスタの研究は盛んに行われているが, その主な目的は実用化よりもむしろホールスラスタの物理の解明や, 性能や設計の向上に重点

を置く傾向にある。²⁶ 図 2.2 に本研究室が所有する 1 kW 級ホールスラストを示す。このホールスラストは、以下で説明するマイクロ波干渉計測による電子密度揺動計測を行うために開発されたものである。寸法は $200\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 85\text{ mm}$ ，チャンネル外径は 91 mm ，内径は 61 mm ，チャンネル幅は 15 mm ，チャンネル長は 14 mm である。コイルはチャンネル内部に 1 つと外部に 4 つ設置しており、内外で逆向きの電流が流れるようになっている。図 2.3 に磁場分布を示す。(a)より，出口付近の磁場が強くなることが分かる。また，背面にはマイクロ波干渉計測機の導波管を挿入するための穴が 12 個空いている。

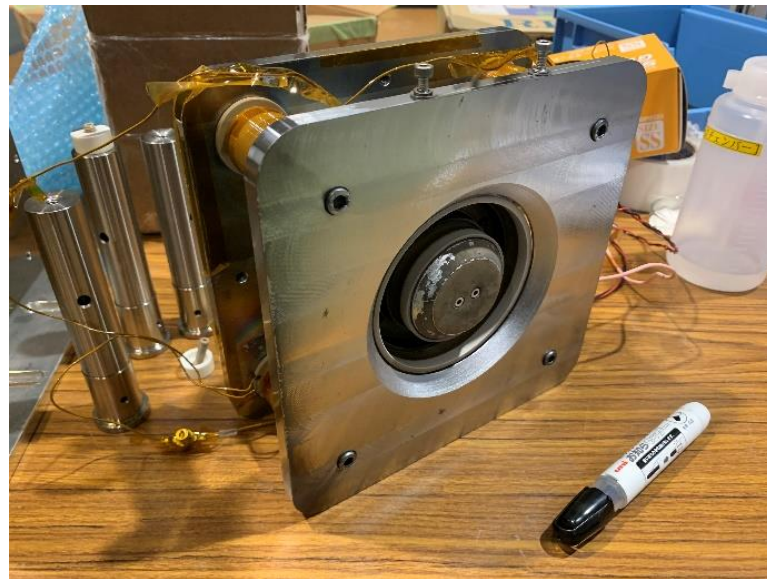


図 2.2. 1 kW 級ホールスラスト

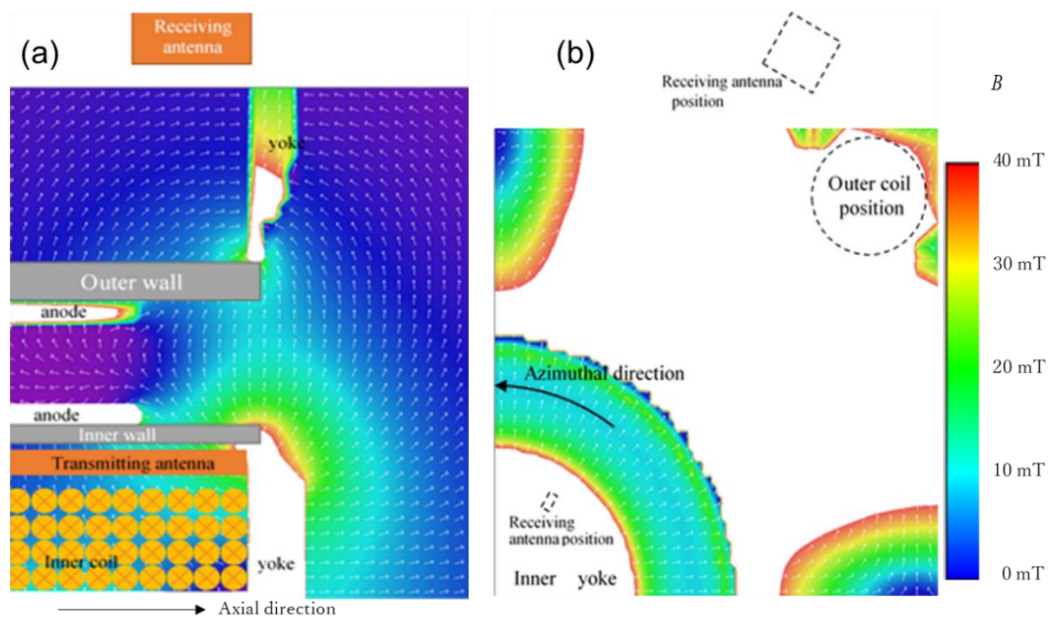


図 2.3. 1 kW 級ホールスラストの磁場形状. (a)周方向断面図(b)軸方向断面図

2.1.4. 放電電流振動・電子密度揺動

前述の通り、ホールスラストはシンプルな構造をしている。しかし、その物理はとても複雑であり、開発から 60 年以上経った現在でも完全には解明されていない。解明されていない現象の一つとして、プラズマ揺動から生じる放電電流振動がある。[12.24.27-29](#) この現象は、他の装置への電磁干渉や、性能や寿命への影響といった問題を生じさせる。[24.29](#)

このプラズマ現象を解明するために、これまで様々な計測が行われてきているが、プラズマの直接計測のためには、多くの場合 Langmuir プローブによる静電ポテンシャル計測が行われる。[31.32](#) しかし、この測定方法はプラズマ中に直接計測装置を挿入するため、装置が要因で少なからずともプラズマを攪乱してしまい、その測定結果は正確性に欠ける。そこで本研究の先行研究では、マイクロ波干渉計測法を用いてチャンネル内部の電子密度を計測する手法を開発した。[19.32](#) この手法はプラズマに非接触で計測できるため、従来の手法よりも信頼度が高い結果を得ることができた。図 2.4 にマイクロ波干渉計測のアンテナの配置図を示す。円の灰色部はホールスラストのチャンネルを下流側から見たものである。この計測では、マイクロ波のアンテナは排気面から 3 mm 上流側に設置している。図 2.5 にこの計測から得られた 1 kW 級ホールスラスト内部の電子密度揺動のフーリエ線図を示す。この図から、いくつかの揺動が存在することが確認できる(10^6 Hz 以降に現れているいくつかの直線状のピークはノイズである)。これらは先行研究により、プラズマ波によるものであるとされている。[12.27](#) しかし、本研究の 1 kW 級ホールスラストにおいて、どの周波数の揺動が何のプラズマ波であり、それらがどのようなプラズマ不安定性に由来するかは明らかになっていない。そこで本研究では、1 kW 級ホールスラストにおけるプラズマ揺動の同定を行うことを目的とした。その第一歩として、本研究では電子が電場に垂直に周方向ドリフトすることのみによって励起される不安定性である電子ドリフト不安定性の特性について調査することを目的とした。

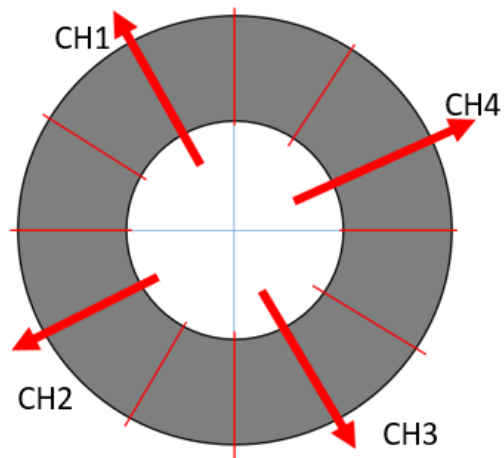


図 2.4. マイクロ波干渉計測の計測方向

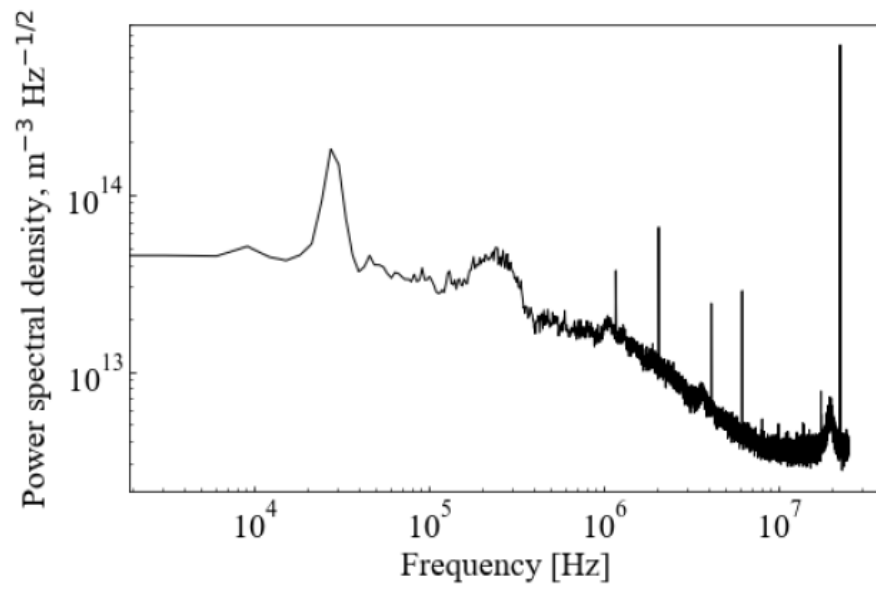


図 2.5. ホールスラスタ内部の電子揺動のフーリエ線図

2.2. プラズマ揺動

上記のとおり，ホールスラストのプラズマでは，様々な不安定性が予測されている．本節では，先行研究によって存在が予測されているホールスラストにおけるプラズマ不安定とプラズマ波の一部を紹介する．

2.2.1. 電子ドリフト不安定性

電子ドリフト不安定性 (Electron Drift Instability, EDI) は電子の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによって静電的に引き起こされる．以下にそのメカニズムを示す．

1. E_0 を横切って電子が $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトする(ホール電流)．
2. ホール電流を自由エネルギーとして様々なプラズマ波が励起される．

EDI によって生じるプラズマ波の候補は 2.2.2 節から 2.2.5 節で説明する．

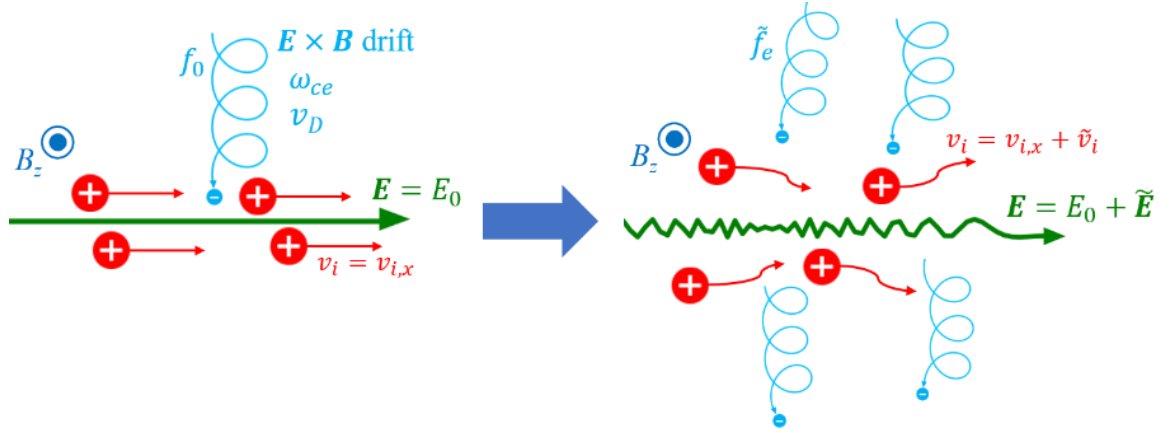


図 2.6. 電子ドリフト不安定性の簡略図

2.2.2. イオン音波

空気中を伝搬する音は，空気の分子同士の衝突によって伝搬する波であるが，プラズマ中では分子は電荷をもち，同じ電荷同士には斥力が生じる．イオン音波は，電場摂動がイオン間を非接触で，まるで空気中を伝搬する音のように伝搬するためこの名称がつけられている.²² イオンの振動は，その質量の大きさから振動の周波数は電子の波と比較し小さいと予測でき，プラズマ近似(式 (2.1.2.9))が適応できる．その場合の分散関係を示す．

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{M} \right)^{1/2} = c_s \quad (2.2.2.1)$$

また，プラズマ近似が成り立たない状況($n_i \neq n_e$)を仮定した場合，分散関係の導出にはポアソン方程式(式(3.4.1))を用いる．その場合のイオン音波の分散関係は，

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{k_B T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\gamma_i k_B T_i}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = c_s \quad (2.2.2.2)$$

ここで、 ω [rad/s] はイオン音波の周波数、 k [2 π /m] はイオン音波の波数、 γ_i はイオンの比熱比、 T_i [eV] はイオン温度、 c_s [m/s] はイオン音速、 λ_{De} [m] は電子のデバイ長である。中性粒子の場合、粒子の熱運動がゼロだと音波は発生しないが、イオン音波の場合は、式 (2.2.2.1), (2.2.2.2) より、 $T_i = 0$ eV の場合でも発生することが分かる。一方、 $T_e \lesssim T_i$ だと、イオンの熱速度 $u_{thi} = \sqrt{\gamma_i T_i / M}$ [m/s] がイオン音速 c_s に近づくため、ランダウ減衰(粒子と波の速度が近い場合、速い方のエネルギーが遅い方に吸収され、速い方の波は減衰、遅い方は成長する現象)によってイオン音波は減衰し、すぐに消滅してしまう。³³

ホールスラストにおいてはイオンの熱運動は小さく (0.1 eV 程度)、そのため本研究においては無視していることから T_i を含む項の影響は無視できるが、EDI によるイオン音波の成長が考えられる。電子が周方向に $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトすることによって電子の速度分布がシフトする。この状況でイオン音波と電子が共鳴し、ランダウ減衰と逆の機構でイオン音波がエネルギーを受け取ることで波が成長していると考えられる。

2.2.3. 混成波

混成波は、波と磁場が完全に垂直であるときに生じる共鳴であり、その周波数で 2 つに分けられる。³⁴ 一方は高域混成波と呼ばれる静電波で、以下の分散関係で表される。²²

$$\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \quad (2.2.5.1)$$

式から、電子のプラズマ周波数とサイクロトロン周波数の共鳴であることが分かる。この波の概要図を図 2.8 に示す。上記の説明の通り、プラズマに密度勾配がある場合、密な領域から疎な領域の方向へ電場が生じる。これにより生じるローレンツ力により、電子のラーマ運動は楕円軌道を描く。この場合、電子には密度を均衡させようと生じる力(プラズマ振動の復元力)と、ラーマ運動のローレンツ力が働く。そのため、式 (2.2.1.1) の $\omega_{pe} = 0$ rad/s とした場合はローレンツ力のみが残り、単にサイクロトロン周波数となる。また $\omega_{ce} = 0$ rad/s とした場合も復元力のみ残るので、単にプラズマ振動となる。

もう一方の共鳴を低域混成波と呼び、以下の分散関係がある。²²

$$\omega_{\text{LH}} = \sqrt{\omega_{\text{ci}}^2 \omega_{\text{ce}}^2} \quad (2.2.5.2)$$

式より，イオンと電子のサイクロトロン周波数の共鳴であることが分かる．これらの混成波は，電子のラーマ半径と慣性力の小ささから，磁場と波が完全に 90° でないと発生しないため，観測は難しいとされているが，核融合プラズマでは，これを生じさせることでイオンを高効率で加熱できる研究も行われている^{35,36}

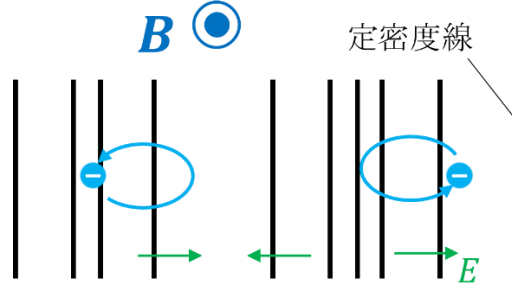


図 2.8 高域混成波による電子の運動

2.2.4. 電子サイクロトロン高調波

電子サイクロトロン高調波は別名 Bernstein 波 (電子サイクロトロン共鳴, ECR とも) と呼ばれ，その名の通り電子サイクロトロン周波数の整数倍の周波数 $n\omega_{\text{ce}}$ に現れる静電波である^{22,37} この波は様々な性質を有しており，上記の混成波も含まれる．サイクロトロン運動に起因するので，波は磁場と垂直に減衰を受けずに伝搬し，逆に垂直でない場合は速やかに減衰する．また，カットオフ密度(波が伝搬しなくなる密度の条件)が存在しないことから，どんな電子密度でも伝搬すると言われており，また低温プラズマ ($\sim 10 \text{ eV}$) の過熱も可能であるとされている³⁸ そのため高温である必要がある核融合プラズマでは，電子サイクロトロン共鳴加熱(ECRH) と呼ばれるプラズマ過熱方法があり， ω_{ce} の整数倍の周波数の電磁波を入射することで ECR を発生させ，電子を加熱することで間接的にイオンを加熱し，プラズマの温度を上昇させる³⁹ ECRH は，電磁波のアンテナとプラズマとの距離を置けること，また局所的な加熱が可能なことが長所である．ホールスラスタでは半径方向に磁場が印加されており，電子は十分なラーマ運動を行う設計であることから，Bernstein 波はスラスタ軸方向もしくは周方向に発生していると考えられる．

2.2.5. 電子サイクロトロンドリフト不安定性

ホールスラスタにおいて，EDI で生じる不安定性のひとつとして電子サイクロトロンドリフト不安定性(ECDI)がある^{15,16,40-43} 宇宙空間における無衝突衝撃波面でも観測されており，磁力線を横切るイオンビームによってサイクロトロン高調波が

励起され、そのため磁場と垂直に伝搬する静電波である．この不安定性は磁場に垂直な電子の過熱に寄与する．

2.2.6. ドリフト波

ある空間に閉じ込められているプラズマは熱的平衡状態になることはなく、その密度勾配により常に不安定性が存在する．これをユニバーサル不安定性という．その一つがドリフト波、もしくはドリフト不安定性と呼ばれる^{22,44} 図 2.7 にドリフト波が伝搬する様子を示す． z 軸方向に示す磁場と、 x 軸と並行に密度勾配がある状況を考える^{44,45}

1. 密度勾配を均衡しようとする
2. その質量を理由に、イオンよりも電子の方が疎の領域に速く移動する(ボルツマン関係)．すると、正のポテンシャルと負のポテンシャルの領域ができるので、電場が生じる．
3. イオンと電子は磁場と電場によりドリフトする．イオンの電場方向への移動と、電子の慣性により、初期状態とはずれた場所に密度勾配が生じる．
4. 再びポテンシャルの集中による電場が発生する

上記のプロセスを繰り返すことで、ドリフト波は y 軸方向へと伝搬する．このように、ドリフト波は小さな密度勾配からでも励起され、磁場とは垂直方向に伝搬する静電波である．ホールスラスタにおいては、排出方向に生じる密度勾配が起因してこの波が形成される可能性がある．

