

## 建築構造物の $H^\infty$ ノルムを最小化する最適ダンパー配置

山本, 薫  
京都大学工学研究科都市環境工学専攻 : 大学院生

藤田, 皓平  
京都大学工学研究科都市閑楼工学専攻 : 大学院生・工修

竹脇, 出  
京都大学工学研究科建築学専攻 : 教授・工博

<https://hdl.handle.net/2324/6791126>

---

出版情報 : Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ). 75 (658), pp.2163-2170, 2010-12. Architectural Institute of Japan

バージョン :

権利関係 :

# 建築構造物の $H^\infty$ ノルムを最小化する最適ダンパー配置

## OPTIMAL DAMPER PLACEMENT IN BUILDING STRUCTURES FOR $H^\infty$ NORM

山本 薫\*, 藤田 皓平\*\*, 竹脇 出\*\*\*  
Kaoru YAMAMOTO, Kohei FUJITA and Izuru TAKEWAKI

This paper aims to obtain an optimal viscous damper placement for building structures using  $H^\infty$  optimization. The  $H^\infty$  norm of the transfer function matrix is adopted as the objective function. Since it represents the magnitude of vibration transfer, one can attenuate the gain of the frequency response by minimizing this norm. The sequential quadratic programming (SQP) method is employed for optimization. The proposed method is also applicable to a various structural models as well, e.g., a bending-shear building model and a framed structure model. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed design method.

**Keywords:**  $H^\infty$  norm, Transfer function, Optimal damper placement, Vibration control, SQP method  
 $H^\infty$  ノルム, 伝達関数, 最適ダンパー配置, 振動制御, 逐次2次計画法

### 1. 序

中高層建物の設計では、制振構造（特にパッシブダンパー）を採用する事例が増えている。建物にダンパーをどのように配置するかによりその応答が異なるため、ダンパーを適正に配置することはダンパーの有効活用及び経済性の観点から極めて重要である。パッシブダンパーの最適配置法に関する研究はこれまで数多く行われてきた<sup>1)</sup>。これらの多くはある特定の入力に対する建物の応答を評価基準として用いている。しかし、個別の入力により最適なダンパー配置が異なるため、あらゆる入力に対して最適性が保証されるわけではない。また、建物はしばしば多くの不確定要素を含んだ地震動を受けるため<sup>2)</sup>、これらの不確定要素を考慮に入れた設計を行う必要がある。竹脇は、入力によらない建物モデル固有の伝達関数の最大振幅値を評価関数とする最適ダンパー配置法を提案している<sup>3)</sup>。しかし、1次固有振動数に対する伝達関数のピーク和のみを扱っていることから、必ずしも一般性の高い方法とはいえない。

本論文では、建物への入力から出力に至る伝達関数行列の  $H^\infty$  ノルムを評価関数として導入し、幅広い周波数帯域で対応可能なダンパー配置法を提案する。この有効性については5.1.1節で述べる。最適化手法としては、逐次2次計画法を用いる。 $H^\infty$  ノルムとは制御工学の分野において近年発展している  $H^\infty$  制御理論における評価基準であり<sup>4)</sup>、「制振性能」と未知外乱などに対する「ロバスト安定

性」の2つの要求を数学的に表すことを可能とする。建物の  $H^\infty$  ノルムは、数学的には全周波数域における伝達関数マトリクスの最大特異値の上限値を表す。最大特異値はすべての入力に対する出力の最大の増幅率を表すので、 $H^\infty$  ノルムを低減することは、建物にとって最悪な入力に対する振動を抑制することを意味し、上記の不確定要素を有する入力に対しても有効であるといえる。

建物の最適設計において、 $H^\infty$  ノルムを評価指標とする研究は、これまでも行われてきた。たとえば長谷らは、骨組構造物の各部分材の断面積を設計変数として、 $H^\infty$  ノルム（モード分解が可能なモデル）と全体の重量を評価基準とする2目的問題に取り組んでいる<sup>5)</sup>。また、Baiらは、 $H^\infty$  ノルムを評価基準とし、せん断型建物モデルへの最適ダンパー配置を行列不等式法を用いて求めている<sup>6,7)</sup>。行列不等式法は、 $H^\infty$  ノルムをある上限値以下に抑える問題を行列不等式の形で表し、その行列不等式を満たす解を求める手法である。最適ダンパー配置問題では、行列不等式は双線形行列不等式 (BMI) となり、非凸最適化問題となる。これを解く一般的な手段として、モンテカルロ法などの乱拓アルゴリズム (randomized algorithm) を採用する方法が挙げられるが、乱数を大きく発生させなければ良好な解が得られず、長い計算時間を要するという欠点がある。Baiらは、設計対象をコロケーションシステムに限定することで、最適ダンパー配置問題を線形行列不等式 (LMI) 最適化問題として定式化

\* 京都大学工学研究科都市環境工学専攻 大学院生

\*\* 京都大学工学研究科都市環境工学専攻 大学院生・工修

\*\*\* 京都大学工学研究科建築学専攻 教授・工博

Graduate Student, Dept. of Urban and Environmental Engineering, Kyoto University  
Graduate Student, Dept. of Urban and Environmental Engineering, Kyoto University,  
M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

し、この欠点を解消している。コロケーションシステムとは、機械システムにおいてセンサとアクチュエータが同位置、同方向に配置されたシステムであり、宇宙構造物によく見られる。Bai らの手法はこれをパッシブシステムに適用したものであるが、コロケーションシステムでは出力の係数行列が入力係数行列と転置の関係にあるため、評価できる出力の種類は限定されたものとなる。本論文ではこのような限定を用いず、より一般的な場合についての最適ダンパー配置問題を提案する。

