

ラバルノズル内の非定常流体可視化画像に対する固有直交分解の適用

虎尾, 祐介

九州大学大学院総合理工学府総合理工学専攻機械・システム理工学メジャー

<https://hdl.handle.net/2324/6788191>

出版情報：九州大学，2022，修士，修士
バージョン：
権利関係：



令和 5 年 度

修 士 論 文

ラバルノズル内の
非定常流体可視化画像に対する
固有直交分解の適用

九州大学大学院総合理工学府

総合理工学専攻

機械・システム理工学メジャー

エネルギー流体科学研究室

虎尾 祐介

指導教員 安養寺 正之 准教授

提出年月日 令和 5 年 2 月 7 日

目次

第 1 章 研究背景及び目的	1
1.1 背景	1
1.2 研究目的	8
1.3 本論文の構成	8
第 2 章 固有直交分解の数理	9
2.1 固有直交分解 (POD)	9
2.1.1 POD の数理	9
2.1.2 Snapshot-POD	10
2.1.3 流れ場の縮約モデル	10
2.1.4 POD モードと流れ場の関係性	11
2.2 周波数領域での固有直交分解 (SPOD)	12
2.2.1 SPOD の数理	12
2.2.2 周波数領域での POD と空間成分のみの POD 関係性	13
2.2.3 データから SPOD モードの導出	14
第 3 章 実験条件及び解析条件	16
3.1 可視化実験	16
3.1.1 シュリーレン可視化とシャドウグラフ可視化	16
3.1.2 実験セットアップ	19
3.2 POD の適用	22
3.2.1 可視化画像に対する POD の適用方法	22
3.2.2 SPOD の適用	24
3.3 SPOD ALGORITHM	25
第 4 章 解析結果及び考察	27
4.1 SNAPSHOT-POD	27
4.1.1 固有値	27
4.1.2 POD モードの周波数特性と妥当性	29
4.1.3 POD 基底	34
4.1.4 流れ場の再構成	38
4.2 SPOD	43
4.2.1 固有値 (SPOD エネルギー効率), 周波数分解能の妥当性	44
4.2.2 ピーク周波数での SPOD 基底	47
4.2.3 SPOD 基底と主要流体现象の同定	48
第 5 章 結論	50

第1章 研究背景及び目的

1.1 背景

ラバルノズルとは、ノズルの形状としてその断面積を一度狭めてもう一度広げる時、すなわち流路の途中にスロート(流路断面積の最小部分)を設けることで、超音速流れを実現できるノズルであり、先細末広ノズル(convergent divergent nozzle)とも呼ばれる。ラバルノズルは、各種工業分野で幅広く利用されており、その例として、ロケットエンジンやガスカッターなど推力を得るための装置や、鉄鋼分野では製鋼工程において転炉内の銑鉄に超音速で酸素を吹き込み、酸化反応を促進させるためにも使用されている^(1,2)。これらの中でも、ロケットエンジンやジェットエンジンは、ノズル内外での流体现象(衝撃波など)による噴流騒音などの深刻な問題が報告されている。ロケットエンジンやジェットエンジンの起動・停止などの過渡期には、過膨張条件を通過する。この時発生する剥離流れによる非定常性が、ノズル推力軸方向に過大な横推力が発生することが知られている。実際に H-IIA ロケットの第一段エンジン、LE-7A の燃焼試験において起動・停止時にノズル部で過大な横推力が発生することが観察された^(3,4)。また、ノズル圧力比によって、ノズル内外の衝撃波や噴流と周囲の気体との干渉などが起因の様々な周波数の噴流騒音が発生することが知られている。それらの中には、特徴的な周波数での騒音や、音圧レベルの高いものもあり、騒音による流体機器の疲労が引き起こされることがある。これらの騒音特性やサイドロード現象について以下に詳しく述べる。

1.1.1 サイドロード現象

ノズル内の圧力が周囲圧力より低くなると、ノズル内は過膨張と呼ばれる状態になる。ノズル内の流れが過膨張の条件にある場合、衝撃波が発生しノズルの壁に衝突することがある。この衝撃波は、ノズル壁面付近の乱流と相互作用して渦構造を形成し、衝撃波の位置と下流側の流れに非定常性を生じさせることがある。この非定常性が横方向の推力、すなわちサイドロードを発生させ、ロケットの安定性に悪影響を及ぼすことがある。さらに、サイドロードはノズル壁自体の構造的・熱的な完全性に影響を与え、ノズルの寿命や再利用性を低下させる可能性がある。下流の複雑な流れは、FSS(Free shock separation)と、RSS(Restricted shock separation)に分類される。Fig.1.1 に FSS と RSS の模式図を示す。正常な剥離点である FSS から、剥離点下流に再付着流を伴う異常な剥離状態である RSS に遷移した際に、あるいはその逆の時に最大の荷重が発生する⁽⁵⁾。DLR(ドイツ航空宇宙センター)の Frey と Hagemann はアリアン 5 型ロケットのメインエンジンである Vulcain エンジンの起動及び停止時に発生する過大な横推力の研究を行なった。Vulcain エンジンのように初期膨張角を大きくしてノズル全長を短くする特徴を持つ Thrust Optimized(TO)ノズル形状には FSS から RSS への遷移が発生し、この遷移過程においてノズル内に周方向の圧力分布が微小時間に生じることにより大きな横推力が発生することを示した。また、米澤らは、横推力の原因解明のため、二次元超音速ノズルを用いた実験と三次元非定常 CFD の両面で研究を行なった。二次元超音速ノズルを用いた実験では、停止時にパルス的に生じる横推力は、剥離携帯が FSS から RSS に非対称に遷移する際に発生することが確認された。二次元超音速ノズルを用いてロケットノズル内部の流れを研究することには、有効性と問