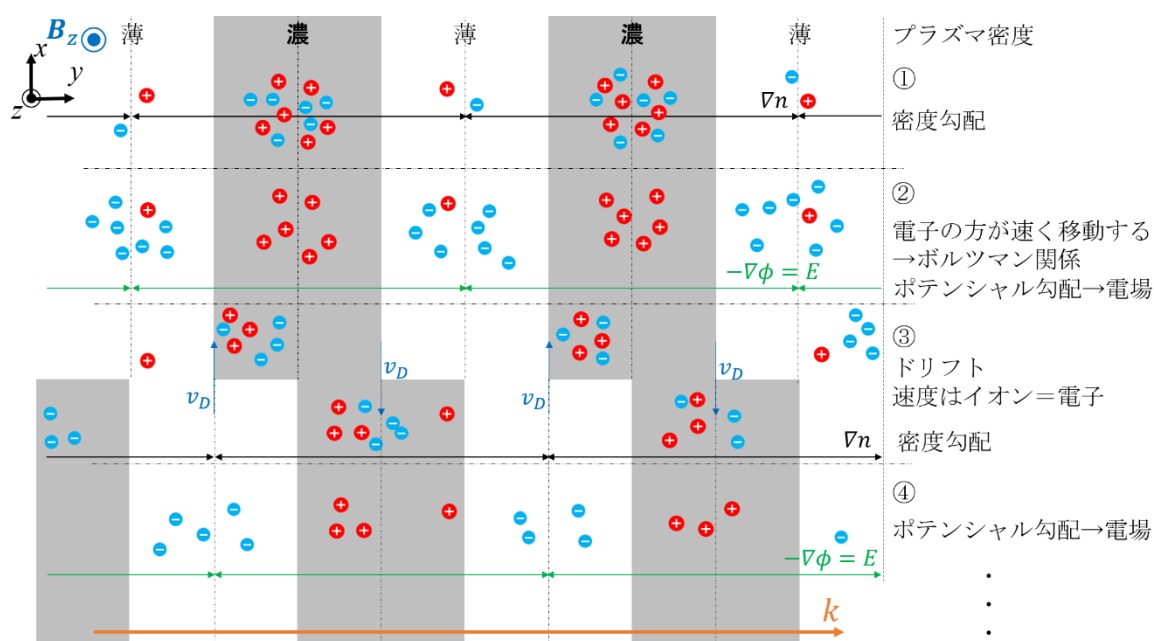


図 2.7 ドリフト波が励起される様子

2.2.7. 電離不安定性

最後に、ホールスラストのプラズマ揺動で一番振幅が大きいとされている、電離不安定性を紹介する。[29,46](#) この不安定性は、衝突により電離し、イオンが電場に沿って動くプラズマに発生する。ホールスラストにおけるこの不安定性の原理を図 2.9 と以下に示す。

1. 中性粒子は電子との衝突により電離し、イオンは電場によって排出される。
2. 電離が進むと、閉じ込められる電子も増えるので、中性粒子-電子の衝突周波数が増加、結果 1 と比較してプラズマ密度が上昇、中性粒子密度は減少する。
3. 電子が増えると電場が強化され、イオンの排出速度も増加する。推進剤流量が一定だとイオンの粒子数も一定であるため、結果イオン密度が減少、またプラズマは準中性を保つ傾向にあるので、電子も同時に拡散し、つまりプラズマ密度が減少する。
4. 閉じ込められた電子が減少するため、電離の周期も低下し、中性粒子密度が増加する。
5. 徐々に電離が進み、1 に戻る

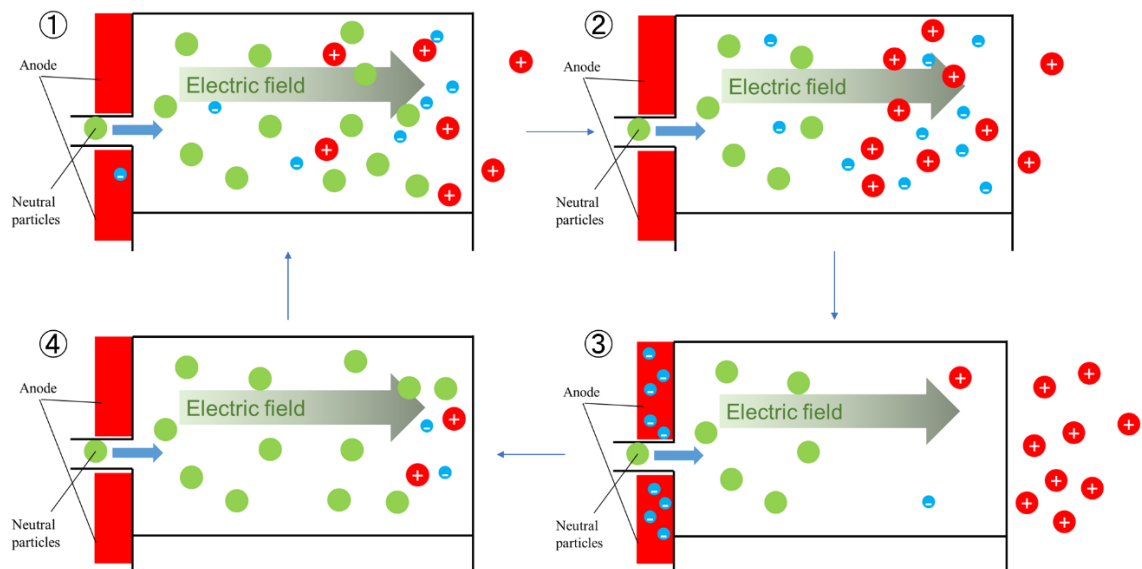


図 2.9 ホールスラストにおける電離不安定性のプロセス

3. 分散関係の導出

本章では, EDI の分散関係を導出した. 計算の流れを説明する. まず, 電子の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによって生じる摂動電場 $\tilde{\mathbf{E}}$ が存在する環境を考慮する. そこに印加電場 $\mathbf{E}$ で排出されるイオンと, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトする電子が $\tilde{\mathbf{E}}$ によって摂動されると考える. つまり, イオン密度揺動 $\tilde{n}_i$ と電子密度揺動 $\tilde{n}_e$ が生じる. 電荷を持つ粒子の揺動が生じると, それらによる摂動電場 $\tilde{\mathbf{E}}$ が生じる. このように, 自ら与えた影響が自分に返ってくる場のことを自己無撞着場と呼ぶ.

3.1 節では計算の条件とパラメータを述べる. 値は本研究室の先行研究の実験の実験のパラメータを用いた. 3.2 節ではイオン密度揺動 $\tilde{n}_i$ を導出した. 導出には 2 つの流体方程式を用いた. 3.3 節では, 電子密度揺動 $\tilde{n}_e$ を導出した. 電子は定常状態でマクスウェル型の速度分布 f_0 を持つと仮定し, その運動を, Vlasov 方程式を用いて表し, 速度分布揺動 $\tilde{f}_e$ を導出, それを速度積分することで密度揺動を導出した. 3.4 節では, ポアソン方程式を用いて, 密度揺動から分散関係を導いた.

3.1. パラメータ

図 3.1 に計算に用いた座標系を示す. x 軸方向に印加電場 $\mathbf{E}$, z 軸方向に印加磁場 $\mathbf{B}$ が一様に存在するものとし, 結果周方向に取った y 軸と反対方向に電子が一定速度 $\mathbf{v}_D$ で $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトしているとした. ここで, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度 $\mathbf{v}_D$ は, 密度勾配や磁場勾配等, その他の要因から生じるドリフト速度よりも十分に大きなものとした. これらの条件は一様であると仮定し, また一方にのみ方向を持つとした. そのため, 定常プラズマでは以下のようになる.

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z} \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{v}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{y} \quad (3.1.3)$$

$$n(x, y, z) = n_0 \quad (3.1.4)$$

表 3.1 に計算に用いたパラメータを示す. ここで, L_x と L_z はそれぞれアノードから排気面までの長さ, 半径方向のチャンネル幅, また V_D は放電電圧である ($E = V_D/L_x$). n_0 はプラズマ密度である. プラズマ近似を用いると, $n_0 = n_i = n_e$ と

仮定できる.²² T_e は電子温度である. n_0 は実験からおおよそ仮定した値であり, T_e はホールスラストにおける典型的な値を用いた. その他の値は実際の実験パラメータを用いている. 実際には電場や磁場, 密度などは空間勾配を持つが, ここではその影響を考慮しないため, 平均した値を用いている. また, 推進剤には Xe ガスを用いている. 表 3.1.2 は表 3.1.1 と物理定数から算出した各周波数である. ここで, f_{ci} と f_{ce} はそれぞれイオンと電子のサイクロトロン周波数, f_{pi} と f_{pe} はイオンと電子のプラズマ周波数である. より詳細なパラメータは付録 A に記載している.

EDI の周波数は図 2.5 の範囲内に収まっていると仮定すると, f_{ci} はそれより小さく, また f_{ce} は大きくなる. つまり, イオンはサイクロトロン運動の周波数よりも電場摂動の周波数の方が小さくなるため非磁化, また電子は電場摂動の周波数よりもサイクロトロン運動の周波数の方が小さくなるため磁化されているとして扱う. また, イオンは印加電場による速度のみ持つと仮定した場合, 温度 $T_i = 0$ eV を仮定できる(冷たいイオン). また, 粒子同士の衝突は考慮しない.

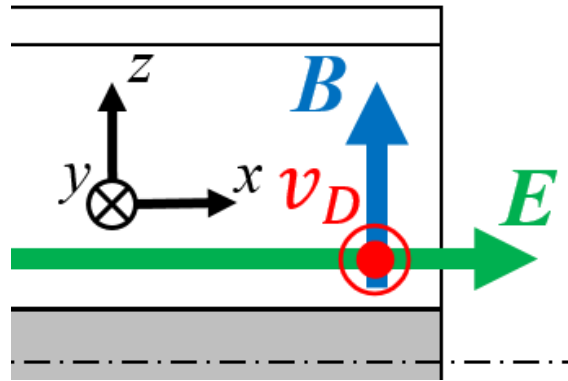


図 3.1. 計算に用いた座標系

表3.1 計算に用いた実験パラメータ

L_x [mm]	L_z [mm]	B_0 [mT]	V_D [V]	E [V/m]	n_0 [m ⁻³]	T_e [eV]
14	15	20	300	21430	1×10^{18}	20

表 3.2 表 3.1 から算出したプラズマの各周波数パラメータ

f_{ci} [kHz]	f_{ce} [MHz]	f_{pi} [MHz]	f_{pe} [GHz]
2.3	560	18	9.0

3.2. イオン密度揺動

最初に、イオンの運動を考える．上記の通りイオンの温度を考慮しないことから、流体である仮定すると、運動方程式は以下ようになる．

$$Mn_i \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right] = en_i \mathbf{E} \quad (3.2.1)$$

ここで M はイオン質量， $\mathbf{u}_i$ はイオン速度ベクトル， e はイオン電荷である(ここでは1価のイオンを仮定する)．電場はポアソン方程式 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で表される．ここで ϕ は静電場ポテンシャルである．この関係を用いて式 (3.2.1) を整理すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = \frac{e}{M} (-\nabla\phi) \quad (3.2.2)$$

印加電場 $\mathbf{E}$ は x 方向のみの成分であるため， $\mathbf{u}_i$ も x 方向のみの成分を持つ．そのため、式 (3.2.2) の第二項は

$$(\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = u_{i,x} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} + u_{i,y} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial y} + u_{i,z} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial z} = u_{i,x} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} \quad (3.2.3)$$

よって式 (3.2.2) を整理すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{i,x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u}_i = -\frac{e}{M} \nabla\phi \quad (3.2.4)$$

ここで、線形化を適用する．線形化は近似法の一つであり、ある物理量が定常な項と、微小に摂動する項から構成される場合、微小量の2乗以上の項は、定数項と比べて十分に小さいため、無視できるという考え方である.²² 即ち、ある物理量 $\mathbf{g}$ が定常項 $\mathbf{g}_0$ と微小摂動項 $\tilde{\mathbf{g}}$ から構成され、 $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \tilde{\mathbf{g}}$ の関係にあり、また $\mathbf{g}_0 \gg \tilde{\mathbf{g}}$ である場合、 $\tilde{\mathbf{g}}^2, \tilde{\mathbf{g}}^3 \dots \simeq 0$ とでき、 $\tilde{\mathbf{g}}$ をフーリエ展開すると、時間勾配 $\partial/\partial t$ と空間勾配 ∇ はそれぞれ $-i\omega$ と ik に置き換えることができる．ここで ω [rad/s] は摂動の周波数、 k [2π/m] は不安定性の波数である($k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$)．線形化するために、速度と電場を以下のように置き換える．

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i,0} + \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}} = (-\nabla\phi_0) + (-\nabla\tilde{\phi}) \quad (3.2.6)$$

ここで、添え字 $\sim$ は摂動項を表す．すると式 (3.2.4) は次のように書き換えることができる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{i,x} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\mathbf{u}_{i,0} + \tilde{\mathbf{u}}_i) = -\frac{e}{M} \nabla\tilde{\phi} \quad (3.2.7)$$

$\mathbf{u}_{i,0}$ は定常であるため、時間変化せず、また空間勾配を持たない。そのため、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{i,x} \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{\mathbf{u}}_i = -\frac{e}{M} \nabla \tilde{\phi} \quad (3.2.8)$$

微分項を線形化してフーリエ展開することによって、

$$(-i\omega + ik_x u_{i,x}) \tilde{\mathbf{u}}_i = -i \frac{e}{M} k \tilde{\phi} \quad (3.2.9)$$

次に、連続の式を用いる。

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (3.2.10)$$

ここで、第二項は

$$\nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \cdot \nabla n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.2.11)$$

よって式 (3.2.10) は

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (3.2.12)$$

ここで、密度と速度は以下のようにおける。

$$n_i = n_0 + \tilde{n}_i \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i,0} + \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.14)$$

よって式 (3.2.12) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_0 + \tilde{n}_i) + (\mathbf{u}_{i,0} + \tilde{\mathbf{u}}_i) \cdot \nabla (n_0 + \tilde{n}_i) + (n_0 + \tilde{n}_i) \nabla \cdot (\mathbf{u}_{i,0} + \tilde{\mathbf{u}}_i) = 0 \quad (3.2.15)$$

$n_0, \mathbf{u}_{i,0}$ は時間・空間変化しない。そのため、式 (3.2.15) は

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_{i,0} \cdot \nabla \tilde{n}_i + n_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i = 0 \quad (3.2.16)$$

$\mathbf{u}_{i,0}$ は x 成分のみを持つ。線形化し、整理すると、

$$(-i\omega + ik_x u_{i,x}) \tilde{n}_i + n_0 i k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i = 0 \quad (3.2.17)$$

式 (3.1.17) を式 (3.2.9) に代入し整理することで、以下の密度揺動が求まる。

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \frac{k^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} \frac{e \tilde{\phi}}{M} \quad (3.2.18)$$

ここで、 $c_s^2 = T_e/M$, c_s はイオン音速である。そのため式 (3.2.19) を書き換え、最終的なイオン密度揺動は以下ようになる。

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \frac{c_s^2 k^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \quad (3.2.19)$$

3.3. 電子密度揺動

3.3.1. 速度分布関数揺動の導出

平衡状態の電子の速度分布が、電子温度 T_e を持つマクスウェル分布であると仮定する.

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m}{2T_e} v'^2 \right] \quad (3.3.1)$$

ここで m は電子質量, $\mathbf{v}$ は電子の速度ベクトルである. 電子が摂動状態のとき, 電子の速度分布 f_e は Vlasov 方程式で表される.

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3.3.2)$$

ここで f_e と $\mathbf{E}$ は以下のように表すことができる

$$f_e = f_0 + \tilde{f}_e \quad (3.3.3)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}} \quad (3.3.4)$$

f_0 は定常であるため, 空間・時間変化しない. そのため, 式 (3.3.2) を整理すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla - \frac{e}{m} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \tilde{f}_e = \frac{e}{m} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.3.5)$$

よって速度分布関数揺動 $\tilde{f}_e$ は右辺を時間積分することで求まる.

$$\tilde{f}_e = \int_{-\infty}^t \left[\frac{e}{m} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} \right] dt' = \int_{-\infty}^t \left[\frac{e}{m} (-i\tilde{\phi}k) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} \right] dt' \quad (3.3.6)$$

$\tilde{\mathbf{E}}$ は $\tilde{\mathbf{x}}'$ と t' の関数 $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}}', t')$ であり, また添え字 ' は運動前の状態を表す. 即ち, $(x', v', t') \rightarrow (x, v, t)$ である. ここからは $\tilde{f}_e$ を求めるため, 式 (3.3.6) を解いていく.