本論文で提案する手法の特徴は、(1) 幅広いタイプの地震動に対して有効であること、(2) 感度表現を数式的に導くことなくコロケーションシステムに限定されない様々な建物モデル及び種々の応答量に対して適用可能であることである。

## 2. $H^\infty$ ノルム

### 2.1 周波数領域での定義

一般に、 $H^\infty$  ノルムは安定な伝達関数行列  $\mathbf{T}(i\omega)$  に対して定義され、次式で表される<sup>8)</sup>。

$$\|\mathbf{T}(i\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega)) \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega))$  は周波数応答関数行列  $\mathbf{T}(i\omega)$  の最大特異値であり、最大固有値  $\lambda_{\max}(\cdot)$  を用いて次のように表される。

$$\sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega)) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{T}^*(i\omega)\mathbf{T}(i\omega))} \quad (2)$$

( $\cdot$ )<sup>\*</sup> は複素係数行列の共役転置を表す。 $H^\infty$  ノルムは  $\omega$  を変動させた場合の最大特異値  $\sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega))$  の上限値である (図 1 a)。図 1 a において、 $\|\mathbf{T}(i\omega)\|_\infty$  はある特定量に対する伝達関数振幅を表す。

特に、 $\mathbf{T}(i\omega)$  がスカラーの場合には、 $\sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega)) = |\mathbf{T}(i\omega)|$  であるから、 $H^\infty$  ノルムは周波数応答関数の最大値を与える (図 1 b)。

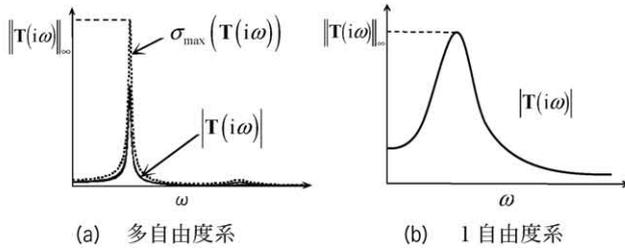


図 1 周波数応答曲線と  $H^\infty$  ノルム

### 2.2 時間領域での定義

$H^\infty$  ノルムの時間領域での意味を考えることは有用であるため、本節において示す。

信号の大きさを測る尺度のひとつとして、 $L_2$  ノルムがある。時間  $t \geq 0$  で定義された信号  $\mathbf{w}(t)$  の  $L_2$  ノルムは次式で定義される。

$$\|\mathbf{w}\|_2 = \left( \int_0^\infty \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3)$$

ここで、 $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムを表す。この積分が有限確定するとき、 $\mathbf{w}(t) \in L_2$  と書く。  $L_2$  ノルムの二乗値  $\|\mathbf{w}\|_2^2$  は、信号のエネルギーを表す量である。 $H^\infty$  ノルムは、任意の入力  $\mathbf{w}(t) \in L_2$  の  $L_2$  ノルムに対する出力  $\mathbf{z}(t)$  の  $L_2$  ノルムの比の上限と等しいことが知られている。すなわち、伝達関数  $\mathbf{T}(i\omega)$  の  $H^\infty$  ノルムは、時間領域では次のように表される。

$$\|\mathbf{T}\|_\infty = \sup_{\mathbf{w} \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} \quad (4)$$

これより、 $H^\infty$  ノルムは信号のエネルギーの最大増幅率を表すと解釈できる。 $\|\mathbf{z}\|_2$  の最大値を与える  $\mathbf{w}$  は最悪の外乱と呼ばれ、 $H^\infty$  ノルムは最悪外乱に対するシステムの応答の評価指標である。

入力信号が  $L_2$  に属さない持続的な信号の場合には、 $H^\infty$  ノルムは RMS (root mean square) 値で評価できる。RMS 値は持続的な信号の平均的な大きさを表す値として次式で定義される。

$$\|\mathbf{w}\|_{rms} = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (5)$$

RMS 値を用いれば、 $H^\infty$  ノルムは次式で表される。

$$\|\mathbf{T}\|_\infty = \sup_{\mathbf{w} \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_{rms}}{\|\mathbf{w}\|_{rms}} \quad (6)$$

### 3. 運動方程式と $H^\infty$ ノルム

地動加速度  $\ddot{u}_g$  を受ける  $N$  層建物の運動方程式は次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}(t)$  及び  $\mathbf{r}$  は、それぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列、建物の変位ベクトル及び影響係数ベクトルである。

状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を、 $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{u}(t)^T \quad \dot{\mathbf{u}}(t)^T]^T$  とおき、(7) 式を状態方程式に変換すると次式を得る。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}f_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \quad (8b)$$

$f_1(t)$  は外乱入力、 $\mathbf{F}$  はシステム行列、 $\mathbf{G}$  は入力行列、 $\mathbf{y}(t)$  は設計者が選定する出力ベクトル、 $\mathbf{H}$  は状態ベクトルと出力ベクトルを関連付ける出力行列であり、 $f_1(t)$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  は次式で与えられる。

$$f_1(t) = \ddot{u}_g(t), \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (9a-c)$$

また、このシステムの伝達関数行列  $\mathbf{T}(s)$  は次式で表される。

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \quad (10)$$

ここで  $s = i\omega$  はラプラスパラメータを表す。このとき、建物の  $H^\infty$  ノルムは次式で定義される<sup>8)</sup>。

$$\|\mathbf{T}\|_\infty = \|\mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} \left\{ \mathbf{H}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \right\} \quad (11)$$