題点がある。有効性は、実験でノズル内部の流れ場を容易に観察できることである。また、二次元非定常数値計算も短時間で行えるので、非対称な流れ場の詳細な解析が可能である。問題点は、断面積比が大きくなると実験では側壁での剥離が大きくなり、流れ場が三次元的ではなくなることである。三次元非定常 CFD では、LE-7A, LE-A, CTP50-R5-L の3種類のノズル形状を用いてシミュレーションを行い実験と比較した結果、横推力の発生条件など、定量的に実験と一致した結果になった⁽⁶⁾。

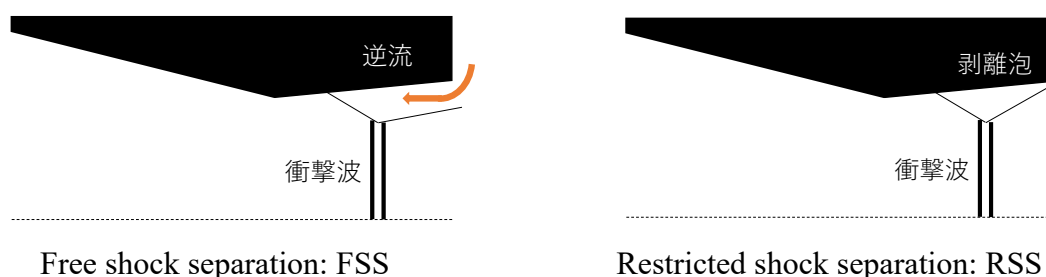


Fig.1.1 流れの状態模式図⁽⁵⁾

1.1.2 ラバルノズルから発生する流体音響

超音速噴流から発生する流体騒音は、比較的高いノズル圧力比で発生するものと比較的低い圧力比で発生するものに大きく分類できる。一般的によく知られている比較的高いノズル圧力比で発生する流体騒音は、乱流混合騒音、衝撃波連成騒音、スクリーチ音が挙げられる。これらは、衝撃波がノズルの外に存在する際に発生し、研究を盛んに行われてきた領域である。この3つの騒音の音圧スペクトル測定結果の例を Fig. に示し、以下にそれぞれの特徴を示す。

1.1.2.1 乱流混合騒音

乱流混合騒音(Turbulent mixing noise)とは、噴流と周囲の気体の間で擾乱と小さい渦および渦と渦との干渉が起こることによって発生する騒音である^(7, 8)。Fig.1.2 に示すように数 kHz の比較的低周波で支配的な騒音である。超音速ジェット機の大乱流構造と乱流混合騒音に関する確率的不安定モデル理論によって、超音速噴流の乱流混合騒音の支配的な部分のスペクトルと指向性、および大きな乱流構造に関連した乱流強度を、単一の乗法定数まで予測することができる。しかし、噴流のマッハ数と温度が低いと不安定波の伝播速度が大幅に低下することで、マッハ波のノイズ発生機構の効率が悪くなる。このとき、微細な乱流からのノイズ寄与を無視することができなくなるため、新たな包括的な理論を開発する必要がある。

1.1.2.2 衝撃波連成騒音

衝撃波連成騒音(Shock-associated noise)とは、ノズルから噴流が適正膨張ではなく、ノズル出口圧が背圧と一致しない過膨張か不足膨張の条件の際に発生する騒音である。また、ショックセル構造が振動したり、じょう乱と干渉したりすることによっても騒音が発生し、その音圧レベルも高い。中でも特に、流れの中に定在するショックセル構造を乱流が通過することによって超音速噴流振動となって発生する騒音は、広帯域の周波数領域で計測され、一般的にブロードバンド衝撃波連成騒音

(Broadband Shock-Associated Noise)と言われる。この騒音は、1970 年代に Harper-Bourne⁽⁹⁾と Fisher, Tanna⁽¹⁰⁾, のちに Tam⁽¹¹⁾によって詳細に研究された。

1.1.2.3 スクリーチ音

スクリーチ音(Screech tone)とは、衝撃波連成騒音に対して、超音速噴流に伴って発生する自励音で、音響フィードバック機構(Acoustic feedback loop)によって発生することが知られている。スクリーチ音に関する研究は、盛んにされており、その発生にメカニズムや低減法が明らかにされている。^(12, 13) 発生メカニズムは、スクリーチ音の音響フィードバック機構は、ショックセル構造と大きなじょう乱との干渉によって発生した音波が上流に伝播し、その一部がノズルリップに反射され、新たなじょう乱を生み出すというプロセスによって構成されている。また、スクリーチ音は、比較的高周波であり、指向性があることが報告されている。また、のずる圧力比と Screech tone の周波数は反比例関係にあることがわかっている。さらに、そのフィードバック機構の一部であるノズルリップの厚みを変化させることで音圧レベルが変化すること報告されており⁽¹⁴⁾、その低減法に関する研究も進んでいる。