まず, $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}}', t')$ について考える. この $\mathbf{x}$ は以下で定義される.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.3.7)$$

そのため, まずは速度ベクトル $\mathbf{v}$ から調査する. $\mathbf{v}$ を時間微分することで, 電子の運動方程式を得る.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (3.3.8)$$

この動作を行う前の運動方程式は,

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{e}{m}[\mathbf{v}' \times \mathbf{B}] \quad (3.3.9)$$

$\mathbf{B}$ で外積を行うと, 各ベクトルの値は,

$$\frac{dv'_x}{dt'} = -\frac{eB}{m}v'_{c,y} \quad (3.3.10)$$

$$\frac{dv'_{c,y}}{dt'} = \frac{eB}{m}v'_x \quad (3.3.11)$$

$$\frac{dv'_z}{dt'} = 0 \quad (3.3.12)$$

ここで, $v'_y = v_D + v_c$ であり, v_c はサイクロトロン運動の速度である. (v_x もサイクロトロン運動の速度である). 磁場は z 方向に印加されているため, 式 (3.3.12) は時間変化しない. よって,

$$v'_z(t') = v_z \quad (3.3.13)$$

式 (3.3.10) と式 (3.3.11) を 2 階微分すると,

$$\frac{d^2v'_x}{dt'^2} = -\frac{eB}{m}\frac{dv'_{c,y}}{dt'} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v'_x = -\omega_{ce}^2 v'_x \quad (3.3.14)$$

$$\frac{d^2v'_{c,y}}{dt'^2} = \frac{eB}{m}\frac{dv'_x}{dt'} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v'_{c,y} = -\omega_{ce}^2 v'_{c,y} \quad (3.3.15)$$

ω_{ce} は電子のサイクロトロン角周波数である. 2 階微分方程式を解くと,

$$v'_x(t') = A \cos \omega_{ce}t' + B \sin \omega_{ce}t' \quad (3.3.16)$$

$$v'_{c,y}(t') = A \cos \omega_{ce}t' - B \sin \omega_{ce}t' \quad (3.3.17)$$

A, B は定数である. ここで, 速度を以下のように定義する.

$$v'_x = v_\perp \cos \theta \quad (3.3.18)$$

$$v'_{c,y} = v_\perp \sin \theta \quad (3.3.19)$$

θ は v'_x と $v'_{c,y}$ がなす角度である. 式 (3.3.16) と式 (3.3.17) を書き直すと,

$$v_\perp \cos \theta = A \cos \omega_{ce}t + B \sin \omega_{ce}t \quad (3.3.20)$$

$$v_\perp \sin \theta = A \cos \omega_{ce}t - B \sin \omega_{ce}t \quad (3.3.21)$$

また, 定数 A, B が求まる.

$$A = v_\perp (\cos \theta \cos \omega_{ce}t + \sin \theta \sin \omega_{ce}t) \quad (3.3.22)$$

$$B = v_\perp (\cos \theta \sin \omega_{ce}t - \sin \theta \cos \omega_{ce}t) \quad (3.3.23)$$

式 (3.3.22) と式 (3.3.23) を式 (3.3.16) と式 (3.3.17) に代入し整理すると,

$$v'_x(t') = v_\perp \cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} \quad (3.3.24)$$

$$v'_y(t') = v_D + u_\perp \sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} \quad (3.3.25)$$

ここまでで求めた速度を式 (3.3.7) に従って時間積分すると、変位が求まる。

$$z(t') = z + v_z(t' - t) \quad (3.3.26)$$

$$\begin{aligned} x(t') &= \int_t^{t'} v'_x(t') dt \\ &= v_\perp \int_t^{t'} \cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} dt \\ &= \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} [\sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} - \sin \theta] + x \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

$$\begin{aligned} y(t') &= \int_t^{t'} v'_y(t') dt \\ &= \int_t^{t'} [v_D + u_\perp \sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\}] dt \\ &= v_D(t' - t) - \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} [\cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} - \sin \theta] + y \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

次に、式 (3.3.6) の $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}'$ の項について考える。 f_0 は式 (3.3.1) で定義される通りである。 $\mathbf{v}$ は2つの項に分けることができる。

$$\mathbf{v}^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2 \quad (3.3.29)$$

よって式 (3.3.1) は以下のように書き換えることができる。

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m}{2T_e} (v_\perp^2 + v_\parallel^2) \right] \quad (3.3.30)$$

そのため、式 (3.3.6) の微分項は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial v_\parallel}{\partial \mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial v_\perp}{\partial \mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \quad (3.3.31)$$

右辺の第一項は、

$$\frac{\partial v_\parallel}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{\partial v_z}{\partial \mathbf{v}'} = \hat{z} \quad (3.3.32)$$

また $\mathbf{v}_\perp$ は、

$$v_x'^2 + (v_y' - v_D)^2 = v_\perp^2 \quad (3.3.33)$$

式 (3.3.33) を v_x' と v_y' で偏微分することで、以下の式を得る。

$$2v_x' = 2v_\perp \frac{\partial v_\perp}{\partial v_x'} \quad (3.3.34)$$

$$2(v'_y - v_D) = 2v_\perp \frac{\partial v_\perp}{\partial v'_y} \quad (3.3.35)$$

式 (3.3.27) と式 (3.3.28) を式 (3.3.34) と式 (3.3.35) に代入すると,

$$\frac{\partial v_\perp}{\partial v'_x} = \frac{v'_x}{v_\perp} = \cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} \quad (3.3.36)$$

$$\frac{\partial v_\perp}{\partial v'_y} = \sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} \quad (3.3.37)$$

また,

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} = -\frac{mv_\perp}{T_e} f_0 \quad (3.3.38)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} = -\frac{mv_\parallel}{T_e} f_0 \quad (3.3.39)$$

波数を以下のように定義する.

$$k_x = k_\perp \cos \psi \quad (3.3.40)$$

$$k_y = k_\perp \sin \psi \quad (3.3.41)$$

ここで ψ は k_x と k_y がなす角である.

以上で式 (3.3.6) を解く準備が整った. 式 (3.3.31) を式 (3.3.6) の一部に代入すると,

$$\begin{aligned} k \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} f_0 &= k \cdot \left(\frac{\partial v_\parallel}{\partial \mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial v_\perp}{\partial \mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \right) f_0 \\ &= k_z \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + k_\perp (\cos \psi \cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} + \sin \psi \sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\}) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \\ &= k_z \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + k_\perp \cos\{\theta - \psi + \omega_{ce}(t' - t)\} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

揺動成分はある物理量 $\tilde{g}$ を用いると, 次のように表すことができる.

$$\tilde{g} = \tilde{g}_{k\omega} e^{ikx' - i\omega t'} \quad (3.3.43)$$

これを用いて式 (3.3.42) を式 (3.3.6) に代入すると,

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_e &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{e}{m} (-i\tilde{\phi}) k \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right] dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{e}{m} (-i\tilde{\phi}_{k\omega} e^{ikx' - i\omega t'}) \left[k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + k_\perp \cos\{\theta - \psi + \omega_{ce}(t' - t)\} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] dt' \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

また, 式 (3.3.26) と式 (3.3.27), 式 (3.3.28) を用いることで, $k\mathbf{x}'$ を以下のように表すことができる.

$$k \cdot \mathbf{x}' = k_x x' + k_y y' + k_z z'$$

$$\begin{aligned}
&= k_x \left(\frac{v_\perp}{\omega_{ce}} [\sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} - \sin\theta] + x \right) \\
&\quad + k_y \left(v_D(t' - t) - \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} [\cos\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} - \cos\theta] + y \right) \\
&\quad + k_z (z + v_z(t' - t)) \\
&= k_\perp \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} [\sin\{\theta + \omega_{ce}(t' - t)\} - \sin(\theta - \psi)] + k_y v_D(t' - t) + k_z v_z(t' - t) + kx \quad (3.3.45)
\end{aligned}$$

時間成分を以下のように置き替える.

$$t' - t = \tau \quad (3.3.46)$$

すると式 (3.3.44) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_e &= \int_{-\infty}^0 \frac{e}{m} (-i\tilde{\phi}_{k\omega}) e^{ik_\perp \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} \{\sin(\theta - \psi + \omega_{ce}\tau) - \sin(\theta - \psi)\} + ik_y v_D \tau + ik_z v_z \tau + ikx - i\omega\tau - i\omega t} \left[k_z \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right. \\
&\quad \left. + k_\perp \cos(\theta - \psi + \omega_{ce}\tau) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] d\tau \\
&= -i\tilde{\phi}_{k\omega} \frac{e}{m} e^{i(kx - \omega t)} \left[\int_{-\infty}^0 e^{ik_\perp \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} \{\sin(\theta - \psi + \omega_{ce}\tau) - \sin(\theta - \psi)\}} e^{-i(\omega - k_y v_D - k_z v_z)\tau} \right. \\
&\quad \left. \times \left(k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} + \frac{\omega - k_y v_D - k_z v_z}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right) d\tau + \frac{1}{i} \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] \quad (3.3.47)
\end{aligned}$$

式 (3.3.43) に従って $e^{i(kx - \omega t)}$ を外すと,

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_{e,k\omega} \\
&= -i\tilde{\phi}_{k\omega} \frac{e}{m} \times \frac{1}{i} \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} - i\tilde{\phi}_{k\omega} \frac{e}{m} \left[\int_{-\infty}^0 e^{ik_\perp \frac{v_\perp}{\omega_{ce}} \{\sin(\theta - \psi + \omega_{ce}\tau) - \sin(\theta - \psi)\}} e^{-i(\omega - k_y v_D - k_z v_z)\tau} \right. \\
&\quad \left. \times \left(k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} + \frac{\omega - k_y v_D - k_z v_z}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right) d\tau \right] \quad (3.3.48)
\end{aligned}$$

ここで, 次の関係式を用いる.

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_l J_l(z) e^{il\varphi} \quad (3.3.49)$$

すると式 (3.3.48) は以下のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}_{e,k\omega} \\
&= \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} f_0 \\
&- i\tilde{\phi}_{k\omega} \frac{e}{m} \int_{-\infty}^0 \sum_{n_1} J_{n_1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) e^{in_1(\theta-\psi+\omega_{ce}\tau)} \sum_{n_2} J_{n_2} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) e^{in_2(\theta-\psi)} e^{-i(\omega-k_y v_D-k_z v_z)\tau} \\
&\times \left\{ -k_z \frac{mv_z}{T_e} + \frac{m(\omega-k_y v_D-k_z v_z)}{T_e} \right\} f_0 d\tau \tag{3.3.50}
\end{aligned}$$

最後に式 (3.3.50) 右辺の第二項を積分することで, $\tilde{f}_{e,k\omega}$ を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}_{e,k\omega} \\
&= \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} f_0 \\
&- \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} f_0 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\omega-k_y v_D}{\omega-k_z v_z-k_y v_D-n_1\omega_{ce}} J_{n_1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) J_{n_2} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) e^{i(n_1-n_2)(\theta-\psi)} \\
&\tag{3.3.51}
\end{aligned}$$

3.3.2. 電子密度揺動の導出

次に, 式 (3.3.51) を速度で積分することによって, 電子密度を導出する.

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{n}_{e,k\omega}}{n_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{e,k\omega} d\mathbf{v} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} f_0 d\mathbf{v} \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} f_0 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\omega-k_y v_D}{\omega-k_z v_z-k_y v_D-n_1\omega_{ce}} J_{n_1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) J_{n_2} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) e^{i(n_1-n_2)(\theta-\psi)} d\mathbf{v} \\
&= \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} - \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2\pi T_e} e^{-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2T_e}} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) \times 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_e v_{\parallel}^2}{2T_e}} \frac{\omega-k_y v_D}{\omega-k_z v_z-k_y v_D-n_1\omega_{ce}} dv_{\parallel} \tag{3.3.52}
\end{aligned}$$

式 (3.3.52) の右辺の第二項の $v_{\perp}$ の積分に関して, 以下の関係式を用いる.

$$\int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} J_n(px) J_n(qx) dx = \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{p^2+q^2}{4a^2}} I_n \left(\frac{p^2+q^2}{4a^2} \right) \tag{3.3.53}$$

この式を式 (3.3.52) に用いることで, 右辺の第一項は以下のようにになる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2\pi T_e} e^{-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2T_e}} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}}\right) \times 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} = e^{-b} I_n(b) \quad (3.3.54)$$

ここで、 $I_n(b)$ は n 次の第一種の修正ベッセル関数である．この関数については 4.1 節で定義する．また、 $b = k_{\perp}^2 \rho_e^2$ 、 $\rho_e^2 = v_{the}^2 / \omega_{ce}^2$ は電子の Larmor 半径、 $v_{the}^2 = T_e / m$ は電子の熱速度である．式 (3.3.52) の右辺の第二項の $v_{\parallel}$ の積分に関して、以下の関係式を用いる．

$$Z(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \xi_n} dt \quad (3.3.55)$$

これはプラズマ分散関数と呼ばれる．[14,15,36,47,48](#) ここで、以下のように置く．

$$t = \sqrt{\frac{m_e}{2T_e}} v_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_{\parallel}}{v_{the}} \quad (3.3.56)$$

$$v_{\parallel} = \sqrt{2} v_{the} t \quad (3.3.57)$$

$$\frac{\omega - k_y v_D}{\omega - k_z v_z - k_y v_D - n_1 \omega_{ce}} = \frac{\omega - k_y v_D}{\sqrt{2} k_z v_{the}} \frac{1}{\frac{\omega - k_y v_D - n_1 \omega_{ce}}{\sqrt{2} k_z v_{the}} - t} \quad (3.3.58)$$

そのとき、

$$\frac{\omega - k_y v_D - n_1 \omega_{ce}}{\sqrt{2} k_z v_{the}} = \xi_n \quad (3.3.59)$$

$$\frac{\omega - k_y v_D}{\sqrt{2} k_z v_{the}} = \xi_0 \quad (3.3.60)$$

よって、

$$\frac{\omega - k_y v_D}{\sqrt{2} k_z v_{the}} \frac{1}{\frac{\omega - k_y v_D - n_1 \omega_{ce}}{\sqrt{2} k_z v_{the}} - t} = (-1) \xi_0 \frac{1}{t - \xi_n} \quad (3.3.61)$$

式 (3.3.55)、式 (3.3.56)、そして式 (3.3.61) を用いると、式 (3.3.52) の右辺の第 2 項は以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_e v_{\parallel}^2}{2T_e}} \frac{\omega - k_y v_D}{\omega - k_z v_z - k_y v_D - n_1 \omega_{ce}} dv_{\parallel} \\ &= -\xi_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \xi_n} dt = -\xi_0 Z(\xi_n) \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

式 (3.3.54) と (3.3.62) を式 (3.3.52) に代入することで、以下の電子密度揺動の式を得る．

$$\frac{\tilde{n}_{e,k\omega}}{n_0} = \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} + \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} I_n(b) \xi_0 Z(\xi_n) \quad (3.3.63)$$

3.4. 分散関係の導出

EDI では、電場摂動 $\tilde{\mathbf{E}}$ でイオンと電子の密度揺動が生じ、それによる電場摂動 $\tilde{\mathbf{E}}$ も生じるが、それは電荷の密度差から生じるものである。そのため、イオン密度揺動 $\tilde{n}_i$ (式 (3.2.20)) と電子密度揺動 $\tilde{n}_e$ (式 (3.3.64)) は等しくならない。そのため、以下に示すポアソン方程式に代入する。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi n_0 e \left(\frac{\tilde{n}_i}{n_0} - \frac{\tilde{n}_e}{n_0} \right) \quad (3.4.1)$$

そして線形化すると以下のようになる。

$$k^2 \tilde{\phi} = 4\pi n_0 e \left[\left\{ \frac{c_s^2 k^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \right\} - \left\{ \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} + \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} I_n(b) \xi_0 Z(\xi_n) \right\} \right] \quad (3.4.2)$$

これを整理すると、分散関係が得られる。

$$k^2 \lambda_{De}^2 = \frac{k^2 c_s^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} - 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} I_n(b) \xi_0 Z(\xi_n) \quad (3.4.3)$$

ここで、 $\lambda_{De}^2 = \varepsilon_0 T_e / n_0 e^2$ は電子のデバイ長である。

4. 分散関係の解析

本章では，3章で導出した分散関係の解析を行った．分散関係にはプラズマ分散関数 $Z(\xi_n)$ が含まれるが，この関数の解が虚数解であることや，発散することから，数値的に解くことは難しいとされている^{47,48}．そのため，4.1節では $Z(\xi_n)$ の引数 ξ_n の極限を取ることで，近似解を得た．しかし，分散関係の実験による検証のためには，近似解ではなく分散関係を数値的に解く必要がある．そこで，PlasmaPy という， $Z(\xi_n)$ を数値的に解くことができるパッケージを用いることにした．4.2節では，数値解析のために分散関数を変形した．4.3章では計算コードの開発，4.4章ではその確認を行った．

4.1. 近似解の導出

上記の通り，プラズマ分散関数 $Z(\xi_n)$ を数値的に解くことは困難である．そのため，引数 ξ_n の極限を取った場合の $Z(\xi_n)$ の近似解が存在する²²．まずはそれを利用して分散関数の近似解を計算した．ここで，因数 ξ_n は式 (3.3.59) に示す通り，分母に磁場方向の波数，分子に周方向の波数を持ち，磁場方向の波数の割合を示している．すなわち， $\xi_n \gg 1$ の極限では磁場方向の波数は十分に少なく， $\xi_n \ll 1$ の極限は磁場方向の波数が十分に大きいという意味を持つ．それらの極限での $Z(\xi_n)$ の近似解を以下に示す．

$$Z(\xi_n) = \begin{cases} i\sqrt{\pi}\sigma e^{-\xi_n^2} - \frac{1}{\xi_n} \left(1 + \frac{1}{2\xi_n^2} + \dots \right) & \text{for } \xi_n \gg 1 \\ i\sqrt{\pi}e^{-\xi_n^2} - 2\xi_n \left(1 - \frac{2}{3}\xi_n^2 + \dots \right) & \text{for } \xi_n \ll 1 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

ここで， σ は

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{for } \text{Im}\xi_n > \frac{1}{|\text{Re}\xi_n|} \\ 1 & \text{for } |\text{Im}\xi_n| < \frac{1}{|\text{Re}\xi_n|} \\ 2 & \text{for } \text{Im}\xi_n < -\frac{1}{|\text{Re}\xi_n|} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

また, $I_n(b)$ で表される第一種の修正ベッセル関数についても近似解を使用する.

$$I_n(b) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{2}\right)^n = \frac{1}{n!} \left(\frac{k_{\perp}^2 \rho_e^2}{2}\right)^n \quad (4.1.3)$$

以下の項では, 分散関係に $Z(\xi_n)$ の近似式を適用し, ξ_n の極限での分散関係を導出する. また, $Z(\xi_n)$ は電子密度揺動 $\tilde{n}_e$ (式 (3.3.63)) にも表れる. 適応することで, 電子の密度揺動 $\tilde{n}_e$ とポテンシャル揺動 $\tilde{\phi}$ の関係, すなわちマイクロ波干渉計測とプローブ計測で得られる結果の比較ができる.

4.1.1. $\xi_n \gg 1$ の場合

$\xi_n \gg 1$ で極限を取った場合, すなわち磁場に平行な電子の運動が小さい場合 ($k_{\parallel} = k_z \simeq 0$) の分散関係の近似を行う. プラズマ分散関数の近似式 (4.1.1) を分散関係の式 (3.4.3) に当てはめると, 以下の式を得る.

$$k^2 \lambda_{De}^2 = \frac{k^2 c_s^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} - 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} I_n(b) \xi_0 \left(-\frac{1}{\xi_n} + i\sqrt{\pi} \sigma e^{-\xi_n^2} \right) \quad (4.1.1.1)$$

周波数 ω が実数解と虚数解を持つとき, すなわち

$$\omega = \omega_R + i\delta\omega \quad (\omega_R \gg \delta\omega) \quad (4.1.1.2)$$

の場合, ω_R は不安定性の周波数, また $\delta\omega$ は不安定性の成長率を示す. 成長率は波が立つ早さを示すもので, 成長率が高いほど早く波が立ち, ゼロだと波は立たない. 計算の複雑さから, ここでは実数解のみ, すなわち周波数のみを導出する.

式(4.1.1.1) の右辺第3項について, 以下のテーラー展開を用いる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \quad (4.1.1.3)$$

すると, 式(4.1.1.1) の右辺第3項は以下のようなになる.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} = 1 - b \quad (4.1.1.4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) \left(-\frac{1}{\xi_n} \right) = \dots + \left\{ -\frac{b}{2} \left(-\frac{1}{\xi_{-1}} \right) \right\} + \left\{ -\frac{b}{2} \left(-\frac{1}{\xi_1} \right) \right\} + \dots \quad (4.1.1.5)$$

よって, 式 (4.1.1.1) は

$$\begin{aligned}
k^2 \lambda_{De}^2 &= \frac{k^2 c_s^2}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^2} - 1 + (1 - b) - \frac{b}{2} \left(\frac{\xi_0}{\xi_1} + \frac{\xi_0}{\xi_{-1}} \right) \\
&= \frac{k^2 c_s^2}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^2} - k_{\perp}^2 \rho_e^2 - k_{\perp}^2 \rho_e^2 \frac{(\omega_R - k_y v_D)^2}{(\omega_R - k_y v_D)^2 - \omega_{ce}^2}
\end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

整理すると,

$$(\omega_R - k_x u_{i,x})^2 = \frac{k^2 c_s^2}{k^2 \lambda_{De}^2 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \tag{4.1.1.7}$$

$k_z \simeq 0$ なので,

$$\frac{k^2 c_s^2}{k^2 \lambda_{De}^2 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \simeq \frac{c_s^2}{\lambda_{De}^2 + \rho_e^2} = \frac{\frac{T_e}{M}}{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_0 e^2} + \frac{v_{the}^2 m^2}{e^2 B^2}} \tag{4.1.1.8}$$

整理することで, 最終的に以下の関係を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{T_e}{M}}{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_0 e^2} + \frac{v_{the}^2 m^2}{e^2 B^2}} &= \frac{\frac{T_e}{M}}{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_0 e^2} + \frac{T_e m}{e^2 B^2}} = \frac{n_0 e^2 B^2}{M(\varepsilon_0 B^2 + m n_0)} = \frac{n_0 e^2 B^2}{M n_0 \left(\frac{\varepsilon_0 B^2}{n_0} + m \right)} \\
&\simeq \frac{e^2 B^2}{M m} = \omega_{ci} \omega_{ce}
\end{aligned} \tag{4.1.1.9}$$

$$(\omega_R - k_x u_{i,x})^2 = \omega_{ci} \omega_{ce} \tag{4.1.1.10}$$

この式は低域混成波と呼ばれる波の周波数と一致する.²² 低域混成は, 電場摂動が磁場とちょうど垂直の関係, すなわち $\tilde{\mathbf{E}} \perp \mathbf{B}$ の場合, 電子とイオンのサイクロトロン周波数が共鳴を起こし, それらの積の周波数で電場揺動が生じる現象である. また, プラズマ分散関数の近似式を式 (3.3.63) に適応する. すると以下の式を得る.