## 4. $H^\infty$ ノルムを指標とする最適ダンパー配置

### 4.1 $H^\infty$ ノルム最小化問題

本論文では付加ダンパーとして粘性ダンパーを扱う。付加ダンパーの総量がある上限値を超えないという条件の下で、伝達関数  $\mathbf{T}(s)$  の  $H^\infty$  ノルムを最小化する次のような最適ダンパー配置問題を考える。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}) &= \|\mathbf{T}\|_\infty \\ \text{s.t. } w(\mathbf{c}) &\leq \bar{w}_c \\ 0 &\leq c_i \leq \bar{c}_i \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{c}$ ,  $w(\mathbf{c})$ ,  $\bar{w}_c$  及び  $\bar{c}_i$  はそれぞれ、付加ダンパー減衰係数ベクトル  $\{c_i\}$ 、付加ダンパー総量 (付加ダンパー減衰係数和)、付加ダ

ンパー総量の上限值，及び付加ダンパー減衰係数の上限値である。付加ダンパー総量  $w(\mathbf{c})$  は次式で与えられる。

$$w(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N c_i \quad (13)$$

この最適化問題のラグランジアンは次のように表される。

$$L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{c}) + \lambda(w(\mathbf{c}) - \bar{w}_c) + \boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{0} - \mathbf{c}) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \quad (14)$$

$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_i\}$  及び  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_i\}$  はラグランジュ乗数ベクトルであり， $\lambda$  はラグランジュ乗数である。

(12) 式の最適化問題を解くことにより，建物各層へのダンパーの投入量を決定する。ある層において投入量がゼロとなる場合は，ダンパーがその層に配置されないことを意味し，ダンパーが配置されない層がある場合も扱うことができる。

#### 4.2 逐次2次計画法による解法

逐次2次計画法は，制約付き非線形最適化問題の各反復において，部分近似問題として2次計画問題を解くことにより探索方向を決定し，最適解を求める手法である。本論文ではこの逐次2次計画法を用いて(12)式の最適化問題を解く。

各反復において，探索方向ベクトル  $\Delta \mathbf{c} = \{\Delta c_i\}$  を定めるために，(12)式の最適化問題の部分近似問題である次の2次計画問題を解く。

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{c})^T \Delta \mathbf{c} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{c}^T \nabla^2 L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}) \Delta \mathbf{c} \\ \text{s.t.} \quad & w(\mathbf{c}) - \bar{w}_c + \nabla w(\mathbf{c})^T \Delta \mathbf{c} = 0 \\ & -(c_i + \Delta c_i) \leq 0 \\ & c_i + \Delta c_i - \bar{c}_i \leq 0 \\ & \lambda \geq 0, \gamma_i \geq 0, \mu_i \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$\nabla^2 L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$  は，ラグランジアン  $L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$  の  $\mathbf{c}$  に関するヘッセ行列である。探索方向ベクトル  $\Delta \mathbf{c}$  が零ベクトルとなったときの付加ダンパー減衰係数ベクトル  $\mathbf{c}$  を最適解とする。

本論文では，各反復におけるヘッセ行列の正定準ニュートン近似を，次のBFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) 法<sup>9)</sup>を用いて更新する。

$$\mathbf{B}_{l+1} = \mathbf{B}_l + \frac{\mathbf{q}_l \mathbf{q}_l^T}{\mathbf{q}_l^T \mathbf{s}_l} - \frac{\mathbf{B}_l^T \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^T \mathbf{B}_l}{\mathbf{s}_l^T \mathbf{B}_l \mathbf{s}_l}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{I} \quad (16a)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_l &= \mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_l, \\ \mathbf{q}_l &= \nabla_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}_{l+1}, \lambda_{l+1}, \boldsymbol{\gamma}_{l+1}, \boldsymbol{\mu}_{l+1}) - \nabla_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}_l, \lambda_l, \boldsymbol{\gamma}_l, \boldsymbol{\mu}_l) \end{aligned} \quad (16b)$$

$l$  は反復回数を表す。(16)式の計算に必要となる，ラグランジアン  $L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$  の  $\mathbf{c}$  に関する勾配  $\nabla_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$  は，次式により得られる。

$$\nabla_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla f(\mathbf{c}) + \lambda \nabla w(\mathbf{c}) - \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\mu} \quad (17)$$

評価関数である  $H^\infty$  ノルムの勾配  $\nabla f(\mathbf{c})$  は解析的に求めることができないため，本論文では，付加ダンパー減衰係数ベクトル  $\mathbf{c}$  の微小な変化に対する評価関数の変化量を数値的に計算し，勾配  $\nabla f(\mathbf{c})$  を得る。

(15)式で表される2次計画問題の解法としては，有効制約法<sup>10)</sup>を用いる。2次計画問題を解くことにより得られる探索方向ベクトル  $\Delta \mathbf{c}$  を用いて，新しい反復における付加ダンパー減衰係数ベクトル  $\mathbf{c}$  を次式により決定する。

$$\mathbf{c}_{l+1} = \mathbf{c}_l + \alpha_l \Delta \mathbf{c}_l \quad (18)$$

ステップ幅  $\alpha_l$  は，次式で表されるペナルティ関数を十分に減少させるように決定する<sup>11)</sup>。

$$P(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c}) + \zeta(w(\mathbf{c}) - \bar{w}_c) + \sum_{i=1}^N \left\{ \rho_i \max(0, -c_i) + \eta_i \max(0, c_i - \bar{c}_i) \right\} \quad (19)$$