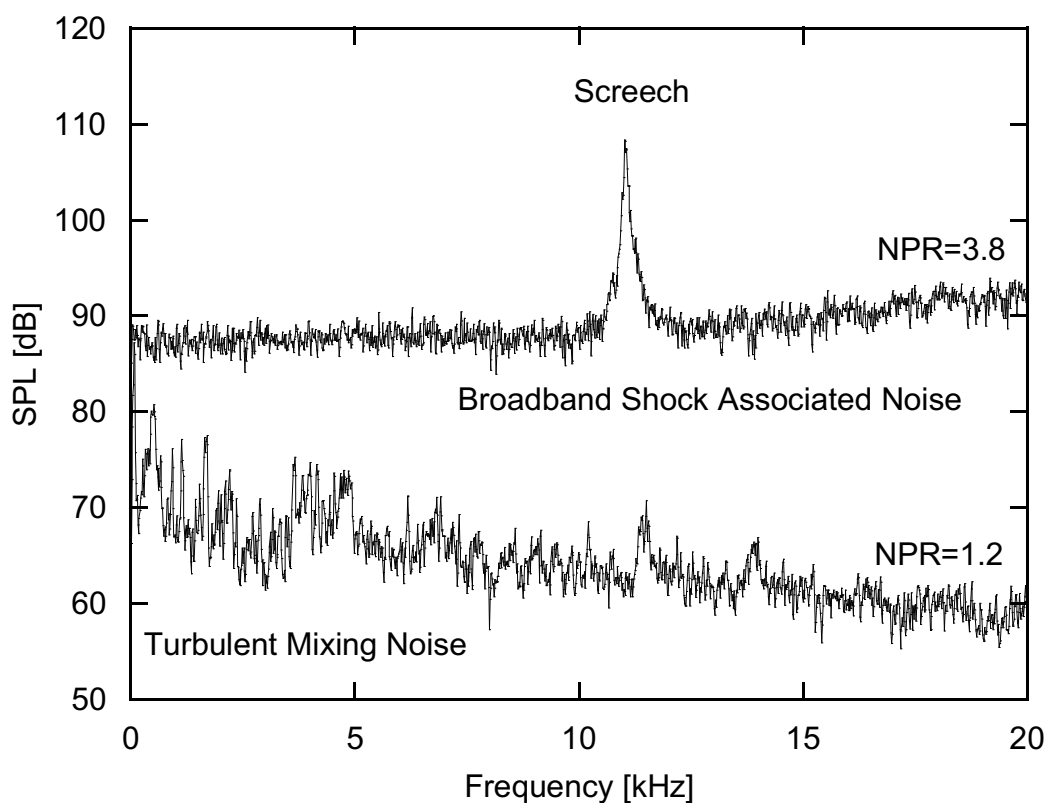


Fig.1.2 超音速噴流から発生する騒音⁽¹⁵⁾

1.1.2.4 遷音速流れで生じる Transonic tone

上記に紹介した超音速流れに伴って発生するスクリーチ音に対して、やや遅い遷音速流れでは“Transonic tone”と呼ばれる特徴的な周波数特性を持つ空力騒音が Zaman⁽¹⁶⁾らによって確認され、

その音響特性や低減法について詳細な研究が行われている。Fig.1.3 にスクリーチ音と Transonic tone のピーク周波数特性の比較を示す。Fig.1.3 に示されているように、スクリーチ音よりも低いノズル圧力比でラバルノズルから発生し、離散的かつ卓越したピーク音圧特性を持つ特徴を持つ。また、スクリーチ音ではノズル圧力比とピーク周波数が反比例の関係にあるのに対して、Transonic tone は比例の関係にあることが読み取れる。Transonic tone は Fig.1.3 中に(1)および(2)と示されているように周波数帯域の低い方から順に stage1, stage2 と定義されるノズル圧力比が変化すると不連続的にピーク周波数が変化する“stage jump”が存在する。各 stage において、Transonic tone の周波数は適正膨張マッハ数 M_j が増加するにつれて直線的に増加する。また Zaman らは複数のノズル形状においても実験を行なって、共鳴周波数がラバルノズルのスロートから出口までの長さ L 、末広部の広がり角 θ に依存していることを明らかにし、周波数の予測式を提案している。

$$\frac{f_N L}{m a_0} = C_1(\theta) + C_2(\theta)(M_j - 1), \quad m = 1, 3, 5 \dots \quad (1-1)$$

ここで、stage 1 では $C_1(\theta) = 0.298\theta^{-0.370}$, $C_2(\theta) = 0.952\theta^{-1.029}$, $m = 1$ で表され、stage 2 では $C_1(\theta) = 0.221\theta^{-0.325}$, $C_2(\theta) = 0.363\theta^{-0.8375}$, $m = 3$ で表され、stage 3 では stage 2 と同じ式で与えられ $m = 5$ で表される。また、stage 1 から stage 2 に変化する M_j は末広部の角度 θ に依存しており、

$$(M_j)_{1-2} = 1.036\theta^{-0.157} \quad (1-2)$$

で表される。

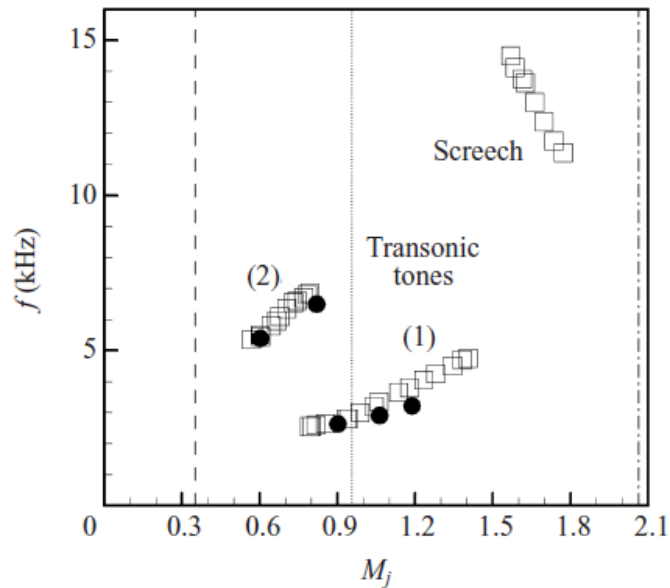


Fig.1.3 各 M_j におけるピーク周波数の変動⁽¹⁶⁾
($Dt = 0.3$, $De = 0.4$, $L = 0.75$, □:実験値, ●:数値解析結果)