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{e \tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} + \frac{e \tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} k_{\perp}^2 \rho_e^2 - k_{\perp}^2 \rho_e^2 \frac{(\omega_R - k_y v_D)^2}{(\omega_R - k_y v_D)^2 - \omega_{ce}^2} = k_{\perp}^2 \rho_e^2 \frac{e \tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \tag{4.1.1.11}$$

デバイ長は 10^{-4} [m] のオーダーを持ち, $k_{\perp}^2 \rho_e^2$ は十分に小さな値を取ると考えられる. そのため式 (4.1.1.11) は, 電子の密度揺動 $\tilde{n}_e$ よりもポテンシャル揺動 $\tilde{\phi}$ の方が大きいことを示す.

4.1.2. $\xi_n \ll 1$ の場合

$\xi_n \ll 1$ の場合, すなわち磁場方向の波数が十分に大きな場合を想定する. この場合, k の中で $k_{\perp}$ の値は小さくなるため, 3.3 節で定義される b は次のように定義できる.

$$b = k_{\perp}^2 \rho_e^2 \ll 1 \quad (4.1.2.1)$$

そのため、 b を引数とする以下の関数も極限を取る．

$$e^{-b} \simeq 1, \quad I_n(b) \simeq 1 \quad (4.1.2.2)$$

プラズマ分散関数の近似式 (3.4.5) と (4.2.1.1), 式 (4.1.2.2) をプラズマ分散関係式 (3.4.3) に当てはめると,

$$1 + k^2 \lambda_{De}^2 = \frac{k^2 c_s^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} - \xi_0 (-2\xi_0 + i\sqrt{\pi}) \quad (4.1.2.3)$$

ここで、周波数が虚部を持つという仮定(式 (4.1.1.2))と、右辺第一項の分母にテラー展開を適用する．

$$\frac{1}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} = \frac{1}{(\omega_R + \delta\omega - k_x u_{i,x})^2} = \frac{1}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^2} - \frac{2}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^3} i\delta\omega \quad (4.1.2.4)$$

そのため式 (4.1.2.3)は以下のように実部と虚部に変形できる．

$$1 + k^2 \lambda_{De}^2 = \frac{k^2 c_s^2}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^2} - i \frac{2k^2 c_s^2 \delta\omega}{(\omega_R - k_x u_{i,x})^3} - i\xi_0 \sqrt{\pi} \quad (4.1.2.5)$$

実数項は以下で示される．

$$(\omega_R - k_x u_{i,x})^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \quad (4.1.2.6)$$

この関係式はイオン音波の周波数を示す．また、虚部に関しては、整理することで以下の関係式を得る．

$$\delta\omega = i \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \frac{k}{k_z} \frac{k_y v_D - \omega_R}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1.2.7)$$

また、プラズマ分散関数の近似を式 (3.3.63)に当てはめると、以下の関係が得られる．

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} + \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-b} I_n(b) \xi_0 Z(\xi_n) = \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} + \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \times 2\xi_0^2 \simeq \frac{e\tilde{\phi}_{k\omega}}{T_e} \quad (4.1.2.8)$$

これはボルツマンの関係式と一致する.²² これは、電子はイオンよりも質量が軽く機敏に運動することから、指数的に加速されることを説明する関係式である．

4.2. 数値解

4.1 節ではプラズマ分散関数を近似することで、イオン音波と低域混成波が存在する可能性を示した。しかし、分散関係式 (3.4.3) を実験や数値シミュレーション等で検証するためには、極限を取るのではなく、それらの波が現れる条件を値で、もしくは極限の間での現象について理解する必要がある。すなわち、プラズマ分散関数を直接解く必要がある。しかし、前述の通り、直接数値計算することは困難である。そこで、PlasmaPy という、Python のパッケージを用いた⁴⁹PlasmaPy は Python の無料オープンソースであり、世界中のプラズマに関する教育や研究のために 2020 年に開発され、アメリカ合衆国エネルギー省、スミソニアン協会、NASA、Google Summer of Code が協賛している。このパッケージではプラズマに関する関数が計算でき、その中にプラズマ分散関数も含まれる。これを用いることで分散関係の直接計算が可能となる。PlasmaPy のインストール手順は付録 B で説明している。

分散関係を数値的に解くために、まずは分散関係を計算できる形に変形した。分散関係の式 (3.4.3) の右辺第三項を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega - k_y v_D}{\sqrt{2k_z^2 v_{\text{the}}^2}} e^{-k_{\perp}^2 \rho_e^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{\omega - k_y v_D - n\omega_{ce}}{\sqrt{2k_z^2 v_{\text{the}}^2}}\right) I_n(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \\
 &= \frac{\omega - k_y v_D}{\sqrt{2k_z^2 \rho_e^2}} e^{-k_{\perp}^2 \rho_e^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{\frac{\omega - k_y v_D}{\omega_{ce}} - n}{\sqrt{2k_z^2 \rho_e^2}}\right) I_n(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \\
 &= g\left(\frac{\omega - k_y v_D}{\omega_{ce}}, k_{\perp}^2 \rho_e^2, k_z^2 \rho_e^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ここで $g(\Omega, X, Y)$ は Gordeev 関数であり、以下で定義される。^{15,50}

$$\begin{aligned}
 g(\Omega, X, Y) &= i\Omega \int_0^{+\infty} \exp\left[-X(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}Y\varphi^2 + i\Omega\varphi\right] d\varphi \\
 &= \frac{\Omega}{\sqrt{2Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{\Omega - m}{\sqrt{2Y}}\right) I_m(X)
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

これを適用し、分散関係式 (3.4.3) を整理すると、

$$1 + k^2 \lambda_{De}^2 + g\left(\frac{\omega - k_y v_D}{\omega_{ce}}, k_{\perp}^2 \rho_e^2, k_z^2 \rho_e^2\right) - \frac{k^2 c_s^2}{(\omega - k_x u_{i,x})^2} = 0 \tag{4.2.3}$$

4.1.2 項にて、イオン音波が存在する可能性を予測した。イオン音波の分散関係は、波数が大きくなるとイオンのプラズマ周波数 ω_{pi} に収束する傾向にある。そこで、分散関係内の周波数の関数を ω_{pi} で規格化する。また、長さの関数を電子のデバイ長 λ_{De} で規格化することにより、速度の関数をイオン音速 $c_s = \lambda_{De}/\omega_{pi}$ で規格化する。その結果、式 (4.2.3) は以下の式になる。

$$(\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{u}_{i,x})^2 = \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2 + g \left(\frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{v}_D}{\hat{\omega}_{ce}}, \hat{k}_1^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right)} \quad (4.2.4)$$

ここで、添え字 $\hat{}$ は規格化された関数を意味し、 $\hat{M}$ はイオン質量 M を電子質量 m で規格化したものである。式 (4.2.4) は両辺に解である周波数 ω を含むが、これを解くために反復計算法を用いる。

$$(\hat{\omega}_{n+1} - \hat{k}_x \hat{u}_{i,x})^2 = \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2 + g \left(\frac{\hat{\omega}_n - \hat{k}_y \hat{v}_D}{\hat{\omega}_{ce}}, \hat{k}_1^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right)} \quad (4.2.5)$$

まず、右辺の Gordeev 関数内の ω_0 にゼロを代入し、左辺 ω_1 を求める。次に、求めた ω_1 を Gordeev 関数に代入し、 ω_2 を求める。 ω_n の値が収束するまで計算を繰り返す。

Gordeev 関数はプラズマ分散関数を含むため、実部と虚部を持つことになる。そのため、Gordeev 関数の実部と虚部を以下のように区別する。

$$g_n = g_{rn} + i g_{in} \quad (4.2.6)$$

ここで g_n は n 次の Gordeev 関数であり、 g_{rn} と g_{in} はそれぞれ g_n の実部と虚部である。この表記を式 (4.2.5) に当てはめ、整理すると、

$$(\hat{\omega}_{n+1} - \hat{k}_x \hat{u}_{i,x})^2 = \frac{\hat{k}^2}{h_n^2 + g_{in}^2} (h_n - i g_{in}) \quad (4.2.7)$$

ここで h_n は以下で定義される。

$$h_n = 1 + \hat{k}^2 + g_{rn} \quad (4.2.8)$$

式 (4.2.7) の両辺の平方根を取ると、

$$\hat{\omega}_{n+1} - \hat{k}_x \hat{u}_{i,x} = \pm \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{in}^2}} \sqrt{h_n - i g_{in}} \quad (4.2.9)$$

ここで、式 (4.2.9) の右辺の虚部を含む平方根を展開するために、回転座標を適用する。

$$h_n - i g_{in} = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (4.2.10)$$

ここで,

$$\begin{cases} r = \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \\ \cos \theta = \frac{h_n}{r} \\ \sin \theta = -\frac{g_{in}}{r} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

よって, その平方根は

$$\begin{aligned} \sqrt{h_n - ig_{in}} &= \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \sqrt{r} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left(-h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

これによって, 式 (4.2.9) は以下のように書き換えられる.

$$\hat{\omega}_{n+1} - \hat{k}_x \hat{u}_{i,x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{in}^2}} \left\{ \left(h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left(-h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.2.13)$$

以上により, 分散関係の解 $\hat{\omega}_{n+1}$ は以下で表される.

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{+,n+1} = k_x u_{i,x} + \hat{\omega}_{r,n+1} + i\hat{\gamma}_{n+1} \\ \hat{\omega}_{-,n+1} = k_x u_{i,x} - \hat{\omega}_{r,n+1} - i\hat{\gamma}_{n+1} \end{cases} \quad (4.2.14)$$

ここで $\hat{\omega}_{r,n+1}$ と $\hat{\gamma}_{n+1}$ は以下で定義される.

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{r,n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{in}^2}} \left(h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\gamma}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{in}^2}} \left(-h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{in}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.2.15)$$

$\hat{\omega}_{n+1}$ の実部, すなわち $k_x u_{i,x} \pm \hat{\omega}_{r,n+1}$ は不安定性の周波数, 虚部 $\pm \hat{\gamma}_{n+1}$ は虚部である. また, 不安定性が存在するためには成長率は正である必要があるため, 以下では $\hat{\omega}_+$ のみ計算を行う.

4.3. 計算コードの開発

図 4.1 に計算の流れを示す．まず，Gordeev 関数内の $\hat{\omega}_n$ に $\hat{\omega}_0 = 0$ を代入し，シグマの値が収束するまで計算を行う．次に，収束した Gordeev 関数を式 (4.2.14), (4.2.15) に代入し， $\hat{\omega}_1$ を計算する． $\hat{\omega}_{+1}$ のみを Gordeev 関数に代入し，同じように $\hat{\omega}_{+2}$ を計算し，この値が収束するまで行う．計算を行った結果，シグマは ± 25 で十分に収束し，また $\hat{\omega}_n$ は $n = 1$ ，すなわち反復を 1 度行うだけで値が収束した．計算は Python で行い，上記の反復回数の場合，計算時間は 3 秒以下であった．実際のコードは付録 C に記載する．

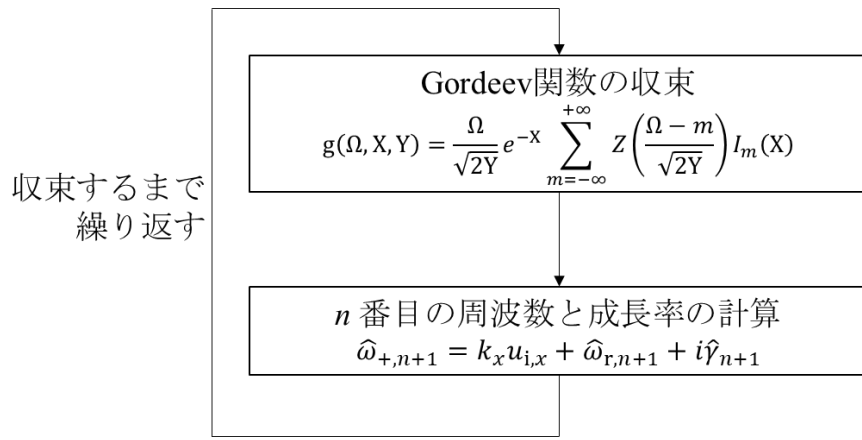


図 4.1. 計算の流れ

4.4. 計算コードの確認

4.3 節で開発した計算コードが正常に動作できているかの確認のために，先行研究との比較を行った．Cavalier らが行った研究では，ESA のホールスラスタである SSP シリーズの試験機である SSP-X000[®]における EDI の分散関係を調査している.¹⁵ 表 4.1 にそのパラメータを，また図 4.2 にその分散関係を示す．これらのパラメータを 4.3 節で開発した計算コードに用いて描いた分散関係を図 4.3 に示す．この結果から，開発したコードの計算の妥当性が確認できた．

表 4.1 先行研究のパラメータ ¹⁵

$\lambda_{De}[\text{m}]$	$\omega_{pi}[\text{rad/s}]$	$c_s[\text{m/s}]$	$\hat{k}_x$	$\hat{v}_D$	$\hat{v}_{the}$	$\hat{\omega}_{ce}$	$\hat{M}$
8.3×10^{-5}	5.1×10^7	4270	0	150	491	50	2.4×10^5

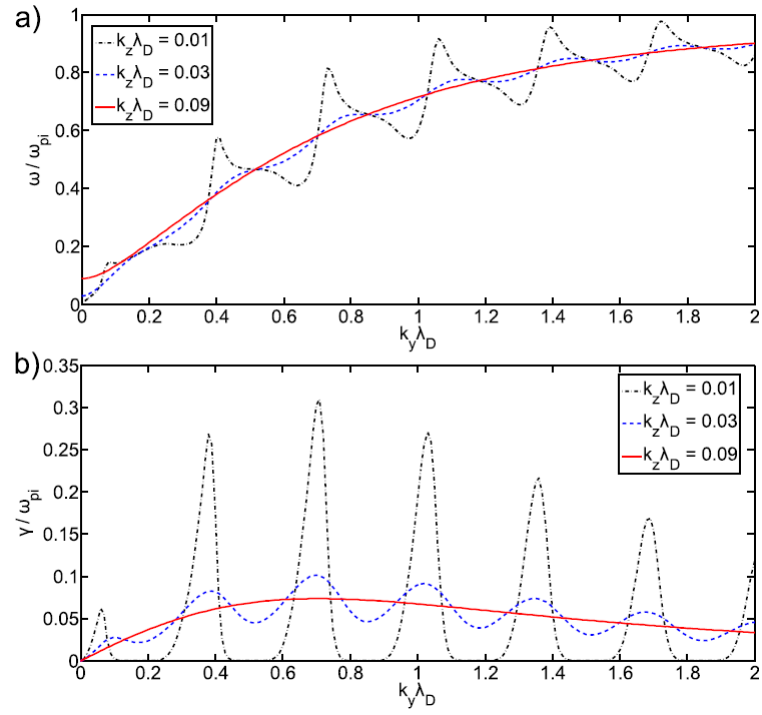


図 4.2. 先行研究の分散関係 [15](#)

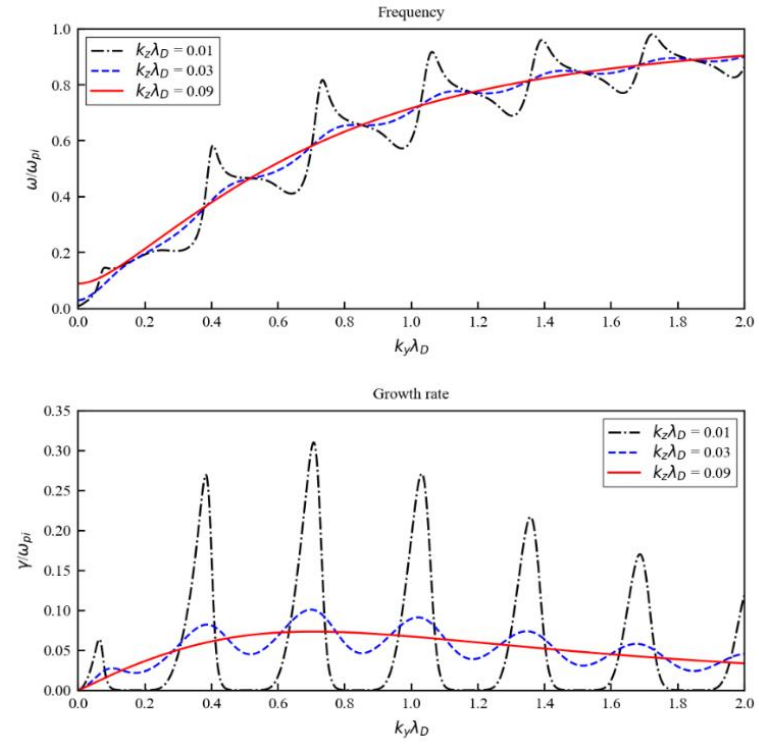


図 4.3. 開発した計算コードに先行研究の数値を用いた分散関係 [15](#)

4.5. 分散関係の計算

4.4 節にて、分散関係を求める準備が整った．本節では本研究室の 1 kW 級ホールスラスト実験の値を用いた分散関係について調査を行う．

4.5.1. パラメータ

計算のために、表 3.1 と表 3.2 のパラメータを規格化する．値を表 4.2 に示す．磁場などの実験パラメータは表 3.1 に示すとおりである．ここで波数に関して、現段階で実験的に測定ができていない．そのため、本節では Cavalier らが行った先行研究 [15](#) のオーダーを用いる．この研究では、EDI の成長率の最大値を調査し、結果として波数 k_y はデバイ長 λ_{De} のオーダーで規格化している．また、J. C. Adam らの研究では磁場方向の波数は無視できるほど小さく、[51](#) また A. Ducrocq らの研究で、軸方向の波数の変化に関しては鈍感であるという結果から、[14](#) k_z は k_y と比較して小さな値、また k_x は簡単のために 0 を取っている．波数に関しては次節で詳しく議論する．

表 4.2 本研究室のホールスラスト実験のパラメータ(規格化済)