ここで， $\zeta, \rho_i, \eta_i$  は，以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_{l+1} = \max \left\{ \lambda, \frac{\zeta_l + \lambda}{2} \right\}, \quad \zeta_0 = \frac{\|\nabla f(\mathbf{c})\|}{\|\nabla w(\mathbf{c})\|}, \\ \rho_i &= (\rho_{l+1})_i = \max \left\{ \gamma_i, \frac{(\rho_l)_i + \gamma_i}{2} \right\}, \quad (\rho_0)_i = \|\nabla f(\mathbf{c})\|, \\ \eta_i &= (\eta_{l+1})_i = \max \left\{ \mu_i, \frac{(\eta_l)_i + \mu_i}{2} \right\}, \quad (\eta_0)_i = \|\nabla f(\mathbf{c})\| \end{aligned} \quad (20)$$

#### 5. 数値例題

本節では，本論文で展開した最適ダンパー配置法を用いて，図2ならびに図3に示す10層せん断型建物モデル及び10層曲げせん断型建物モデルに対する最適ダンパー配置解の数値解析例を示す。また，対象とする伝達関数を層間変位ならびに絶対加速度応答とし，本最適化手法が優れた汎用性を有することを示す。建物モデルの諸元を表1及び表2に示す。

表1 建物諸元

	せん断型モデル	曲げせん断型モデル
層数および階高 $h_i$	10層, 4[m]	
床面積および床質量	10[m]×10[m], 800[kg/m <sup>2</sup> ]	
骨組1次固有周期 $T_1$	1.00[s]	1.23[s]
骨組1次固有円振動数 $\omega_1$	6.28[rad/s]	5.10[rad/s]
各層せん断剛性 $k_i$	1次固有モードを直線形として決定	せん断型モデルの値を準用
各層回転慣性 $J_i$	1.33×10 <sup>6</sup> [kg・m <sup>2</sup> ]	
構造減衰係数	剛性比例型減衰であり，1次減衰定数 $\zeta$ を0.02として決定	
付加ダンパー総量 $\bar{w}_c$	6.64×10 <sup>7</sup> [Ns/m] (第1層が有する構造減衰の60倍)	

表2 せん断型モデルと曲げせん断型モデルの層剛性

層数 $i$	せん断型モデル		曲げせん断型モデル
	せん断剛性 $k_i$ [N/m]	せん断剛性 $k_i$ [N/m]	回転剛性 $s_i$ [N・m/rad]
1	1.73×10 <sup>8</sup>	1.73×10 <sup>8</sup>	8.18×10 <sup>10</sup>
2	1.71×10 <sup>8</sup>	1.71×10 <sup>8</sup>	8.03×10 <sup>10</sup>
3	1.64×10 <sup>8</sup>	1.64×10 <sup>8</sup>	7.74×10 <sup>10</sup>
4	1.55×10 <sup>8</sup>	1.55×10 <sup>8</sup>	7.29×10 <sup>10</sup>
5	1.42×10 <sup>8</sup>	1.42×10 <sup>8</sup>	6.69×10 <sup>10</sup>
6	1.26×10 <sup>8</sup>	1.26×10 <sup>8</sup>	5.95×10 <sup>10</sup>
7	1.07×10 <sup>8</sup>	1.07×10 <sup>8</sup>	5.06×10 <sup>10</sup>
8	0.853×10 <sup>8</sup>	0.853×10 <sup>8</sup>	4.02×10 <sup>10</sup>
9	0.600×10 <sup>8</sup>	0.600×10 <sup>8</sup>	2.83×10 <sup>10</sup>
10	0.316×10 <sup>8</sup>	0.316×10 <sup>8</sup>	1.49×10 <sup>10</sup>

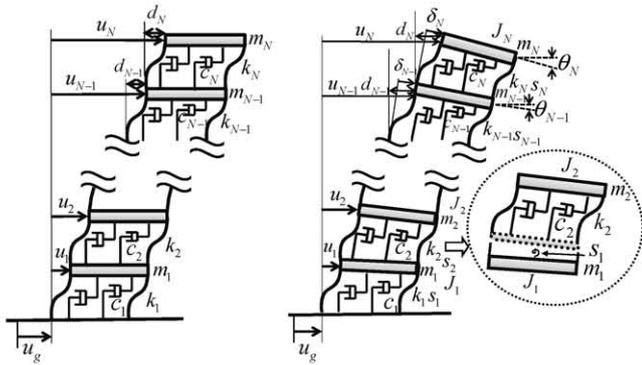


図2 せん断型建物モデル 図3 曲げせん断型建物モデル

### 5.1 せん断型建物モデル

表1及び図2に示す10層せん断型建物モデルにおいて、付加ダンパー総量の制約の下で、層間変位伝達関数の \$H^\infty\$ ノルムを最小化するダンパー配置を決定する。せん断型建物モデルの変位ベクトル \$\mathbf{u}(t) = \{u\_1 \dots u\_{10}\}^T\$ は、地動変位に対する各層の相対水平変位 \$u\_i\$ (\$i=1, \dots, 10\$) を成分とする10次元ベクトルである。また、質量行列、剛性行列及び影響係数ベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & m_{10} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & \mathbf{0} \\ -k_2 & \ddots & & \\ & \ddots & k_9+k_{10} & -k_{10} \\ \mathbf{0} & & -k_{10} & k_{10} \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \{1, \dots, 1\}^T \quad (21a-c)$$