また、石橋⁽¹⁷⁾は Transonic tone の発生源と考えられているノズル内部の流体现象をシュリーレン法による可視化と圧力計測の同期計測によって明らかにしようとした。その結果 stage1 と stage2 では流体现象は異なるものの、周期性を持った衝撃波の振動が Transonic tone の発生源なのではないかと明らかにした。すなわち、衝撃波によるノズル内の非定常現象が起因して発生することがわかった。

stage1 と stage2 の違いは、周期的な振動をする衝撃波のストロークの長さである。stage1 は、 $NPR=1.6\sim1.9$ の比較的高いノズル作動圧力比に見られ、stage2 は、 $NPR=1.4\sim1.5$ の比較的低いノズル作動圧力比で見られる。 $NPR=2.0$ では、特徴的なピーク周波数は確認されず、Transonic tone が発生しないと考えられる。stage2 では、衝撃波の足元から剥離した剪断層はノズル壁面に再付着せずに、剥離泡を形成した様子が確認されていない。短いストロークによる、特に先頭衝撃波が発生源ということがわかっている。それに対して、stage1 ではストロークが長いので、剥離泡やそれが崩壊することで発生する圧力波などが発生することが確認されている。そのため、stage1 は stage2 と比較してノズル内の流体现象が複雑になる。ここで、石橋が提案した stage1 における衝撃波発生メカニズムを示す。

・stage1 におけるノズル内の衝撃波振動メカニズム

Stage1 が顕著に確認された $NPR=1.6\sim1.9$ では、ノズル内で生じる大きな衝撃波自励振動に加えて、ノズル壁面での剥離泡が確認された。ここではまず、衝撃波振動に伴う剥離泡について述べる。ここでは、先頭衝撃波がスロートに再接近するまでを 1 周期 (T) と定義されている。1 周期の時間はフレーム数に算出すると約 0.41ms (約 2.4kHz) であった。Fig.1.4 に $NPR=1.6$ における $t = 3/9T, 4/9T$ の可視化画像と流れ場の模式図をそれぞれ示す。Fig.1.4(a) では、下流を移動している衝撃波がノズル出口付近に近づく過程で、境界層との干渉を強め、ノズル壁面に剥離泡が形成させることがわかった。剥離泡は、衝撃波とともに下流に移動していくが、ノズル出口付近に達した後は壁面に再付着できず、剥離泡を維持できなくなる。これを、剥離泡の崩壊という。この際、せん断層内部で再付着点付近にあった循環領域は回転を維持したまま、大規模な渦としてノズル外に放出される。また、周囲流体よりも負圧になっていた剥離せん断層内の逆流領域では周囲からの流入により、剥離点が上流に大きく押し戻される。このような剥離現象がノズル出口における有効断面積を変化させる。そのため、衝撃波は上流に移動し、もとの状態に戻る。

それらをもとに、石橋がまとめた stage1 の衝撃波発生メカニズムの考察を示す。衝撃波は以下の (1)~(7) のプロセスで形成されるループになる。それらに対応した $NPR=1.6$ での時系列可視化画像を Fig.1.5 に示す⁽¹⁷⁾。

- (1) 剥離泡の崩壊によって剥離せん断層内に周囲からの流入が発生し、せん断層内の厚みが増加することによって、ノズル出口における有効断面積が減少する。(t = 4/9T)
- (2) ノズル出口における有効断面積の減少により、衝撃波背後の圧力が変化し、衝撃波はノズル出口の静圧と背圧の不連続性を調整するため、上流へと移動し始める。(t = 4/9T~8/9T)
- (3) 衝撃波が上流へ移動することで、衝撃波への流入マッハ数は減少し、衝撃波はより弱い衝撃波となる。(t = 8/9T~0T)
- (4) 弱い衝撃波は境界層との干渉を緩和し、剥離せん断層は徐々に薄くなる。(t = 0~1/9T)

- (5) ノズル出口の有効断面積の増加に伴い、ノズル出口の静圧と背圧の圧力勾配を調整するために衝撃波は徐々に下流に移動していく.($t = 1/9T \sim 2/9T$)
- (6) 衝撃波の下流への移動に伴い、衝撃波への流入マッハ数は増加する.これにより、衝撃波と境界層の干渉は徐々に強くなり、ノズル壁面では剥離せん断層および剥離泡が形成される.($t = 3/9T$)
- (7) 衝撃波がノズル出口付近到達すると、剥離泡は再付着せず、再び崩壊する.($t = 4/9T$)

これらの衝撃波発生メカニズムはシュリーレン可視化と圧力計測の同期計測による定性的評価のもと得られた知見にすぎず、妥当性検証が実験、解析の双方で必要である.そこで、注目したのが固有直交分解である.流体力学の分野では、流れ場解析や空力騒音解析、流れ場制御に応用されていて、近年盛んに研究が進められている.その中でも、高速噴流や噴流騒音(スクリーチ音)にも適用例があり、そのメカニズムを明らかにしている.それらを踏襲し、**Transonic tone** に適用することで、そのメカニズムの解明につなげられるのではないかと考えた.下記に固有直交分解を説明する.