$\lambda_{De}[\text{m}]$	$\omega_{pi}[\text{rad/s}]$	$c_s[\text{m/s}]$	$\hat{k}_x$	$\hat{v}_D$	$\hat{v}_{the}$	$\hat{\omega}_{ce}$	$\hat{M}$
3.3×10^{-5}	11.1×10^7	3830	0	280	490	30	2.4×10^5

4.5.2. 分散関係

図 4.4 に表 4.2 のパラメータを用いた場合の EDI の分散関係を示す．上図は不安定性の周波数，下図は成長率である． $k_y \lambda_{De}$ の値が大きくなるにつれ、周波数は右肩上がりに ω/ω_{pi} に収束に向かう線が表れている．図 4.5 に図 4.4 の $k_z \lambda_{De} = 0.04$ のグラフと、4.1.2 項で求めたイオン音波の式をプロットした分散関係を示す．この 2 つのグラフは、ほぼ等しい線を書いているため、4.1 節の仮定と同じく、 k_z が大きな場合はイオン音波が表れる．一方、 $k_z \lambda_{De}$ の値が 0.04 ($k_z \approx 1200 \text{ m}^{-1}$) よりも小さくなると、グラフが周期的なピークを持つようになることが分かる．近似解を求めた際、 $\xi_n \ll 1$ と $\xi_n \gg 1$ の極限を取り、結果異なる波が表れる結果となった．そのため、このピークはイオン音波から別のモードに変化している途中の段階ではないかという仮定の下、 $\xi_n = 1$ の場合の調査を行った． $\xi_n = 1$ の場合、 ξ_n の式 (3.3.59) を変形し、以下の形になる．

$$k_y = -n \frac{\omega_{ce}}{v_D} - \frac{\sqrt{2} k_z v_{the}}{v_D} + \frac{\omega}{v_D} \quad (4.5.2.1)$$

加えて ξ_n が関与する関数であるプラズマ分散関数 $Z(\xi_n)$ にも注目した．ここで ξ_n は分母にあり，分母がゼロになるときに注目し，その場合の式を以下に示す．

$$k_y = -n \frac{\omega_{ce}}{v_D} - \frac{k_z v_{the}}{v_D} + \frac{\omega}{v_D} \quad (4.5.2.2)$$

また，これらをプロットしたものを図 4.6 に示す．ピークと式 (4.5.2.1) (4.5.2.2) は一致しなかったが，それらの間隔は一致した．そのため，二つの関係式の中の，周期性を持つ右辺第一項 $|\Delta k_y| = \omega_{ce}/v_D$ はこのピークに関係している可能性がある．可能性として，この値がサイクロトロン周波数の整数倍であるため，電子サイクロトロン波が ECDI によって励起されていることが挙げられるが，それが v_D の商であることや，右辺第二項以降の意味など，詳しいことははっきりと分かっていない．

$k_z \lambda_{De}$ の値が持つ意味について考察する．分散関係にピークを含む $k_z \lambda_{De} = 0.01$ の場合，そこから求まる波長は $\lambda_z \simeq 15 \text{ mm}$ となり，チャンネル幅と一致する．またイオン音波モードとなる $k_z \lambda_{De} = 0.04$ の場合，その波長は $\lambda_z \simeq 5.2 \text{ mm}$ となる．即ち，チャンネル幅の中に磁場方向に波が 3 個より多いとイオン音波が生じ，少ないとイオン音波と，それとは別の波が重なり分散関係にピークが出現することが分かる．

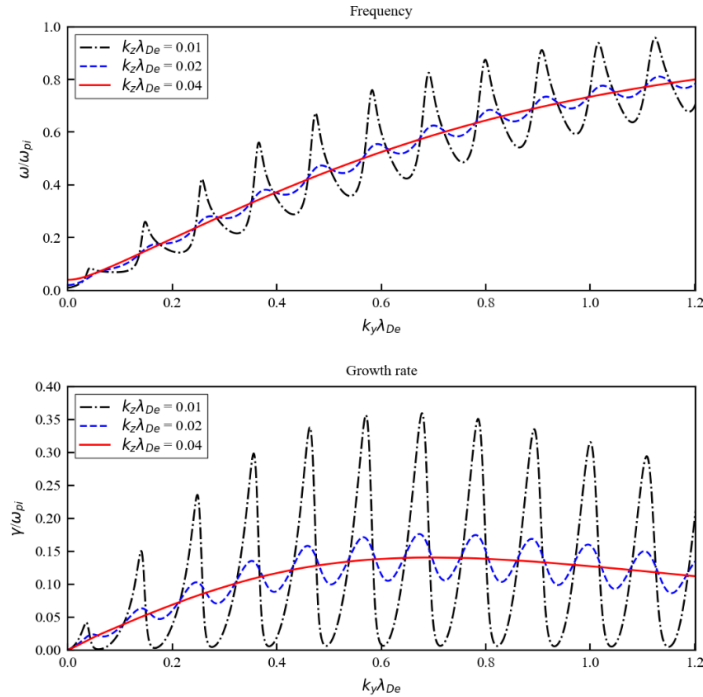


図 4.4 表 4.2 のパラメータを用いた分散関係

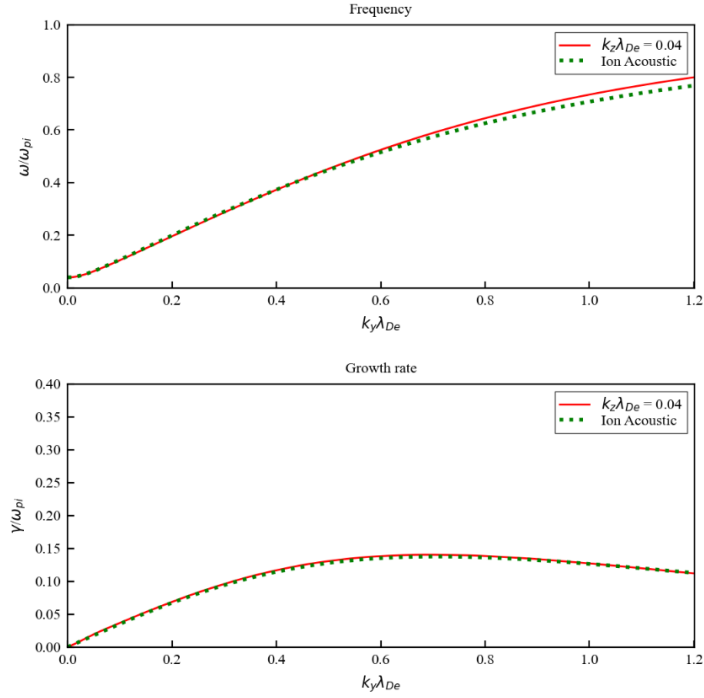


図 4.5 $k_z \lambda_{De} = 0.04$ とイオン音波の比較

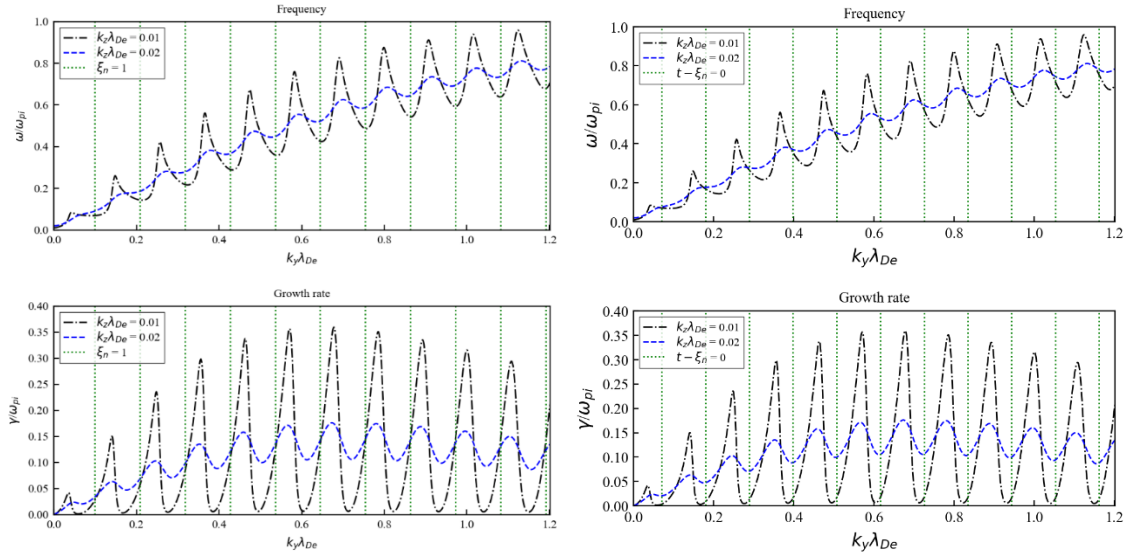


図 4.6 $\xi_n = 1$ とピークの比較

(左) $\xi_n = 1$ の場合 (右) $Z(\xi_n)$ の分母がゼロの場合($t - \xi_n$)

4.5.3. 推進剤質量の依存性

実験パラメータの影響の調査として、推進剤質量の依存性を調査した. ここでは、代替推進剤の候補の一つである、ネオン、アルゴン、クリプトンの希ガスと、通常用いられるキセノンの比較を行った.^{52,53} 実際には希ガスの他に、水や二酸化炭素などの貯蔵量が豊富な気体、また、アダマントンや樟脳などの昇華性があり、分子

量が大きな物質も代替推進剤の候補であるが、それらは単元素である希ガスと比較して複雑な電離をするため、ここでは用いなかった。

図 4.7 に結果を示す．これまで規格化を行っていた ω_{pi} にはイオン質量の項が含まれ、それだと同軸での比較ができないため、ここでは規格化なしで比較を行った．図より、軽い元素ほど高周波数、また高成長率であることが分かる．これは、 ω_p や ω_c が電子やイオンよりも軽いため、高い値をとるのと同様に、軽いイオンの方が摂動電場の影響を受けやすいためであると考えられる．また、質量依存性の度合いとして、図 4.8 に、 $k_y\lambda_{De} = 1.0$ のときの推進剤の原子量と周波数の関係を示す．比較として、イオン質量 M を変化させたイオン音波の周波数(式(3.4.2.6))をフィッティング関数として示す．イオン音波は周波数とイオン質量に $-1/2$ 乗の関係があるが、気体の周波数の変化とイオン音波の周波数の変化は同様であり、また $k_z\lambda_{De}$ の値によらないため、以下の関係にあることが確認できた．

$$\omega = \frac{kc_s}{\sqrt{1 + k^2\lambda_{De}^2}} \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (4.5.3.1)$$

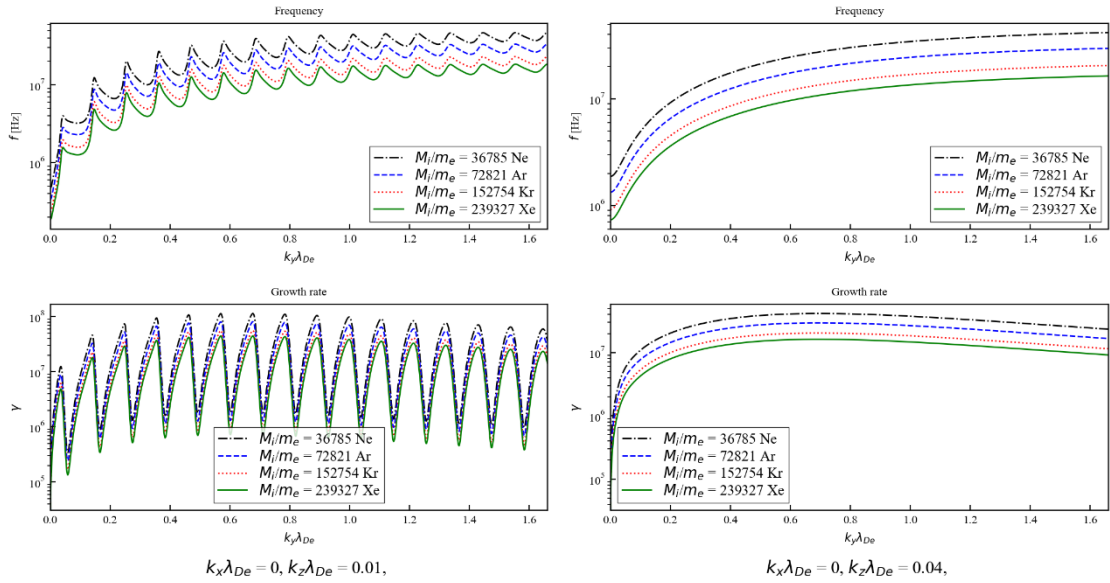


図 4.7 EDI のイオン質量依存性 (左) $k_z\lambda_{De} = 0.01$ (右) $k_z\lambda_{De} = 0.04$

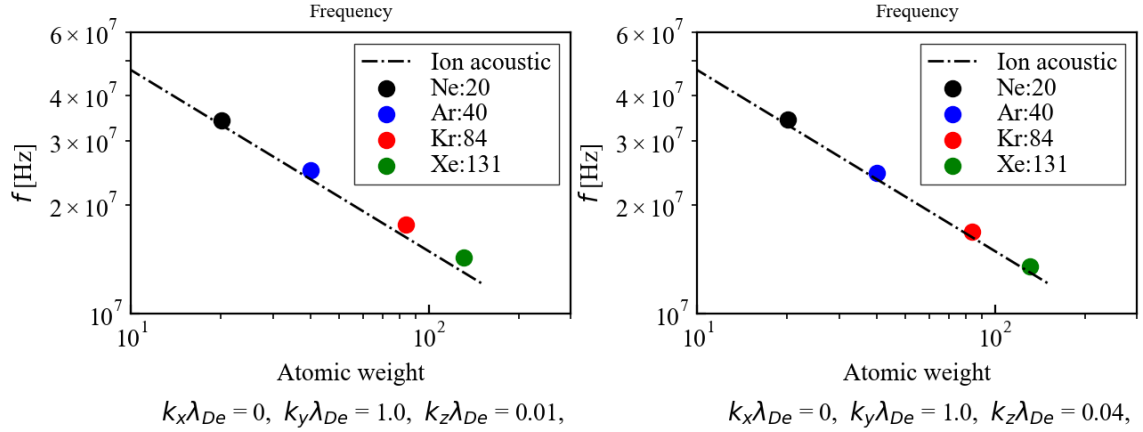


図 4.8 $k_y \lambda_{De} = 1.0$ での原子量と周波数の関係
(左) $k_z \lambda_{De} = 0.01$ (右) $k_z \lambda_{De} = 0.04$

4.6. 波数 k と周波数 ω の特定

4.6.1. 波数 k の特定

ここまで、波数に関しては先行研究 [15](#) を参考に、最大の成長率が確認できるデバイ長 λ_{De} のオーダーと仮定して計算を行ってきた。ホールスラストでは、通常電子のラーマ半径 ρ_e の値は λ_{De} より大きな値をとる。本研究の場合も、 $\rho_e = 553 \mu\text{m}$ と $\lambda_{De} = 33 \mu\text{m}$ と、ラーマ半径の方が約 17 倍も大きい。仮に摂動電場の波長が λ_{De} のオーダーであり、 ρ_e よりも小さいとすると、電子の運動はラーマ運動よりも摂動電場による電子揺動の方が支配的になる(磁場によって電子が 1 回の円運動を終える前に、静電電場によって何回も振動する)。そうすると電子はもはや磁化しているとは言えず、EDI を駆動する電子 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの影響を無視するという矛盾が生じる。そこで、摂動電場の波長 λ のオーダーをラーマ半径以下、即ち $k \rho_e \lesssim 1$ であると仮定した。この場合は、摂動電場による電子揺動と磁場によるラーマ運動が共存でき、電子は磁化しているといえるようになる。これらをまとめた図を図 4.9 に示す。

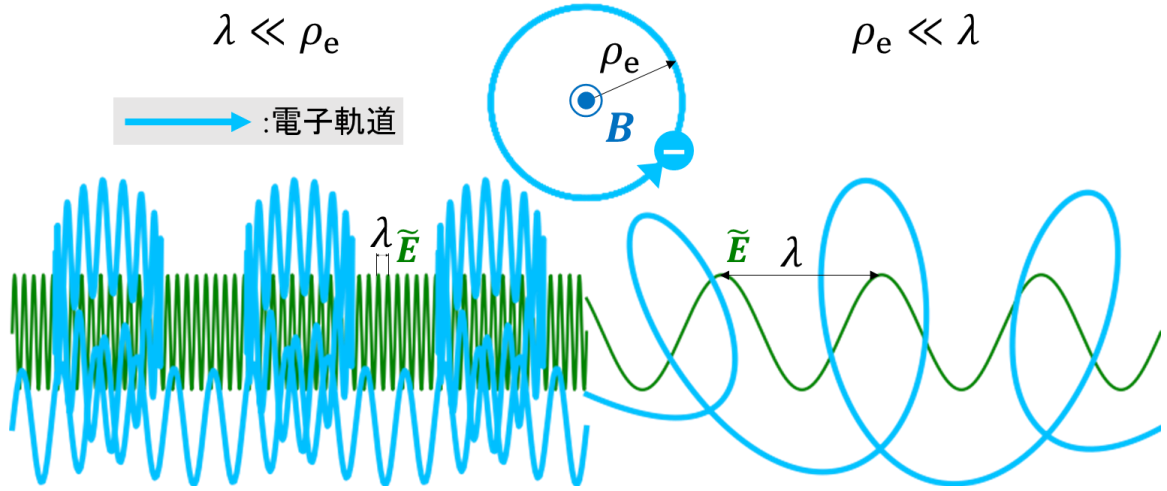
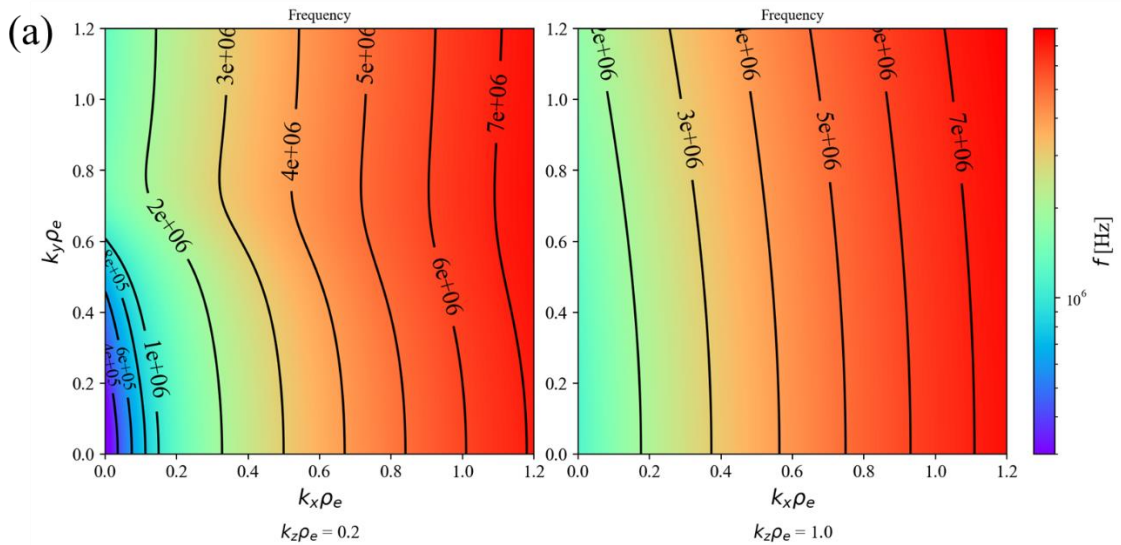