ここで、\$m\_i\$ 及び \$k\_i\$ (\$i=1, \dots, 10\$) は、それぞれ第 \$i\$ 層における質量及びせん断剛性である。

減衰行列 \$\mathbf{C}\$ は、構造減衰行列 \$\mathbf{C}\_s\$ とダンパーによる付加減衰行列 \$\mathbf{C}\_d\$ の和であり、次式で表される<sup>12)</sup>。

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_d, \mathbf{C}_s = \frac{2\zeta}{\omega_i} \mathbf{K}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & & \mathbf{0} \\ -c_2 & \ddots & & \\ & \ddots & c_9+c_{10} & -c_{10} \\ \mathbf{0} & & -c_{10} & c_{10} \end{bmatrix} \quad (22a-c)$$

ここで、\$\zeta\$ 及び \$\omega\_i\$ は骨組の1次減衰定数及び1次固有円振動数であり、\$c\_i\$ (\$i=1, \dots, 10\$) は第 \$i\$ 層における付加ダンパー減衰係数である。

#### 5.1.1 層間変位伝達関数の \$H^\infty\$ ノルム最小化

出力を層間変位とするため、(8)式の入力ベクトル \$\mathbf{y}(t)\$ 及び出力行列 \$\mathbf{H}\$ は、次式で表される10次元ベクトル及び \$10 \times 20\$ 行列となる。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{d}(t), \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (23a, b)$$

ここで、\$\mathbf{d}(t) = \{d\_1 \dots d\_{10}\}^T\$ は層間変位ベクトルである。

図4は、付加ダンパー総量の上限値 \$\bar{w}\_c\$ の変化に対する \$H^\infty\$ ノルムの値を、本論文で提案した方法により求めた最適配置の場合 (optimal) と、他の様々なダンパー配置 (ランダム生成) の場合について図示したものである。本手法により得られた最適配置はグローバル最適解となっていることが確認される。

以後の例では、付加ダンパー総量の上限値 \$\bar{w}\_c\$ は、表1で与えられるものとする。また、各層の付加ダンパー減衰係数の上限値 \$\bar{c}\_i\$ は

総量の上限値 \$\bar{w}\_c\$ とする。付加ダンパー減衰係数ベクトルの初期値としては第1層のみに全量を配置したものを採用する。逐次2次計画法を用いて得られた(12)式の \$H^\infty\$ ノルム最小化問題に対する最適ダンパー配置解を図5に示す。さらに、層間変位伝達関数振幅において層方向ならびに周波数域での最大値を評価関数とし、これを最小化する最適化問題 (層間変位伝達関数最大振幅最小化最適設計問題, Appendix) を解いて得られる最適ダンパー配置解を、同じく図5に示す。本手法では、従来の最適設計問題 (Appendix) に比べ、高層部へより多くのダンパーが付加されることがわかる。これは、序文でも述べたように、本手法では伝達関数行列の \$H^\infty\$ ノルムを評価関数として導入し、幅広い周波数帯域で対応可能なダンパー配置法を提案しているため、高層部における伝達関数 (結果として2次の固有振動数における伝達関数) を適切に抑制するように高層部へより多くのダンパーが付加されているものと考えられる (図7参照)。

また、粘性ダンパーの支持部材剛性はそのダンパー性能に大きく影響するため、支持部材剛性の影響を考慮した場合の最適ダンパー配置解を図6に示す。図6(a)及び(b)では、フレーム層剛性に対する支持部材剛性の比 (支持部材剛性比) を、それぞれ0.5及び1.0としている。図より、支持部材剛性はそのダンパー性能に大きく影響するが、全層において同じような効果であるため最適配置にはあまり影響を及ぼさないことがわかる。従来の方法では、支持部材剛性の影響を考慮する場合に、評価関数のダンパー投入量に対する感度式を新たに誘導する必要があったのに対し、本手法ではそのような必要がなく、支持部材剛性の影響を簡便に取り扱うことができるという長所を有している。

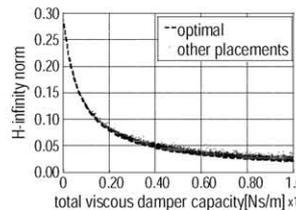


図4 ダンパー総量の変化に対する \$H^\infty\$ ノルム

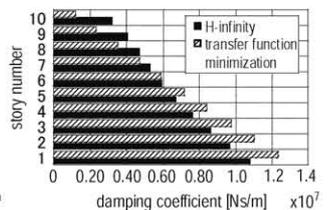
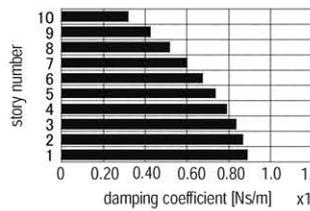
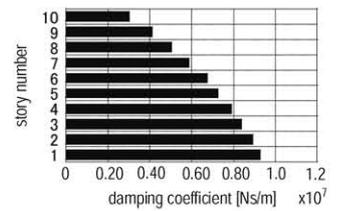