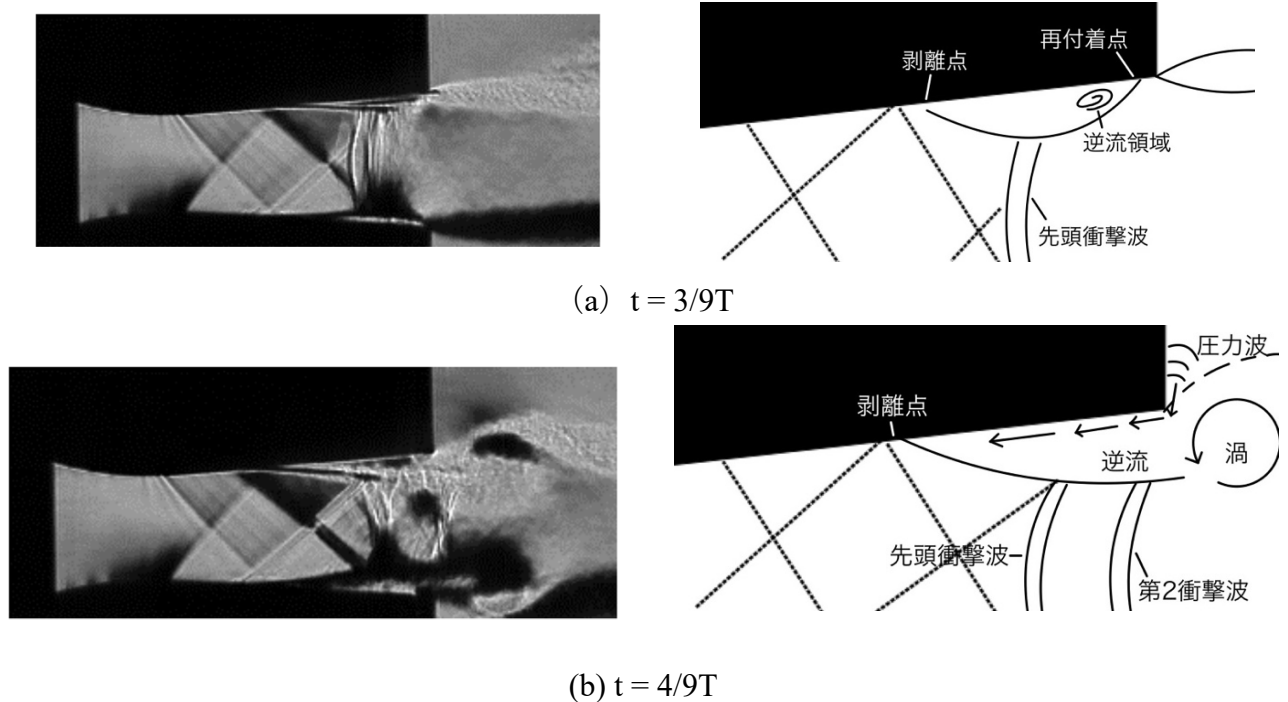


Fig.1.4 剥離泡崩壊時の流れ場スケッチ⁽¹⁷⁾

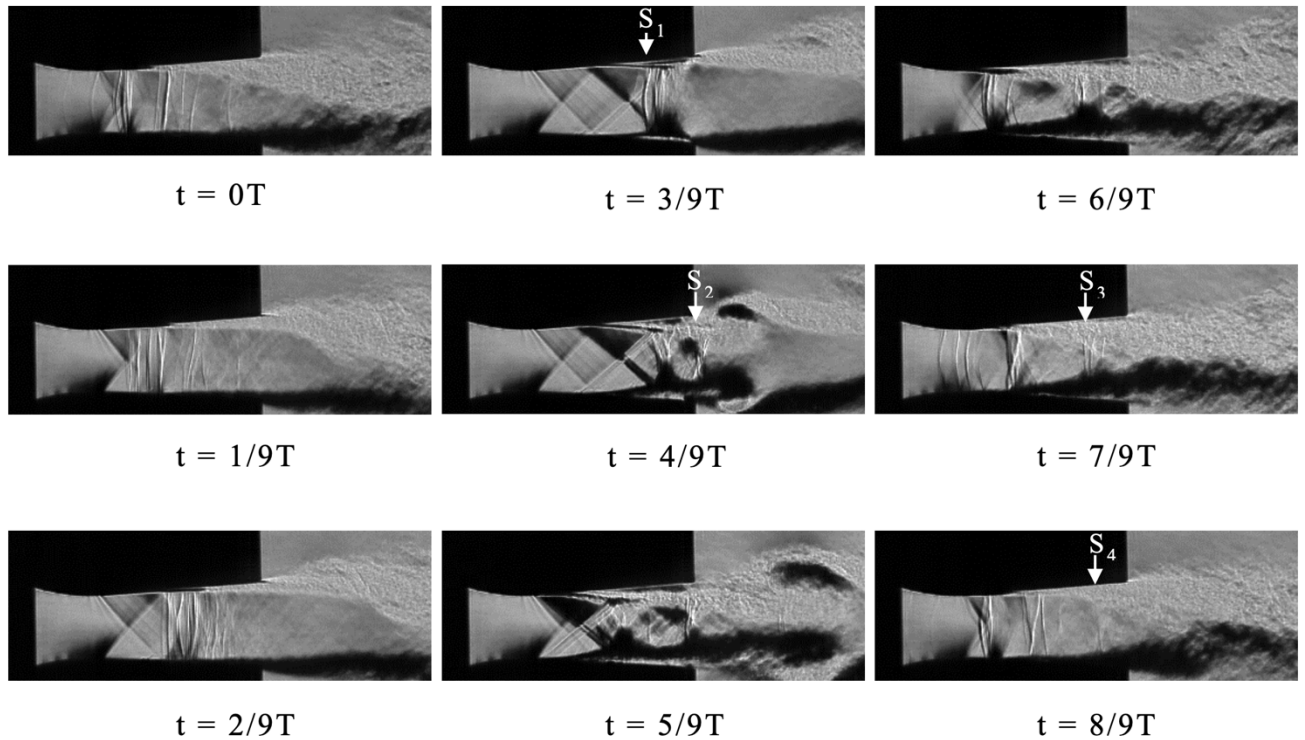


Fig.1.5 時系列可視化画像 (NPR=1.6) ⁽¹⁷⁾

1.1.3 固有直交分解

固有直交分解 (POD、主成分分析) とは、与えられた多次元データから低次元成分を抽出する分解方法である⁽¹⁸⁾。流体现象の膨大な物理データを扱う際に、その流体の持つエネルギーのうち、より大きな割合でその流体を示す主要なデータに注目し、より少ないデータで効率よく、流れ場を解析することに有効である。おもに、流体力学の分野では POD (Proper Orthogonal Decomposition)、統計力学の分野では主成分解析と呼ばれている。これは、物理現象の持つデータに対し、その傾向をよく示す基底 (POD モード) を求めるものである。この手法は、正弦関数や余弦関数によって与えられたデータを表現するのではなく、より良い基底を探し求めることを目的としている。もと n 次元座標系のデータの代わりに r 次元の座標系 ($r < n$) でデータを表すことが目的である。例えば、Fig.1.6 のようなデータに対して、POD によってそのデータの傾向によく合った基底、もしくは座標系を定義する。このとき、そのデータの傾向によく合った座標系は、赤線で表すことができる。

また、POD 基底を利用して縮約モデル (Reduced Order Model, ROM) を構築することができる。Navier-Stokes 方程式を直接 POD 基底に射影することによって、POD によって流れ場を展開する際の係数から成る縮約モデルを作成できる。つまり、Navier-Stokes 方程式を n 次のベクトル空間で解くのではなく、主要 POD モードにかかる展開係数のみで流れ場、 r 次元に縮約された空間上で解くことが可能になる。流れ場によって、圧縮性流体、非圧縮性流体の縮約モデルと利用することで、複数のモードで構築された縮約モデルによって、より有意義な流体现象の情報を得ることができる。

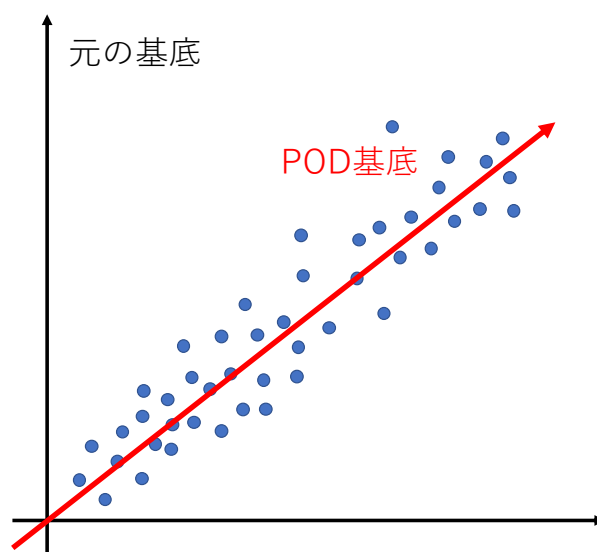


Fig.1.6 データが第 1POD モード(第 1 主成分)で抽出している例

1.2 研究目的