図 4.9 電場摂動 $\tilde{E}$ の波長 λ_{De} とラーマ半径 ρ_e の大小による電子運動への影響

4.6.2. 周波数 ω の特定

4.6.1 項にて、波数は $k\rho_e \lesssim 1$ と仮定した．これにより、分散関係から EDI の周波数の範囲を特定できるようになった．図 4.10 に k_x, k_y, k_z それぞれを比較したコンターを示す．ここでは波数は ρ_e 、時間は ω_{ce} 、また速度は v_{the} で規格化を行った．これらの図から、 k_x, k_y の比較だと 300 kHz ~ 8 MHz、 k_x, k_z の比較だと 100 kHz ~ 8 MHz、 k_z, k_y の比較だと 500 kHz ~ 7 MHz となり、つまり、EDI の波数を $k\rho_e \lesssim 1$ と仮定した際の周波数の範囲は 100 kHz ~ 8 MHz であることが分かった．

波数を $k\rho_e \lesssim 1$ と置いた場合、波長は $\lambda \gtrsim 3.3$ mm となる．これより、EDI によるプラズマ揺動から生じる電子密度揺動を、図 2.4 に示したマイクロ波干渉で観測するには、そのチャンネル間隔は 3.3 mm 以上にする必要があることが分かる．



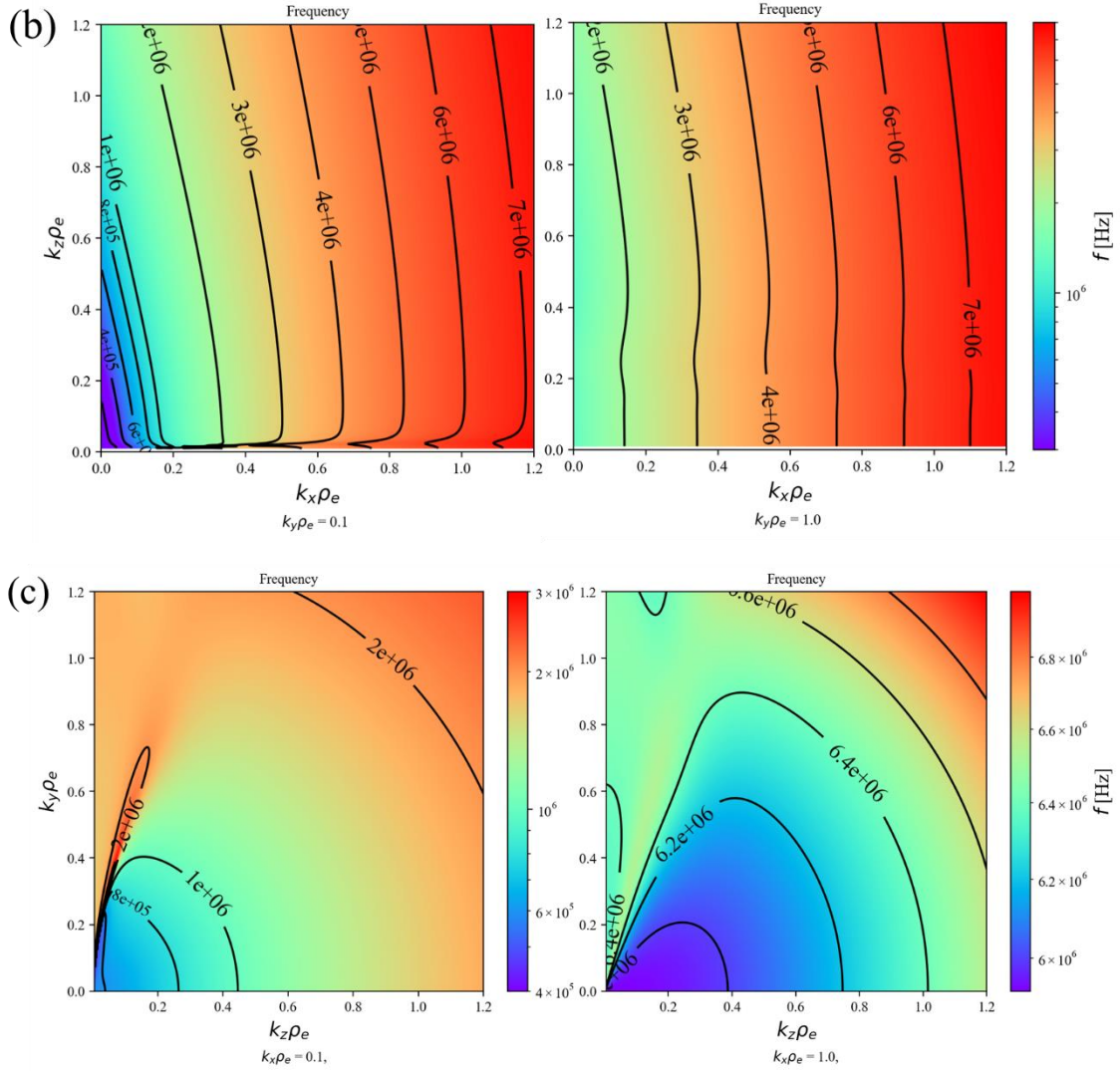


図 4.10 $k \rho_e \leq 1$ と仮定した場合の周波数 ω のコンター.
(a) k_x, k_y (b) k_x, k_z (c) k_z, k_y

4.7. PIC シミュレーションとの比較

最後に、本研究で行った EDI の理論計算と、本研究室で行われている PIC シミュレーションの結果との比較を行った。PIC シミュレーションでは、2.1.3 項で簡単に紹介した、露 Fakel 社製の SPT100 ホールスラストの結果を再現している。円筒座標系を用いており、チャンネル軸方向を z 軸、半径方向を r 軸、周方向は θ 軸と置いている。寸法は、チャンネル外径は 100 mm、内径は 70 mm、チャンネル幅は 15 mm、チャンネル長さは 25 mm である。また、放電電圧は 300 V、推進剤はキセノンを使用している。図 4.11 に PIC シミュレーションによる軸方向電場摂動を

示す．イオンは軸方向に排出され，そのためイオン音波は軸方向に伝搬するため，ここでは軸方向の電場摂動を選んでいる．この図より，摂動の様子を軸方向(図中 z 軸)で $0 \sim 25$ mm, $25 \sim 30$ mm, $30 \sim 46$ mm で分けられる 3 つの特徴的な領域が見られる．それぞれ，領域 1，領域 2，領域 3 と呼ぶことにする．EDI を駆動する電子ドリフトは磁場の強度に依存し，磁場の強度は軸方向に勾配を持つ．この磁場勾配により，軸方向に摂動の様子が異なる領域が生じると考えられる．この PIC シミュレーションではこの 3 領域ごとに分散関係を求めている．そこで，領域ごとの理論による分散関係と PIC の比較を行い，本研究で行った理論計算の検証を行う．理論計算で用いるパラメータの内，軸方向に大きな勾配を持つ値は，磁場，電子温度，イオン速度である．図 4.12 に SPT100 の磁場，電子温度，イオン速度の軸方向分布を，表 4.3 にそれらの領域ごとの平均値を示す．磁場分布の図は電磁場解析ソフト FEMM で作成し，PIC の計算条件として用いたものであり，電子温度とイオン速度の分布は PIC の計算結果から得られたものである．これらの値と SPT100 の条件を用いて分散関係の理論計算を行い，PIC の結果と重ねて比較したものが図 4.13 である．波数は k_x を横軸に取り，PIC の計算の特性上 k_y はゼロ，また PIC ではイオン音波モードとなることが確認できたため， $k_z = 1200 \text{ m}^{-1}$ (イオン音波モードとなる十分に大きな値)を取った．2D のコンターが PIC の分散関係，また赤線が理論値である．領域 1 では図 4.11 から分かるように，電場にはっきりとした波が観察されないため分散関係は不明瞭であるが，領域 2, 3 では理論値と PIC の結果がよく一致していることが分かる．この結果から，本研究による分散関係はイオン音波の特徴をよく表すことができている，また PIC の波数のオーダーから，波数のオーダーをラーマ半径程度とした仮定が正しいことも証明できた．

電子温度とイオン質量の分布から，各地点でのイオン音速が算出でき，その値は領域 1, 2, 3 それぞれ 2710, 3833, 3090 m/s, また平均音速は 3533 m/s ($T_e \approx 17 \text{ eV}$)となり， $T_e = 20 \text{ eV}$ とおいた理論計算でのイオン音速 $c_s = 3800 \text{ m/s}$ となるが，表 4.3 のイオン速度をこれらと比較すると，どの地点でも音速を超えることになる．イオンが印加電場にのみ加速されると仮定した場合，そのエネルギー保存則は以下の式で表される．

$$eE\Delta x + \frac{1}{2}Mu_{i,0}^2 = \frac{1}{2}Mu_{i,\Delta x}^2 \quad (2.7.1)$$

ここで Δx [m]は電場領域の長さ，即ちチャンネル長 L_x である．これにより計算したイオンの排出速度 $u_{i,\Delta x}$ は 20994 m/s となった．初期速度 $u_{i,0}$ が不明であり 0 としたため，実際はこの値と異なるが，排出速度 $u_{i,\Delta x}$ と比較すると $u_{i,0}$ は十分に

小さな値をとると考えられるため、PIC の計算結果の領域 2,3 のイオン排出速度のオーダーと一致すると考えられる。これから、軸方向電場の大きさから、イオンが音速を大きく超える速度に加速されていることが言える。移動速度が音速を超えるということは、イオン速度が大きいことによる不安定性が存在してる可能性を示唆できる。

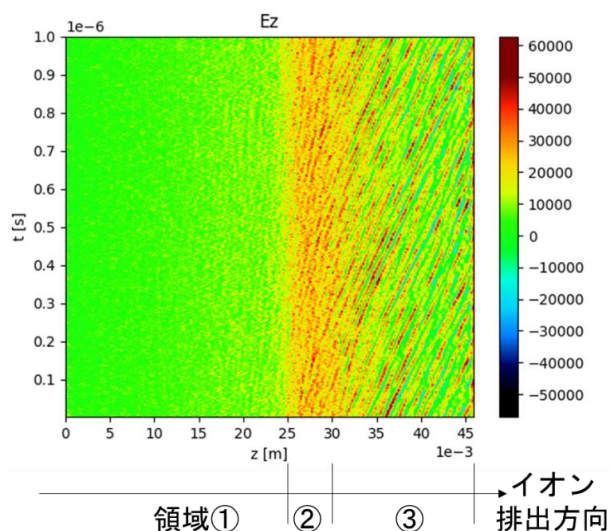


図 4.11 PIC シミュレーションによる周方向電場摂動の軸方向分布

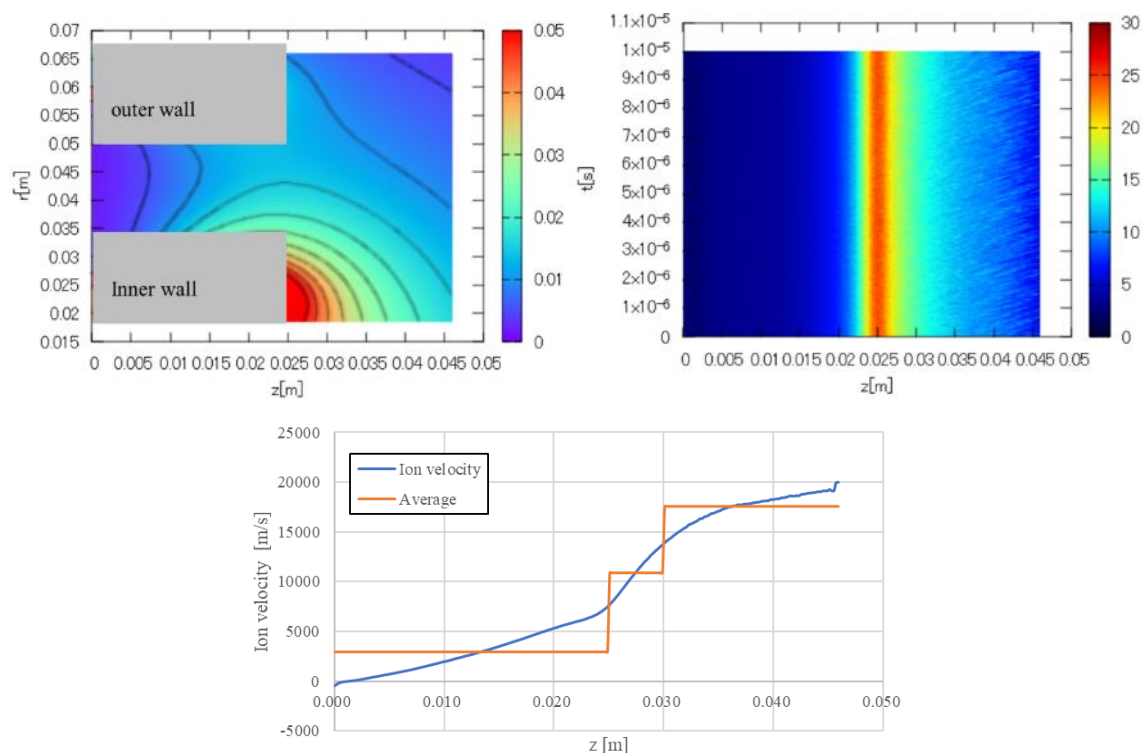


図 4.12 (左上) PIC シミュレーションに適応した SPT100 の磁場分布
(右上) PIC シミュレーションによる軸方向の電子温度分布
(下) PIC シミュレーションによるイオン速度の軸方向分布

表 4.3 各分布の平均値

	領域 1	領域 2	領域 3
磁場 B [mT]	15	20	17
電子温度 T_e [eV]	10	20	13
イオン速度 u_i [m/s]	2995	10898	17544

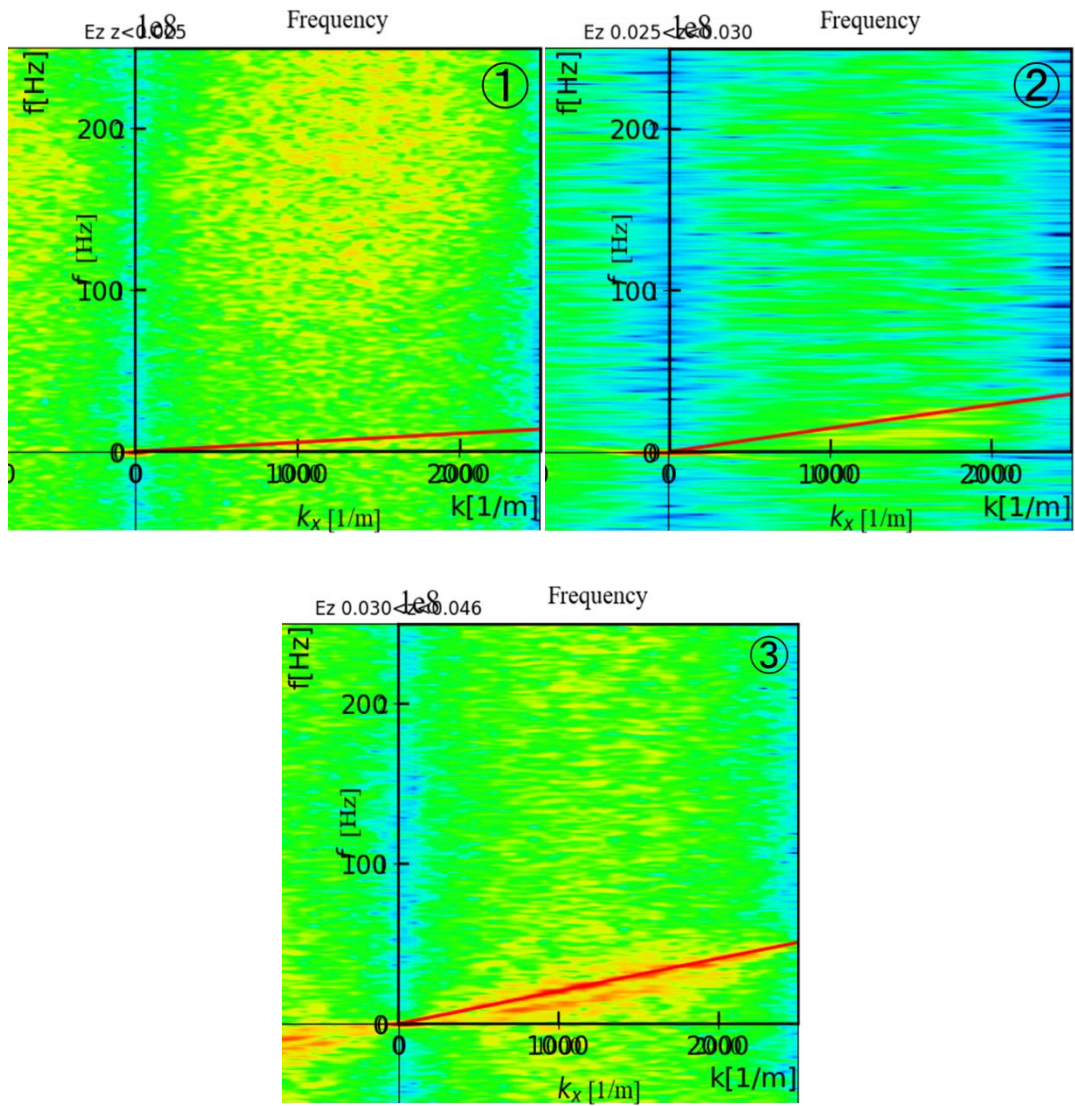


図 4.13 理論計算(赤線)と PIC シミュレーションの分散関係の比較

5. 結言

本研究では、1 kW 級ホールスラスタの電子ドリフト不安定性の同定のため、イオンの運動方程式と連続の式、電子の Vlasov 方程式から摂動電場の分散関係を導き、様々な解析を行った。以下に得られた知見を示す。

1. 磁場方向の波数の近似により、波数がゼロの場合は低域混成波、波数が大きい場合はイオン音波が存在する可能性があり、前者はポテンシャル揺動が電子密度揺動より大きく、後者はボルツマン関係であった。
2. プラズマ分散関数を数值的に計算し、分散関係を近似なしで計算できるコードの開発を Python にて行った。
3. 推進剤に希ガスを用いた場合、周波数と推進剤質量には $\omega = 1/\sqrt{M}$ の関係があった。
4. EDI の場合、電子は磁化されている必要があり、そのため摂動電場の波長 λ は電子のラーマ半径 ρ_e 以下である必要があり、その場合周波数は 100 kHz ~ 8 MHz となった。
5. PIC シミュレーションから得られた分散関係との比較検証の結果、イオン音波が存在すること、また波数がラーマ半径程度のオーダーを持つことが確認できた。