図5 最適ダンパー配置

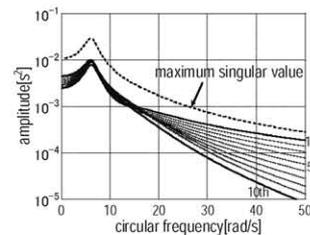


(a) 支持部材剛性比0.5

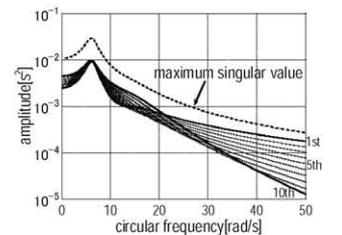


(b) 支持部材剛性比1.0

図6 支持部材剛性の影響を考慮した最適ダンパー配置



(a) \$H^\infty\$ ノルム最小化法



(b) 伝達関数振幅最小化法

図7 層間変位伝達関数振幅と最大特異値

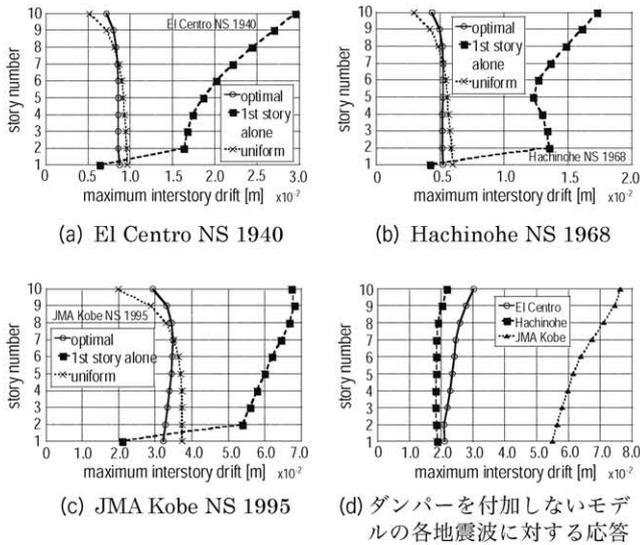


図 8 種々のダンパー配置（最適，1層のみ，一様）を有するモデル及びダンパーを付加しないモデルの記録地震波に対する最大層間変位応答

以下では，支持部材剛性の影響を考慮しない場合について得られた結果を示す。図 7(a)及び(b)は，それぞれ，本手法による最適配置とした場合，及び，層間変位伝達関数最大振幅最小化最適設計問題による最適配置とした場合についての層間変位伝達関数振幅と最大特異値を対数軸で示したものである。図 7(a)及び(b)を比較すれば，1次モードに対する伝達関数振幅はほぼ同値であるが，高次のモード（特に2次）に対する伝達関数振幅は本提案手法の方がより効果的に低減されている。すなわち，本提案手法により得られたダンパー配置解は，幅広い周波数帯域での応答低減効果をもたらす。これは，層間変位伝達関数最大振幅最小化最適設計問題では1次のピークが全層で一致し，その結果，高次モードの影響を受けやすい高層部においては2次ピークが増大してしまうのに対して，本手法では伝達関数振幅が上層へいくほど減少し，高次のピークの増大を抑制できるためであると思われる。

図 8(a)–(c)は，種々の粘性ダンパー配置（最適配置，1層のみ配置，一様配置）を有する建物モデルに，種々の特性を有する記録地震波を入力し，各層の最大層間変位応答をプロットしたものである。ここでは，代表的な地震動として El Centro NS 1940，海溝型地震動として Hachinohe NS 1968，直下型地震動として JMA Kobe NS 1995 を用いている。また，図 8(d)には，各地震波について，付加ダンパーが無い建物モデルの最大層間変位応答を示す。これらの値はすべて時刻歴応答解析により求めたものである。図 8より，本論文で提案した最適ダンパー配置法は，種々の地震波に対して応答を低減することのできる有効な方法であることがわかる。また，図 8において一様配置と最適配置を比較すれば，7層付近で応答の大小関係が逆転している。これは，本手法による最適配置が， $H^\infty$  ノルムへの寄与が大きい低層部の伝達関数振幅を重点的に低減するようなダンパー配置となっているためである。高層部の応答を抑制したい場合は，高層部の伝達関数に重み付けをすることにより対応可能であると思われる。

### 5.1.2 絶対加速度伝達関数の $H^\infty$ ノルム最小化

出力を建物の絶対加速度とすると，(8)式において出力ベクトル  $y(t)$ 及び出力行列  $\mathbf{H}$  は，次式で表される 10次元ベクトル及び  $10 \times 20$  行列となる。

$$y(t) = \ddot{\mathbf{u}}_A(t), \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (24a, b)$$

ここで， $\ddot{\mathbf{u}}_A(t) = \{\ddot{u}_{A1} \cdots \ddot{u}_{A10}\}^T$  は絶対加速度ベクトルであり，次式で表される。

$$\ddot{\mathbf{u}}_A(t) = \ddot{\mathbf{u}}(t) + r\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (25)$$

建物の絶対加速度応答を抑えるためには，上層階の絶対加速度応答を抑えることが効果的であることはよく知られている。そこで，以下の3つの最適化問題を考える。

*Problem 1)* 全層の絶対加速度応答の抑制

*Problem 2)* 最上層の絶対加速度応答の抑制

*Problem 3)* 上層ほど重みをかけた全層の絶対加速度応答の抑制  
尚，全ての最適化問題において，付加ダンパー総量の上限値  $\bar{w}_c$  ならびに付加ダンパー減衰係数ベクトルの初期値は，5.1.1節で用いたものと同じとし，逐次2次計画法を用いてそれぞれの問題に対する最適ダンパー配置解を比較する。

*Problem 1)* 最適化問題は次のように表される。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}) &= \|\mathbf{T}\|_\infty \\ \text{s.t. } w(\mathbf{c}) &\leq \bar{w}_c \\ 0 &\leq c_i \leq \bar{c}_i \quad (i=1, \dots, 10). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで， $\mathbf{T}$  は(24)式を(10)式に代入して得られる絶対加速度伝達関数行列である。