本研究では、非定常流れが引き起こす Transonic tone をターゲットとして、遷音速噴流のノズル内流れのシュリーレン可視化画像に対して POD を適用することで、流れ場の中にある主要な流れのモードを抽出することを目的とする。特に、Transonic tone の中でも非定常な流体现象である stage1 に対して POD を適用する。

1.3 本論文の構成

本章は緒論であり、研究背景及び研究目的について述べた。第 2 章以降、本論文の構成は以下のようになっている。

第 2 章では、固有直交分解の数理について述べる。

第 3 章では、解析方法及び解析条件について述べる。

第 4 章では、解析結果及び考察を述べる。

第 5 章では、結論を述べる。

第2章 固有直交分解の数理

2.1 固有直交分解(POD)

2.1.1 POD の数理

ある時系列データを考える.

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, t_{\min} < t < t_{\max} \quad (2.1)$$

$\mathbf{x}(t)$ は, 離散化しされたデータとしており有限次元ベクトルとして扱う. この $\mathbf{x}$ を, $r < n$ となる様な r 次元の基底 $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ で表すことを考える. このとき, $\mathbf{x}$ を r 次元から n 次元間に変換する場合, その作業は射影となり,

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^r \phi_k \phi_k^T \quad (2.2)$$

と表される. このとき, n 次元に戻したデータと元のデータの差が最小になるようにしたい. 二つのデータの差が最小になる様な基底 ϕ_k は, 以下の数式で表される.

$$\phi_k = \arg \min_{\phi_k} \sum_{l=1}^m \|u_{kl} - \mathbf{P}u_{kl}\|^2 \quad (2.3)$$

また, 式(2.4)を変形すると,

$$\phi_k = \arg \max_{\phi_k} \sum_{l=1}^m \|\mathbf{P}u_{kl}\|^2 \quad (2.4)$$

この作業は, データの分散を一番大きくなるように射影する事と同等である.