この研究のさらなる調査のために、質量依存の他に磁場、電場、密度等の実験パラメータによる依存性、またそれらがプラズマのパラメータにどのように作用し、その現象がどのような原理で生じるのかを調査する必要がある。また、実験や数値シミュレーションにて波数のより詳細な特定を行い、それを用いることで周波数を正確に特定し、また理論で予測した質量依存などの現象を、実験や数値シミュレーションにより確認することで、理論の整合性を高めていく必要がある。

参考文献

- ¹ 井口洋夫, 岡田益吉, 朽津耕三, 小林俊一, 山本昌孝, “宇宙環境利用のサイエンス,” 宇宙開発事業団, 2000, pp2-28.
- ² 大貫剛, 秋山文野, 大塚実, “完全図解 人工衛星の仕組み辞典,” マイナビ, 2014, pp8-18.
- ³ 栗木恭一, 荒川義博, “電気推進ロケット入門,” 東京大学出版会, 2003, pp1-15.
- ⁴ Dan M. Goebel, Ira Katz, "Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters," JPL SPACE SCIENCE AND TECHNOLOGY SERIES, Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology, 2008.
- ⁵ 竹ヶ原春貴, “イオンエンジン(電気推進)の 歴史とその将来,” 一般社団法人 日本航空宇宙工業会, 航空と宇宙 788, 2019, pp1-7.
- ⁶ Cosimo Ducci, Alexey Arkhipov, Mariano Andrenucci, “Development and performance characterization of a 5 kW class Hall-Effect thruster,” *IEPC-2015-215*, 2015.
- ⁷ Duchemin, O., Mehaute, D. L., Oberg, M., Cavelan, X., Ducleon, M. G., Khimeche, G., Payot, F., Soubrier, L., Galiana, D., and Glorieux, G., “End-to-End Testing of the PPS® 5000 Hall Thruster System with a 5-kW Power Processing Unit,” *IEPC-2015-127*, 2015.
- ⁸ Steven A. Feuerborn, Julie Perkins, David A. Neary, “Finding a Way: Boeing's All Electric Propulsion Satellite,” *AIAA 2013-4126*, 2013.
- ⁹ W. Andrew Hoskins, R. Joseph Cassady, Olwen Morgan, Roger M. Myers, Fred Wilson, David Q. King, Kristi deGrys, “30 Years of Electric Propulsion Flight Experience at Aerojet Rocketdyne,” *IEPC-2013-439*, 2013.
- ¹⁰ 荒川義博, 國中均, 中山宜典, 西山和孝, “イオンエンジンによる動力飛行,” コロナ社, 2006, pp5.
- ¹¹ S. G. Claudepierre, Q. Ma, J. Bortnik, T. P. O'Brien, J. F. Fennell, J. B. Blake, “Empirically Estimated Electron Lifetimes in the Earth's Radiation Belts: Van Allen Probe Observations,” *Geophysical Research Letters* 47, 2020.
- ¹² J. P. Boeuf, “Tutorial: Physics and modeling of Hall thrusters,” *Journal of Applied Physics* 121, 011101, 2017.
- ¹³ A. I. Morozov, V. V. Savelyev, “Fundamentals of Stationary Plasma Thruster Theory,” *Reviews of Plasma Physics* 21, 2000.

- ¹⁴ A. Ducrocq, J. C. Adam, A. Héron, and G. Laval, "High-frequency electron drift instability in the cross-field configuration of Hall thrusters," *Physics of plasmas* 13, 102111, 2006.
- ¹⁵ J. Cavalier, N. Lemoine, G. Bonhomme, S. Tsikata, C. Honore, D. Gresillon, "Hall thruster plasma fluctuations identified as the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability: Modeling and fitting on experimental data," *Physics of plasmas* 20, 082107, 2013.
- ¹⁶ J. P. Boeuf, L. Garrigues, " $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability in Hall thrusters: Particle-in-cell simulations vs. theory," *Physics of plasmas* 25, 061204, 2018.
- ¹⁷ K. Hara, S. Tsikata, "Cross-field electron diffusion due to the coupling of drift-driven microinstabilities," *Physical Review E* 102, 023202, 2020.
- ¹⁸ T. Charoy, T. Lafleur, A. Alvarez Laguna, A. Bourdon, P. Chabert, "The interaction between ion transit-time and electron drift instabilities and their effect on anomalous electron transport in Hall thrusters," *Plasma Sources Science and Technology* 30, 065017, 2021.
- ¹⁹ Naoya Kuwabara, Masatoshi Chono, Naoji Yamamoto, Daisuke Kuwahara, "Electron Density Measurement Inside a Hall Thruster Using Microwave Interferometry," *Journal of Propulsion and Power* 37, 2021.
- ²⁰ J. Cavalier, N. Lemoine, G. Bonhomme, S. Tsikata, C. Honore, D. Gresillon, "Device convolution effects on the collective scattering signal of the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ mode from Hall thruster experiments: 2D dispersion relation," *Physics of plasmas* 19, 082117, 2012.
- ²¹ H. R. Kaufman, "Technology of Closed-Drift Thrusters," *AIAA journal* vol.23, 1983.
- ²² F. F. Chen, "Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion," Springer, Third Edition, 2018.
- ²³ Christophe R. Koppel, Frederic Marchandise, Denis Estublier, Laurent Jolivet, "The SMART-1 Electric Propulsion Subsystem In Flight Experience," *AIAA journal*, 3435, 2004.
- ²⁴ 寺田弘慈, 深津敦, "技術試験衛星 9 号機(ETS-9)の開発状況について," 宇宙開発利用部会, JAXA, 2021.
- ²⁵ 船木一幸, "ホールスラストが切り拓く宇宙探査の新時代," ISAS News, 475, 2020.
- ²⁶ 荒川義博, 小紫公也, 平川美晴, "ホール推進機," *AIAA journal* 46, 530, 1998.
- ²⁷ E. Y. Choueiri, "Plasma oscillations in Hall thrusters," *Physics of Plasmas* 8, 1411, 2001.
- ²⁸ 古川剛, 桜井康行, 宮坂武志, 藤原俊隆, "ホールスラストにおける低周波振動現象のプラズマ特性," *AIAA journal* 48, 561, 2000.
- ²⁹ N. Yamamoto, T. Nagakawa, K. komurasaki, Y. Arakawa, "Discharge Plasma Fluctuations in Hall thrusters," *Vacuum* 65, 3-4, 2002.

- ³⁰ 桑原直也, 森田大智, 山本直嗣, "ホールスラストの異常輸送の解明に向けた計測装置の開発," 平成 30 年度卒業論文, 九州大学, 2019.
- ³¹ H. Amemiya, M. Wada, H. Toyoda, K. Nakamura, A. Ando, K. Uehara, K. Oyama, O. Sakai, K. Tachiban, "Probe Measurements: Fundamentals to Advanced Applications," *Journal of Plasma Fusion Research* 81, 7, pp.482-525, 2007.
- ³² 桑原直也, 山本直嗣, "ホールスラストにおける異常輸送解明に向けた計測装置開発," 令和 2 年度 九州大学大学院 総合理工学府 先端エネルギー理工学専攻 修士論文, 九州大学, 2021.
- ³³ 赤崎正則, 村岡克紀, 渡辺征夫, 蛭原健治, "プラズマ工学の基礎," 産業図書, 2017.
- ³⁴ T. H. Stix, "Waves in Plasmas," American Institute of Physics, 1992.
- ³⁵ 井手俊介, "低域混成波を用いた電流分布制御と先進トカマク／定常プラズマ運転への応用," *J. Plasma Fusion Res.* 81, 3, 2005, pp.167-170.
- ³⁶ 山極満, 道下敏則, 西原宏, "低域混成波による電子加熱および電流駆動の数値解析," *核融合研究* 47, 4, 1982.
- ³⁷ 武田満喜, 出原敏孝, 石田美雄, "磁化プラズマ中の Bernstein 波の伝搬," 福井大学工学部研究報告 21, 2, 1973, pp.147-152.
- ³⁸ 長崎百伸, "電子バーンスタイン波による電子加熱と電流駆動," 平成 14 年度-平成 16 年度科学研究費補助金研究成果報告書, 2005.
- ³⁹ 牧野良平, 久保伸, "電子サイクロトロン共鳴加熱時の吸収電力評価及び熱・粒子輸送メカニズムの解明," 平成 26 年度名古屋大学大学院工学研究科エネルギー理工学専攻博士学位論文, 2014.
- ⁴⁰ D. W. Forslund, R. L. Morse, C. W. Nielson, "Electron Cycrotron Drift Instability," *Physical Review Letters* 25, 1266, 1970.
- ⁴¹ D. Forslund, R. Morse, C. Nielson, J. Fu, "Electron Cycrotron Drift Instability and Turbulence," *The Physical of Fluids* 15, 1303, 1972.
- ⁴² Liang Wang, Ammar Hakim, James Juno, Bhuvana Srinivasan, "Electron cyclotron drift instability and anomalous transport: two-fluid moment theory and modeling," *Plasma Sources Sci. Technol.* 31, 105001, 2022.
- ⁴³ 松清修一, "無衝突衝撃波における宇宙線加速と磁場増幅の観測・理論・シミュレーション," *J. Plasma Fusion Res.*, 92, 2, 2016, pp.87-92.
- ⁴⁴ V.E. Golant, A. P. Zhilinskii, I. E. Sakharov, "Fundamentals of Plasma Physics," John Wiley & Sons, 1980.

- ⁴⁵ 天野恒雄, “プラズマに於る最近の話題(III) : ドリフト波不安定性と異常拡散,” *物性研究* 10, 3, 1968, pp.242-257.
- ⁴⁶ J. P. Boeuf, L. Garrigues, “Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster,” *Journal of Applied Physics* 84, 3541, 1998.
- ⁴⁷ 加地郁夫, “プラズマ分散関数の計算コード,” *核融合研究* 17, 5, 1966.
- ⁴⁸ 渡辺二太, “プラズマ分散関数の高精度・高速数値計算法,” *核融合研究* 65, 5, 1991.
- ⁴⁹ PlasmaPy Developers, “The PlasmaPy Project,” <https://www.plasmapy.org/>
- ⁵⁰ G. V. Gordeev, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 6, 660 1952.
- ⁵¹ J. C. Adam, A. Héron, G. Laval, “Study of stationary plasma thrusters using two-dimensional fully kinetic simulations,” *Physics of Plasmas* 11, 295, 2004.
- ⁵² M. Nakano, N. Yamamoto, Y. Ohkawa, I. Funaki, “Performance Evaluation of Ion Engine Using Sublimable Substance as Propellant,” *Space Solar Power Systems Society* 6, 1-4, 2021.
- ⁵³ I. Funaki, “Possibility of Electric Propulsion and its usage of Alternative Propellant for Space Science and Exploration Missions,” *JSASS*, 4373, 2022.

謝辞

本修士論文を執筆するにあたり、私のプラズマに関する知識の希薄さ故、何度も質問や相談した際にはその度に何度も議論に応じて頂いたり、また核融合の研究に一部触れる機会を与えてくださった小菅佑輔准教授に心から感謝申し上げます。私に宇宙に関する分野での研究に関わる機会を提供していただき、インターン生の頃から研究に数多くの指摘をしていただいたり、ときには人としての在り方をご教授頂いた山本直嗣教授に深く感謝申し上げます。プラズマに関する議論を何度もしていただいたり、研究に関して様々な視点から質問をして頂いた森田大智助教に誠に感謝申し上げます。

私たちが快適に研究できるよう支援してくだり、またときに心の支えとなって頂いた大内田映子氏、宮本朋子氏に感謝申し上げます。

本修士論文の主査及び副査を担当していただいた糟谷直宏教授、藤澤彰英教授に感謝の意を表します。

I would like to express the deepest appreciation to Prof. Choi Gyung Min who supported my research at Pusan National University, and reviewed this master thesis submitted to PNU.

I would like to express the deepest appreciation to Ph.D. Nathan Schilling who discussed about research, and made opportunity of English talking and talked about each countries cultures and languages, and sometimes enliven the occasion by American joke.

その他私が修士課程の2年間を完遂するにあたり、様々なご支援、ご指摘を頂いたプラズマ・量子理工学メジャー、応用力学研究所、キャンパスアジア、釜山大学、JAXA 相模原キャンパス、以上の教職員の方々、また中部大学桑原大介准教授に感謝の意を表します

インターン生の頃、先進宇宙ロケット工学研究室について様々なことを教えて頂き、大学院生活、またキャンパスアジアでの生活などを教えて頂いた、齋木淳氏をはじめとする2019年度の在籍者の方々に感謝いたします。

研究室生活が楽しくなるよう盛り上げたり、ときには研究に関して真面目に議論して頂いたりした廣池匠哉氏、児島富彦氏、川邊智氏、胡泽丰氏、池邊将暉氏、蔵本英祐氏、児島拓仁氏、松尾涼人氏、以上研究室の先輩方に感謝いたします。

B4の頃、夜中に先輩たちから家に押しかけられた挙句、当時D3の先輩に部屋を荒らされ出禁にした金定功樹氏、日々音楽の話で盛り上がり、マレーシアへの旅の

第一歩を任せてくれたのにトラブルで飛行機の搭乗をギリギリにしてしまった古場健斗氏, 研究について一番議論したのに結局生態がほとんどつかめなかった手島洸樹氏, 学外での幸せな日常を頻繁にみんなにおすそ分けしてくれた前之園凱夫氏, 何度も大阪大学に飛ばされた村本裕耶氏, 学部生ながら研究室内でもトップレベルで研究をしているのに, 学会で研究室 OB の先輩に「時代の敗北者」という異名を与えられた松本遼太郎氏, いつ帰宅しているのか分からない桂直幹氏, 外国人留学生の圧力に怯えていた肥田愛蘭氏, また博多と天神で2回も遭遇した小出悠二氏ら後輩方に感謝いたします. 特にホールスラストの揺動についてミーティングの度に議論した手島洸樹氏と, PIC との比較のために解析を依頼し, データを共有し合った肥田愛蘭氏の, ホールスラスト研究グループの2人には深く感謝いたします.

バイクや車, ホールスラスト等の話で盛り上がり, たまにとち狂った発言をしたり, 何度も唐揚げ弁当を買ってきてくれた伊藤寛晟氏, アンパンマン掃除機はダイソンの並行輸入品であると主張する稲富泰紀氏, 飲み場を提供してくれた植永一汰氏, ホームページを自らの手で一新したり, 好奇心から iPhone のカメラにレーザーを当て破壊したりするなど変人選手権で殿堂入りを果たした枝澤氏友也氏, 研究室の兄貴役として, いつも実験室にこもり, サッカーで腕を複雑骨折し, そして某先輩の修論の謝辞に書かれなかったことをずっと根に持っている白木僚氏, そして高専本科の1年生から, 軽音部, 専攻科, 大学院, そして韓国に至るまで, 病める時も健やかなる時も富める時も貧しき時もともに9年間を過ごした川戸大誠氏, 以上同期の皆さんに深く感謝いたします. 就活お疲れ様会の後, バイトがある僕をおいてみんなで能古島に行っていたこと, またそのリベンジとして僕だけで能古島に行ったらコロナに罹ったことはずっと忘れないでしょう.

最後に, これまで私の人生を支えてくださった家族, 友人, その他関係者の方々に深く感謝いたします.

付録 A：計算に用いたパラメータ群

物理定数・実験パラメータ					
真空の誘電率	ϵ_0	8.85×10^{12}	F/m		
アボガドロ定数	N_a	6.02×10^{23}	-		
キセノン原子量	Xe	131.293	-		
スラスト長さ	L_x	14	mm		
スラスト幅	L_y	15	mm		
放電電圧	V_D	300	V		
印加電場	E	21428.57	V/m	$E = V_D/L_x$	
印加磁場	B	20	mT		
キセノン質量	M	2.18×10^{-25}	kg	$M = \text{Xe} \times N_a$	
電子質量	m	9.11×10^{-31}	kg		
電気素量	e	1.60×10^{-19}	C		
電子密度	n_e	1×10^{18}	m ⁻³		
電子温度[eV]	T_e	20	eV		
電子温度[J]	T_e	3.20×10^{18}	J	$T_e[\text{J}] = T_e[\text{eV}] \times e$	

プラズマパラメータ (計算値)

イオンサイクロトロン角周波数	ω_{ci}	14.70×10^3	rad/s	$\omega_{ci} = eB/M$
電子サイクロトロン角周波数	ω_{ce}	3.52×10^9	rad/s	$\omega_{ci} = eB/m$
イオンプラズマ角周波数	ω_{pi}	115.32×10^6	rad/s	$\omega_{pi} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 M}$
電子プラズマ角周波数	ω_{pe}	56.41×10^9	rad/s	$\omega_{pe} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m}$
イオンサイクロトロン周波数	f_{ci}	2.34	kHz	$f_{ci} = \omega_{ci} / 2\pi$
電子サイクロトロン周波数	f_{ce}	559.85	MHz	$f_{ce} = \omega_{ce} / 2\pi$
イオンプラズマ周波数	f_{pi}	18.35	MHz	$f_{pi} = \omega_{pi} / 2\pi$
電子プラズマ周波数	f_{pe}	8.98	GHz	$f_{pe} = \omega_{pe} / 2\pi$
イオン音速	c_s	3.83	m/s	$c_s = \sqrt{T_e / M}$
電子熱速度	v_{the}	1875.54	m/s	$v_{the} = \sqrt{T_e / m}$
電子ドリフト速度	v_D	1071.43	m/s	$v_D = E / B$
電子ラーマ半径	ρ_e	533.18	μm	$\rho_e = v_{the} / \omega_{ce}$
電子デバイ長	λ_{De}	33.25	μm	$\lambda_{De} = \sqrt{\epsilon_0 T_e / n_e e^2}$

付録 B : PlasmaPy のインストール手順

Plasmapy のホームページ : <https://www.plasmapy.org/>
Anaconda3 の場合のインストールの手順です (Ver.0.3.1 時点) . Pip 等その他のプラットフォームの場合は HP を参照してください.