図 9(a)は，*Problem 1* に対する最適ダンパー配置を表す。これを最適ダンパー配置 1(optimal 1)とする。

*Problem 2)* 最適化問題は次のように表される。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}) &= \|\mathbf{T}_{10}\|_\infty \\ \text{s.t. } w(\mathbf{c}) &\leq \bar{w}_c \\ 0 &\leq c_i \leq \bar{c}_i \quad (i=1, \dots, 10) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで， $\mathbf{T}_{10}$  は絶対加速度伝達関数行列  $\mathbf{T}$  の第 10 行を表す。すなわち，第 10 層の伝達関数行列である。

図 9(b)は，*Problem 2* に対する最適ダンパー配置を示す。これを最適ダンパー配置 2(optimal 2)とする。最適ダンパー配置 1 に比べて上層に比較的多くのダンパーが配置されている。

*Problem 3)* 最適化問題は次のように表される。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} f(\mathbf{c}) &= \|\mathbf{L}\mathbf{T}\|_\infty \\ \text{s.t. } w(\mathbf{c}) &\leq \bar{w}_c \\ 0 &\leq c_i \leq \bar{c}_i \quad (i=1, \dots, 10) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで， $\mathbf{L}$  は次式で与える重み行列である。

$$\mathbf{L} = \text{diag}(1^2 \cdots i^2 \cdots 10^2) \quad (29)$$

図 9(c)は，*Problem 3* に対する最適ダンパー配置を表す。これを最適ダンパー配置 3(optimal 3)とする。この配置は最適ダンパー配置 1 と 2 の中間的な配置となっている。



$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\delta}(t) \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & -h_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -h_{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{32a, b}$$

ここで、 $\boldsymbol{\delta}(t) = \{\delta_1 \cdots \delta_{10}\}^T$  はせん断変形ベクトルである。

付加ダンパー総量の上限值を  $\bar{m}_c = 6.64 \times 10^7$  [Ns/m] とし、各層の付加ダンパー減衰係数の上限値  $\bar{c}_i$  は  $\bar{m}_c$  とする。付加ダンパー減衰係数ベクトルの初期値を  $c_1 = 6.64 \times 10^7$  [Ns/m]、 $c_i = 0.00$  [Ns/m] ( $i = 2, \dots, 10$ ) (第1層のみに全量を配置) と設定し、逐次2次計画法を用いて(12)式の  $H^\infty$  ノルム最小化問題を解く。図11はそのときの最適ダンパー配置解を示す。

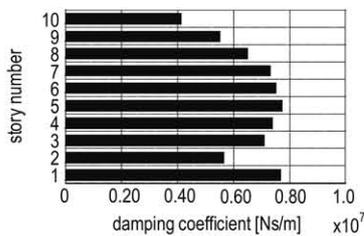


図11 最適ダンパー配置(せん断変形伝達関数の  $H^\infty$  ノルム最小化)

## 5.2.2 層間変位伝達関数の $H^\infty$ ノルム最小化

5.2.1 節と同じ10層曲げせん断型建物モデルにおいて、付加ダンパー総量の制約の下で、層間変位伝達関数の  $H^\infty$  ノルムを最小化するダンパー配置を決定する。ここで層間変位とは、図3における  $d_i (i = 1, \dots, N)$  を意味し、床面の回転による水平変位成分を含む層間相対変位を表す。このとき、(8)式における出力ベクトル  $\mathbf{y}(t)$  及び出力行列  $\mathbf{H}$  は、次式の10次元ベクトル及び  $10 \times 40$  行列となる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{d}(t) \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{33a, b}$$

ここで、 $\mathbf{d}(t) = \{d_1 \cdots d_{10}\}^T$  は層間変位ベクトルである。

5.2.1 節と同様に、付加ダンパー総量の上限值を  $\bar{m}_c = 6.64 \times 10^7$  [Ns/m] とし、各層の付加ダンパー減衰係数の上限値  $\bar{c}_i$  は  $\bar{m}_c$  とする。付加ダンパー減衰係数ベクトルの初期値を  $c_1 = 6.64 \times 10^7$  [Ns/m]、 $c_i = 0.00$  [Ns/m] ( $i = 2, \dots, 10$ ) (第1層のみに全量を配置) と設定し、逐次2次計画法を用いて曲げせん断型建物の床面の回転による水平変位成分を含む層間相対変位に対する(12)式の  $H^\infty$  ノルム最小化問題を解く。図12はそのときの最適ダンパー配置解を示す。5.2.1 節のせん断変形を対象とする場合に比べて、低層よりも中間層にやや多くのダンパーが配置されていることがわかる。これは、下層よりも中間層にダンパーを配置した方が全体曲げ変形を含む層間変位の抑制に有効であることを意味している。

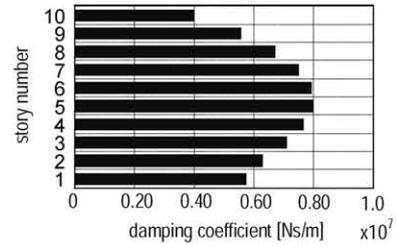


図12 最適ダンパー配置(層間変位伝達関数の  $H^\infty$  ノルム最小化)

## 6. 結論

本論文では、ダンパー総量を制約条件とし、伝達関数行列の  $H^\infty$  ノルムを評価関数とする最適ダンパー配置問題を種々の建物モデルに対して定式化した。  $H^\infty$  ノルムは全周波数域における伝達関数行列の最大特異値の上限值を表す。  $H^\infty$  ノルム最小化設計法は、入力周波数帯域が広範にわたる場合に特に有効であり、本論文により提案された手法は、様々なタイプの地震動に対して有効である。得られた主な成果は以下の通りである。