この問題は, 共分散行列

$$\mathbf{R} = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) dt \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.5)$$

の固有ベクトル(ϕ_k)と固有値(λ_k)を求めることで解ける.

$$\mathbf{R} \phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (2.6)$$

この際に, 固有ベクトルを正規直交化する.

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

となり, Φ は正規直交の基底である. また, 固有値 λ_k は対応する固有ベクトル ϕ_k の表すデータの傾向の度合いを表す. 言い換えれば, 固有値 λ_k の有意に大きな固有ベクトル ϕ_k のみを集めることで, 流れ場をより少ない r 個の次元で表すことができる. 一般に, 式(2.8)のようになるよう基底ベクトルの数 r を選ぶ.

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k / \sum_{k=1}^n \lambda_k \approx 1 \quad (2.8)$$

このとき指定した, 場を良く表す r 個の固有値のモード $k = 1, \dots, r$ を POD モード, またその基底 ϕ_k を POD 基底と呼ぶ. この「エネルギー」の解釈はデータと流体のどう変数を扱うか, また, (2.5)式を解く上でノルムをどう定義するかによって変わる. もし, データを速度から構築する場合, 「エネルギー」は運動エネルギーとなる. また, 渦度を使用して解析を行うと, エンストロフィー値を捉えることになる. 最終的に得られる固有値 λ は上記のノルムで定義された「エネルギー値」を表すが, 流れでは, 一般的に大きい固有値に対応するモードの構造が大きく, 固有値が小さくなるほど対応するモード小さくなっていく.

2.1.2 Snapshot-POD

前項の方法で POD 基底を求める場合, $n \times n$ の固有値問題を解く必要がある. 可視化画像や CFD における格子点の数かなり大きい, 並列計算が汎用化されている現在, $n = O(10^7)$ 程度になる. そのような大規模固有値問題を解くのは計算コストが高く現実的ではない.

このような場合, Snapshot-POD で POD 基底を求めると大変効率が良い. Snapshot-POD では時間を離間化した $t_{min} = t_1, \dots, t_m = t_{max}$ で与えられる瞬間場(snapshot)をもとに $m \times m$ の小さい固有値問題を解いて POD 基底を構築する.

時間が離散化された場合の共分散行列は

$$R = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{x}(t_j) \mathbf{x}^T(t_j) \quad (2.9)$$

となる. ω_j は時間方向の重みである. ここで, 流れの瞬間場を縦ベクトルとして並べ替えデータを一まとめにすると,

$$\mathbf{X} = [\sqrt{\omega_1} \mathbf{x}(t_1) \cdots \sqrt{\omega_m} \mathbf{x}(t_m)] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (2.10)$$

となる. 時間が離散化された場合の共分散行列は

$$\mathbf{R} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (2.11)$$

と表される.

式(2.6)の代わりに共分散行列 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ についての固有値問題

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (2.12)$$

を解く. このとき, POD 基底は

$$\phi_k = \mathbf{X} \mathbf{v}_k / \sqrt{\lambda_k} \quad (2.13)$$

となる. これにより, m 個の POD 基底 $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ が求まる. これは 2.1.1 で求めた n 個の POD 基底と本質的に同等のものとなる.

2.1.3 流れ場の縮約モデル

POD 基底は, 元の流れ場のデータを分解し, より少ない基底で表すものである. POD 基底は正規化された直交基底であるので, 以下の線形重ね合わせにより, 元の流れ場を再構成できる.

$$u^0(x, t) = \sum_{j=0}^r a_j(t) \phi_j(x) \quad (2.14)$$

このとき、各時刻における POD モードの展開変数 $a_j(t)$ を解くことで、 n 次元のデータ u^0 を、 n をより少ない r 次元で表現することができる。またこの際、平均値 $\bar{u}(x)$ は $j = 0$ の POD モードとして、 $a_0(t) = 1$, $\phi_0(x) = \bar{u}(x)$ として扱う。

通常、 $a_j(t)$ は、場の支配方程式 f に対し Galarkin 展開を用い、POD 基底に射影することで求められる。特に流体では Navier-Stokes 方程式に POD 基底を射影した縮約モデルが用いられる。非圧縮性と圧縮性の流体现象をとりわけ、それぞれにあった Navier-Stokes 方程式を使用する必要がある。一方、輝度値を流体のデータとするシュリーレン可視化やシャドウグラフ可視化のような支配方程式が立てられない(速度場としてデータを抽出しない)データに対しては、Galarkin 展開を用いた縮約モデルは使用できない。この場合、以下の様にデータを直接 POD 基底に射影することで $a_j(t)$ を導出する。

$$a_i(t) = \langle u(x, t), \phi_i(x) \rangle, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.15)$$

この $a_i(t)$ は (2.15) のそれと違い、物理モデルの縮約には応用できないが、次項で示す通り、POD モードと元のデータの関係性を見る際の指標となる。

2.1.4 POD モードと流れ場の関係性

流れ場における周期性について論じるなら、 $a_i(t)$ に注目する必要があることは、流れ場が POD モードの線形重ね合わせで示されることから明らかである。また、固有値 λ_i の大きなモードの持つ特徴的な周波数の傾向は、データ全体に対して支配的であると言える。