I. パッケージのインストール(Web→PC)

`conda install -c "conda-forge/label/cf202003" plasmapy` を入力・実行

A. Jupyter notebook

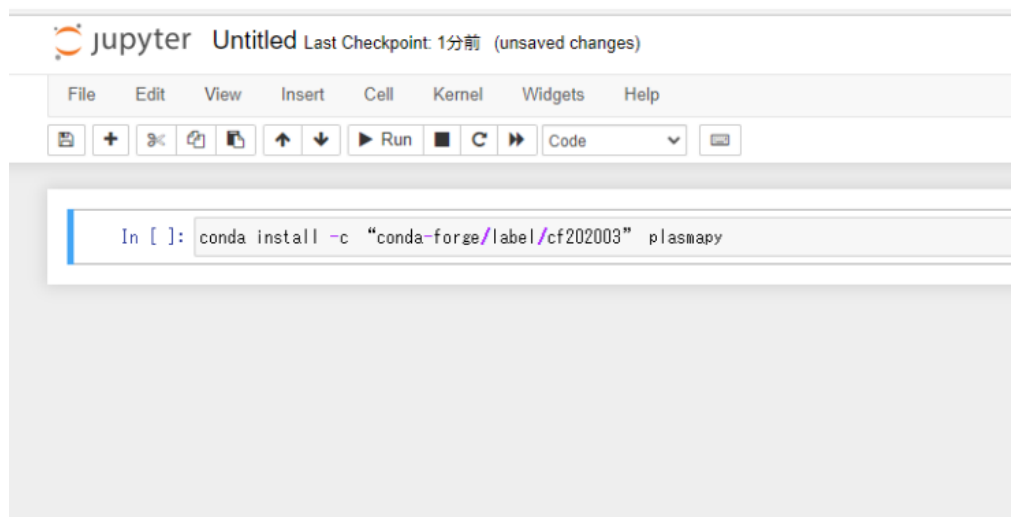


図 B-1 Jupyter notebook の場合のインストール方法

B. Spyder



図 B-1 Spyder の場合のインストール方法

II. 確認方法

1. プラットフォーム(spyder, jupyter 等)を閉じる
2. Anaconda を立ち上げる
3. Environments → Search packages で PlasmaPy を検索

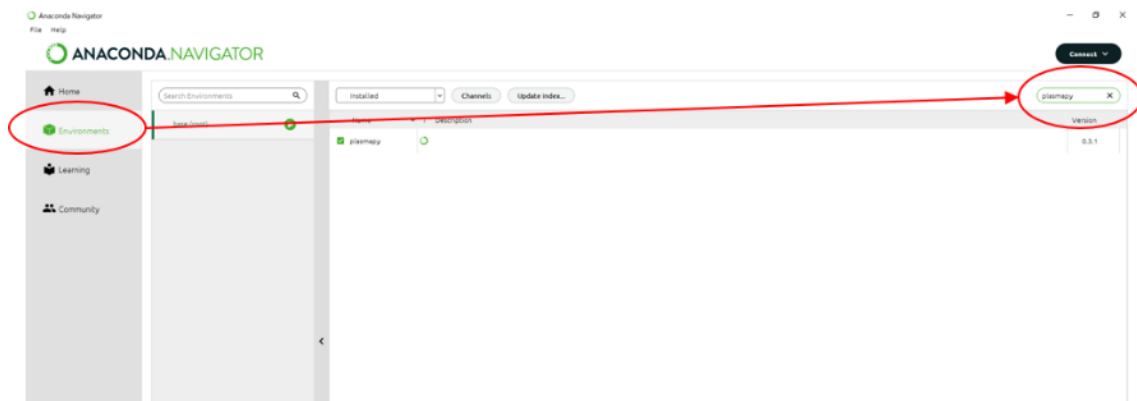


図 B-3 Anaconda3 での PlasmaPy のインストール確認方法

III. PlasmaPy でのプラズマ分散関数 $Z(\xi_n)$ の計算方法

1. `import plasmapy.formulary.dispersionfunction` と記入(パッケージ読み込み)
2. `z = plasmapy.formulary.dispersionfunction.plasma_dispersion_func(xi)`

※2023/02/16 時点では `plasmapy.dispersion.dispersionfunction` に変更されていました。このように細かいアップデート等が頻繁に行われる可能性があるので、うまく動作しない場合は PlasmaPy の HP を適宜確認してください。

```
6
7
8 import numpy as np
9 from scipy.special import iv
10 import plasmapy.formulary.dispersionfunction ←
11 import matplotlib.pyplot as plt
12 import time
13 import datetime
14
15
```

図 B-4 PlasmaPy パッケージ内プラズマ分散関数の読み込み

```
#Gordeev
O = (w_f - ky_ * Vd_) / wce_
X = (kx_**2 + ky_**2) * M_ / wce_**2
Y = kz_**2 * M_ / wce_**2

l = 10
Gm = 0
G = 0 + 0*1j
for m in range(-l, l+1):

    xi = (O - m) / np.sqrt(2 * Y)

    z = plasmapy.formulary.dispersionfunction.plasma_dispersion_func(xi) ←
    Gm += z * iv(m, X)

G = (O / np.sqrt(2 * Y)) * np.exp(-X) * Gm

grn = G.real
gin = G.imag
```

図 B-5 プラズマ分散関数の入力

付録 C : 計算コード

I. 図 4.4 の分散関係を計算する Python コードを以下に示す.

```
###パッケージのインストール
import numpy as np
from scipy.special import iv
import plasmapy.formulary.dispersionfunction
import matplotlib.pyplot as plt
import time
import datetime

Tstart = datetime.datetime.now()#計算開始時間の取得

#%%関数の定義
###Gordeev 関数
def Gordeev(O, X, Y):
    ###  $\Sigma$  の計算
    l = 25 #繰り返し回数
    Gm = 0
    for m in range(-l, l+1):
        xi = (O - m) / np.sqrt(2 * Y)# $\xi_n$ 
        z = plasmapy.formulary.dispersionfunction.plasma_dispersion_func(xi)#プラズマ分散関数
        Ve = iv(m, X)#ベッセル関数
        Gm += z * Ve

    Gc = (O / np.sqrt(2*Y)) * np.exp(-X) #  $\Sigma$  外の Gordeev 関数
    G = Gc * Gm
    return G

###分散関係
def Dispersion_relation(kx_, ky_, kz_, Vd_, M_, wce_):#カッコ内は規格化したパラメータ

    #初期値の定義
    w_ = 0
    g_ = 0
    w_f = 0
    k_ = np.sqrt(kx_**2 + ky_**2 + kz_**2)

    #反復計算
    for n in range(3):#発散するときは 1 にする
        #Gordeev 関数の引数
        O = (w_f - ky_ * Vd_) / wce_
        X = (kx_**2 + ky_**2) * M_ / wce_**2
        Y = kz_**2 * M_ / wce_**2

        G = Gordeev(O, X, Y)#Gordeev 関数

        grn = G.real#Gordeev 関数実部
        gin = G.imag#Gordeev 関数虚部
```

```

hn = 1 + k_**2 + grn

w_ = (1/np.sqrt(2)) * (k_ / np.sqrt(hn**2 + gin**2)) * np.sqrt(hn + np.sqrt(hn**2 + gin**2))
g_ = (1/np.sqrt(2)) * (k_ / np.sqrt(hn**2 + gin**2)) * np.sqrt(-hn + np.sqrt(hn**2 + gin**2))

w_f = (kx_ * ui_) + w_ + lj * g_

w_ = w_f.real#周波数
g_ = w_f.imag#成長率

return w_, g_

def Graph(xax, xmin, xmax, wmin, wmax, gmin, gmax):

    x = xax#x 軸関数の定義

    fig = plt.figure()
    plt.rcParams['font.family']="Times New Roman" #フォント

    ax1 = fig.add_subplot(2, 1, 1) #グラフ配置
    ax1.set_xlim(xmin, xmax)#x 軸の範囲
    ax1.set_ylim(wmin, wmax)#y 軸の範囲
    ax1.tick_params(direction = "in", labelsizе = 8)#軸目盛の設定
    ax1.plot(x, w_list_0[:], linestyle = "dashdot", label = label_vs0, color = 'black', lw=1)#プロット
    ax1.plot(x, w_list_1[:], linestyle = "dashed", label = label_vs1, color = 'blue', lw=1)#プロット
    ax1.plot(x, w_list_2[:], linestyle = "solid", label = label_vs2, color = 'red', lw=1)#プロット
    ax1.set_xlabel("$\\omega$ (rad/s)", fontsize = 8)#x 軸ラベル
    ax1.set_ylabel("$\\omega$ (rad/s)", fontsize = 8)#y 軸ラベル
    ax1.legend(loc = "best", fontsize = 8, borderpad=0.3, labelsрacing = 0.1, fancybox=False,
edgecolor="black")

    ax1.get_frame().set_linewidth(0.5)#凡例、改行してゐる
    ax1.set_title('Frequency', fontsize = 8)#グラフタイトル

    ax2 = fig.add_subplot(2, 1, 2) #グラフ配置
    ax2.set_xlim(xmin, xmax)#x 軸の範囲
    ax2.set_ylim(gmin, gmax)#y 軸の範囲
    plt.yticks(np.arange(gmin, (gmax*1.01), 0.05))#y 軸の目盛幅の設定
    ax2.tick_params(direction = "in", labelsizе = 8)#軸目盛の設定
    ax2.plot(x, g_list_0[:], linestyle = "dashdot", label = label_vs0, color = 'black', lw=1)#プロット
    ax2.plot(x, g_list_1[:], linestyle = "dashed", label = label_vs1, color = 'blue', lw=1)#プロット
    ax2.plot(x, g_list_2[:], linestyle = "solid", label = label_vs2, color = 'red', lw=1)#プロット
    ax2.set_xlabel("$\\omega$ (rad/s)", fontsize = 8)#x 軸ラベル
    ax2.set_ylabel("$\\omega$ (rad/s)", fontsize = 8)#y 軸ラベル
    ax2.legend(loc = "best", fontsize = 8, borderpad=0.3, labelsрacing = 0.1, fancybox=False,
edgecolor="black")

    ax2.get_frame().set_linewidth(0.5)#凡例、改行してゐる
    ax2.set_title('Growth rate', fontsize = 8)#グラフタイトル

    ###グラフサイズ・配置調整
    fig.set_size_inches(5.5, 5.5)#グラフ寸法
    fig.tight_layout()#配置の整理

    ###グラフ保存
    if SAVE == 1:
        plt.savefig('fig/dispersion relation %s.png'%time.time(), bbox_inches='tight', dpi=200); print("
保存完了")
    plt.show

```

```

%%パラメータ
###物理定数
ip = 8.85418782e-12 #[F/m], 真空の誘電率

###装置
Lx = 14e-3 #[m], スラスタ長
Lz = 15e-3 #[m], スラスタ幅
E = 300      #[V], 放電電圧
E0 = E/Lx    #[V/m], 印加電場
B = 20e-3    #[T], 印加磁場

###粒子定数[Xe, e]
e = 1.602176634e-19      #[C], 電子電荷
M = 2.181e-25            #[kg], Xe 質量
m = 9.1093837015e-31    #[kg], 電子質量
n = 1e18                 #[m^-3], 電子密度
Te = 20                  #[eV], 電子温度
Te = Te*e                #[J], 電子温度

###プラズマパラメータ
#イオン
wci = e*B/M              #[rad/s], イオンサイクロトロン角周波数
wpi = ((n*e**2)/(ip*M))**0.5 #[rad/s], イオンプラズマ角周波数
cs = (Te/M)**0.5 #[m/s], イオン音速
ui = 5e3               #[m/s], イオン速度

#電子
wce = e*B/m              #[rad/s], 電子サイクロトロン角周波数
wpe = ((n*e**2)/(ip*m))**0.5 #[rad/s], 電子プラズマ角周波数
De = ((ip*Te)/(n*e**2))**0.5  #[m], 電子デバイ長
Vd = E0/B                #[m/s], 電子ドリフト速度
Vthe = (Te/m)**0.5        #[m/s], 電子熱速度
re = Vthe/wce             #[m], 電子ラーマ半径

###規格化
ui_ = ui/cs
Vd_ = Vd/cs
Vthe_ = Vthe/cs
wce_ = wce/wpi
M_ = M/m

#####調節値
###比較パラメータ, kz の値
what = "$k_{z}$ $\lambda_{De}$ $"#凡例の文字
NUM = 3#反復回数
vs_list = np.zeros(NUM)
vs_list[0] = 0.01
vs_list[1] = 0.02
vs_list[2] = 0.04

#グラフの調節
xmin = 0
xmax = 1.201
wmin = 0
wmax = 1.0

```

```

gmin = 0
gmax = 0.4

SAVE = 10 #1 で save
#####

#Compare with kz_
for i in range(NUM):
    kx_ = 0.005
    ky_ = np.linspace(xmin, xmax, 1000)
    kz_ = 0.045
    kz_ = vs_list[i]

    kx = kx_ / De
    ky = ky_ / De
    kz = kz_ / De

    w_, g_ = Dispersion_relation(kx_, ky_, kz_, Vd_, M_, wce_)

    if i == 0:
        vs_0 = vs_list[i]
        w_list_0 = w_
        g_list_0 = g_
    elif i == 1:
        vs_1 = vs_list[i]
        w_list_1 = w_
        g_list_1 = g_
    elif i == 2:
        vs_2 = vs_list[i]
        w_list_2 = w_
        g_list_2 = g_
    print("計算終了")

###%%Graph
###凡例の文字
label_vs0 = f"{what} = f\"{vs_0}\"
label_vs1 = f"{what} = f\"{vs_1}\"
label_vs2 = f"{what} = f\"{vs_2}\"

xax = ky_
Graph(xax, xmin, xmax, wmin, wmax, gmin, gmax)

#計算時間
Tfinish = datetime.datetime.now()
print('Computing time %s' %(Tfinish-Tstart))

```

II. 図 11 の 2 次元コンターを計算するコードを以下に示す.

```
###パッケージのインストール
import numpy as np
from scipy.special import iv
import plasmapy.formulary.dispersionfunction
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
import time
import datetime

Tstart = datetime.datetime.now()#計算開始時間の取得

#%%関数の定義
###Gordeev 関数
def Gordeev(O, X, Y):
    ###  $\Sigma$  の計算
    l = 25 #繰り返し回数
    Gm = 0
    for m in range(-l, l+1):
        xi = (O - m) / np.sqrt(2 * Y)# $\xi_n$ 
        z = plasmapy.formulary.dispersionfunction.plasma_dispersion_func(xi)#プラズマ分散関数
        Ve = iv(m, X)#ベッセル関数
        Gm += z * Ve

    Gc = (O / np.sqrt(2*Y)) * np.exp(-X) #  $\Sigma$  外の Gordeev 関数
    G = Gc * Gm
    return G

###分散関係
def Dispersion_relation(kx_, ky_, kz_, k_, re, Vd_, De):#カッコ内は規格化したパラメータ

    #初期値の定義
    w_ = 0
    g_ = 0
    w_f = 0
    k_ = k_ / re

    #反復計算
    for n in range(1):
        #Gordeev 関数の引数
        O = w_f - ky_ * Vd_
        X = (kx_**2 + ky_**2)
        Y = kz_**2

        G = Gordeev(O, X, Y)#Gordeev 関数

        grn = G.real#Gordeev 関数実部
        gin = G.imag#Gordeev 関数虚部

        hn = 1 + (k*De)**2 + grn

        w_ = (1/np.sqrt(2)) * (k_ / np.sqrt(M_*(hn**2 + gin**2))) * np.sqrt( hn + np.sqrt(hn**2 + gin**2))
```

```

g_ = (1/np.sqrt(2)) * (k_ / np.sqrt(M_*(hn**2 + gin**2))) * np.sqrt(-hn + np.sqrt(hn**2 +
gin**2))

```

```

w_f = (kx_ * ui_) + w_ + lj * g_

```

```

w_ = w_f.real#周波数
g_ = w_f.imag#成長率

```

```

return w_, g_

```

```

def DDplot(x, y):#2D プロットの描写、x,y に何をプロットするか

```

```

X, Y = np.meshgrid(x, y)#メッシュ

```

```

xmin, xmax = min(x), max(x)
ymin, ymax = min(y), max(y)

```

```

fig = plt.figure()

```

```

ax1 = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax1.set_xlim(xmin, xmax)#x 軸の範囲
ax1.set_ylim(ymin, ymax)#y 軸の範囲
ax1.set_xlabel("$\\omega_{k,x} \\rho_{e}$", fontsize = 14)#x 軸ラベル
ax1.set_ylabel("$\\omega_{k,y} \\rho_{e}$", fontsize = 14)#y 軸ラベル
Freq = ax1.pcolormesh(X, Y, w_list, cmap="CMRmap_r", norm=mpl.colors.LogNorm(), vmin=3e5,
vmax=8e6)#プロット

```

```

ppl = fig.colorbar(Freq, ax = ax1)#カラーバー
ppl.set_label("$\\omega$ [Hz]", fontsize = 14)#カラーバーのラベル
ax1.set_title('Frequency', fontsize = 10)#グラフタイトル
fig.set_size_inches(6, 5)#グラフサイズ
fig.tight_layout()#配置の整理

```

```

#波数メモ

```

```

fig.text(0.4, 0, "${k_z} \\rho_e = f_{k_z}$", )

```

```

#保存

```

```

if SAVE == 1:

```

```

    plt.savefig('fig/dispersion relation %s.png'%time.time(), bbox_inches='tight', dpi=200); print("
保存完了")

```

```

    plt.show()

```

```

#%%パラメータ

```

```

###物理定数

```

```

ip = 8.85418782e-12 #[F/m], 真空の誘電率

```

```

###装置

```

```

Lx = 14e-3 #[m], スラスタ長

```

```

Lz = 15e-3 #[m], スラスタ幅

```

```

E = 300 #[V], 放電電圧

```

```

E0 = E/Lx #[V/m], 印加電場

```

```

B = 20e-3 #[T], 印加磁場

```

```

###粒子定数[Xe, e]

```

```

e = 1.602176634e-19 #[C], 電子電荷

```

```

M = 2.181e-25 #[kg], Xe 質量

```

```

m = 9.1093837015e-31 #[kg], 電子質量

```

```

n = 1e18 #[m^-3], 電子密度

```

```

Te = 20 #[eV], 電子温度

```

```

Te = Te*e          #[J], 電子温度

###プラズマパラメータ
#イオン
wci = e*B/m        #[rad/s], イオンサイクロトロン角周波数
wpi = ((n*e**2)/(ip*M))**0.5  #[rad/s], イオンプラズマ角周波数
cs = (Te/M)**0.5    #[m/s], イオン音速
ui = 17e3           #[m/s], イオン速度

#電子
wce = e*B/m        #[rad/s], 電子サイクロトロン角周波数
wpe = ((n*e**2)/(ip*m))**0.5  #[rad/s], 電子プラズマ角周波数
De = ((ip*Te)/(n*e**2))**0.5  #[m], 電子デバイ長
Vd = E0/B          #[m/s], 電子ドリフト速度
Vthe = (Te/m)**0.5  #[m/s], 電子熱速度
re = Vthe/wce      #[m], 電子ラーマ半径

###規格化
ui_ = ui/Vthe
Vd_ = Vd/Vthe
Vthe_ = Vthe/Vthe
wce_ = wce/wce
M_ = M/m

LEN = 400#メッシュのサイズ
w_list = np.zeros((LEN, LEN))
g_list = np.zeros((LEN, LEN))

#####保存
SAVE = 10 # 1 で save
#####

kx_min = 0
kx_max = 1.2
ky_min = 0
ky_max = 1.2
kz_ = 1.0

#x 軸は for,y 軸は np.linspace で並べる
for t in range(LEN):
    kx_range = (LEN-1)/(kx_max - kx_min)#Max と MMin をメッシュサイズで割ってる

    kx_ = t/kx_range + kx_min
    ky_ = np.linspace(ky_min, ky_max, LEN)
    kz_ = kz_

    k_ = np.sqrt(kx_**2 + ky_**2 + kz_**2)
    w_, g_ = Dispersion_relation(kx_, ky_, kz_, k_, re, Vd_, De)

    w_list[:, t] = w_ * wce / (2 * np.pi)

#計算度合い算出
Per = (t/LEN) * 100
Check = Per % 10
if Check == 0:
    print('%s パーセント完了  %s'%(round(Per)))

```

```
kx_ = np.linspace(kx_min, kx_max, LEN)#kx_の再定義(メッシュ作成用)
#%%% 2D Mapping

x = kx_
y = ky_

DDplot(x, y)

Tfinish = datetime.datetime.now()
Cost = Tfinish - Tstart
print('Computing time %s' %(Tfinish-Tstart))
```