- (1)  $H^\infty$  ノルムを評価指標とした建物の最適設計問題は、これまで行列不等式法を用いた解法が一般的であった。一般に最適ダンパー配置問題では行列不等式は双線形行列不等式(BMI)となるため、解くことは困難である。モンテカルロ法などの乱拓アルゴリズムを併用する場合、乱数を大きく発生させなければ良好な解が得られず、長い計算時間を要するという欠点がある。また、制御対象をコロケーションシステムに限定すれば行列不等式は線形行列不等式(LMI)となり、容易に解くことができるが、評価できる出力が限られる。本論文では解法として逐次2次計画法を採用することで、対象モデルや出力の種類を限定することなく、  $H^\infty$  ノルムを評価指標としたダンパーの最適配置解を見出す新しい方法を提案した。
- (2) 本手法は、質量行列、減衰行列及び剛性行列を適切に設定することにより、様々な建物モデルを扱うことができる。さらに、出力ベクトル及び出力行列を適宜変更することにより、変位や加速度など、様々な応答に対する最適配置を見出すことが可能である。従来の方法では、モデルごとに応答や評価関数の感度式を誘導する必要があったのに対して、本提案手法ではその必要がなく、極めて汎用性が高いといえる。
- (3) せん断型建物モデルの層間変位及び絶対加速度、曲げせん断型建物モデルのせん断変形及び層間変位を対象とする数値例を扱い、最適配置以外の分布との比較や、種々の記録地震波に対する最大層間変位応答及び最大絶対加速度応答を示し、提案手法の有効性を示した。また、せん断型建物モデルの層間変位を対象とする場合について、本提案手法による解はグローバル最適解となることを例証した。これは、感度に基づく従来の方法では示すことが困難であった事柄である。
- (4) 絶対加速度伝達関数の  $H^\infty$  ノルム最小化問題においては、3パターン問題を提示し、コロケーションシステムに限定されない本提案手法の柔軟性及び広い適用性を示した。
- (5) 本提案手法はダンパーの支持部材の剛性の影響を考慮した場合にも容易に適用可能であることを示し、支持部材の剛性が最適配置に及ぼす影響を明らかにした。

## 謝辞

本研究の一部は日本学術振興会の科学研究費補助金による(No.21360267)、ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- 1) I.Takewaki: *Building control with passive dampers: -Optimal performance-based design for earthquakes-*, John Wiley & Sons (Asia), Singapore, 2009.
- 2) I.Takewaki: *Critical excitation methods in earthquake engineering*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- 3) I.Takewaki: Optimal damper placement for minimum transfer functions, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol.26, No.11, pp1113-1124, 1997.
- 4) 山田就康, 西谷 章:  $H^\infty$  制御理論による建造物の制振, 日本建築学会構造系論文報告集, No.444, pp23-31, 1993.2.
- 5) 長谷雅人, 池田雅夫: 建造物の2 目的設計—荷重和最小化による振動抑制と軽量化—, 第5回最適化シンポジウム講演論文集, pp.327-332, 2002.
- 6) Y. Bai, K. M. Grigoriadis, and M. A. Demetriou:  $H_\infty$  collocated control of structural systems: An analytical bound approach, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 5, pp. 850-853, 2005.
- 7) Y. Bai, K. M. Grigoriadis, and M. A. Demetriou: Damping parameter design in structural systems using an analytical  $H_\infty$  norm bound approach, *Proceedings of the 45<sup>th</sup> IEEE conference on Decision & Control*, San Diego, 2006.
- 8) 細江繁幸, 荒木光彦編著: 制御系設計— $H_\infty$  制御とその応用—, 朝倉書店, 1994.
- 9) 福島雅夫, 数理計画入門, 朝倉書店, 1996.
- 10) P.E.Gill, W.Murray, and M.H.Wright: *Practical optimization*, London, Academic

Press, 1981.

- 11) S.P.Han: A globally convergent method for nonlinear programming, Vol.22, *Journal of Optimization Theory and Applications*, p.297, 1977.
- 12) 柴田明徳: 最新 耐震構造解析, 第2版, 森北出版, 2003.
- 13) 竹脇 出, 中村恒善: 弾性支持された曲げ剪断型構造物モデルの混合型逆定式化による地震時変形制約設計, 構造工学論文集, Vol. 39B, pp.105-118, 1993.
- 14) K.Fujita, K.Yamamoto and I.Takewaki: Optimal damper placement for minimum transfer function of interstorey drift in shear building, *Proc. of The First Int. Conf. on Advances in Interaction and Multiscale Mechanics (AIMM'10)*, 30 May - 4 June, 2010, Korea, pp291-309.

Appendix: 層間変位伝達関数の最大振幅を最小化する最適設計問題  
次のような問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{c}) &= \max_{i, \omega} |H_{D_i}(\omega)| \\ \text{subject to } w(\mathbf{c}) &\leq \bar{w} \\ 0 \leq c_i &\leq \bar{c}_i \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned}$$

ここで,  $H_{D_i}(\omega)$  は第  $i$  層の層間変位の伝達関数を表す。評価関数としては伝達関数振幅が最大となる層の値が採用されるため, 途中で伝達関数振幅が最大となる層が入れ替わることもある。その場合には, 評価関数のダンパー投入量に対する感度が一般に不連続となり, 最適性条件が感度を用いて表現される場合には注意が必要となる<sup>14)</sup>。

(2010年4月30日原稿受理, 2010年9月3日採用決定)