POD モードから、周波数特性と取得する方法として、流れ場全体での周波数機構と、その振動が寄与している分布を同時に解析することができる。POD による周波数解析は、流れ場全体の振動特性を取得できる点において、他の周波数計測手法、例えば、石橋が行った半導体センサを用いたノズル内静圧測定や、音圧測定などの流れ場上にある点での周波数特性の計測に対して優位である。式(2.1.1)により、流れ場を再構成することで、複数の POD モードで構成された流れ場を再現することができ、本研究では、その流れ場でのより支配的な流れを追うことができる。60%ほどのエネルギー効率で POD モードを抽出することができれば、その流れ場での主要な流れを得られたことと同等とする。これにより、複雑な流れ場の中から、1つの現象に注目した観察を行うことができ、より有意義な情報を得ることができる。

2.2 周波数領域での固有直交分解(SPOD)

2.2.1 SPOD の数理

空間領域における固有直交分解において、 $a_i(t)$ の周波数特性は、一つのモードで複数の周波数現象を含むことになる。よって、Transonic tone のような特徴的な周波数ピークをもつ現象に対して、空間領域における固有直交分解では複数の振動モードの関係性を論じることはできない。POD では、時間領域での変動を考慮できていない。

ここで、時間と空間の両方に依存したモードを得るために、以下のような内積を定義する。

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{x,t} \equiv \int_{t_{min}}^{t_{max}} \int_{\Omega} \mathbf{v}^*(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx dt \quad (2.16)$$

このとき、時間を考慮した、データの傾向を良く表す基底 ϕ_k は $\phi_k(x, t)$ となり、

$$\phi_k = \arg \max_{\phi_k} \sum_{l=1}^m \|\langle \mathbf{u}(x, t), \phi_k(x, t) \rangle_{x,t}\|^2 \quad (2.17)$$

この ϕ_k は固有値問題

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbf{C}(x, x', t, t') \phi_k(x', t') dx' dt' = \lambda_k \phi_k(x, t) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}(x, x', t, t') = E\{\mathbf{i}(x, t) \mathbf{i}^*(x', t')\} \quad (2.19)$$

より求められる。

(2.18)式は時間、空間の変動を考慮した POD となったが、 $\mathbf{C}(x, x', t, t')$ は $\mathbb{R}^{n \times n \times m \times m}$ となっている。もし、対象としている運動が周期的ならば、 $\mathbf{C}(x, x', t, t')$ は、

$$\tau = t' - t \quad (2.20)$$

と時間差を考慮することで、共分散行列は、

$$\mathbf{C}(x, x', \tau) = E\{\mathbf{i}(x, t) \mathbf{i}^*(x', t - \tau)\} \quad (2.21)$$

と表すこともできる。また、周期的な条件なので、 $\mathbf{C}(x, x', \tau)$ と、そのフーリエ変換 $\mathbf{S}(x, x', f)$ について以下のように表せる。

$$\mathbf{S}(x, x', f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}(x, x', \tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C}(x, x', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(x, x', f) e^{2\pi i f \tau} df \quad (2.23)$$

このとき、 $\mathbf{S}(x, x', f)$ はクロススペクトルとなり、自己相関を表す。以下の固有値問題を解くことで、そのデータの傾向をよく示す基底 ψ_k を得ることができる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(x, x', f) \psi_k dx' = \lambda_k(f) \psi_k(x, f) \quad (2.24)$$

すると ψ_k 周波数領域 f を含む形となる。このとき、 ψ_k は例によって正規直交性を持つ、基底である。このとき、 ψ_k と元データにおける変動場のフーリエ変換系 $\hat{\mathbf{u}}(x, f)$ について、以下のような線形結合で示される。

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, f) = \sum_{j=0}^r a_j(f) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f) \quad (2.25)$$

2.2.2 周波数領域での POD と空間成分のみの POD 関係性

クロススペクトル $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', f)$ と固有値 $\lambda_k(f)$, 固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f)$ について, 次の関係性がいえる.

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', f) = \sum_{k=1}^r \lambda_k(f) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f) \boldsymbol{\psi}_k^*(\mathbf{x}', f) \quad (2.26)$$

クロススペクトル密度は対角化されている. また, $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', f)$ について周波数成分を積分する.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', f) df \quad (2.27)$$

空間相関テンソルは, ゼロタイムラグ時空間相関テンソルと同等である. このとき, この $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ と, 空間領域での POD における固有値 λ_k , 固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x})$ についても(2.31)と同様に

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{k=1}^r \lambda_k \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\phi}_k^*(\mathbf{x}') \quad (2.28)$$

の関係性がいえる. (2.33)の両辺にそれぞれ(2.32), (2.34)を代入すると, 以下のようになる.

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\phi}_k^*(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^r \lambda_k(f) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f) \boldsymbol{\psi}_k^*(\mathbf{x}', f) df \quad (2.29)$$

この両辺の関数 g と $\boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x})$ の内積 $\langle \boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x}), g \rangle$ をとると, 以下のようになる.

$$\boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k(f)}{\lambda_j} c_{ijk}(f) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f) df \quad (2.30)$$

$$c_{ijk}(f) = \langle \boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x}), \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, f) \rangle \quad (2.31)$$

また, 式(2.35)を λ_j について整理すると, 以下のようになる.

$$\lambda_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^r \lambda_k(f) |c_{ijk}(f)|^2 df \quad (2.32)$$

式(2.31)は, 空間領域の POD 基底が複数の SPOD の基底を含むことを示し, また式(2.32)は空間領域の POD モードの固有値は, その POD モードに含まれる複数の SPOD モードの固有値の総和に等しいことを示す. これは, 空間領域の POD は複数の周波数のモードを持つ事を裏付ける.

さて, ここで式(2.15)に式(2.30)を代入すると以下のようになる.

$$a_i(t) = \langle u(x, t), \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k(f)}{\lambda_j} c_{ijk}(f) \psi_k(x, f) df \rangle \quad (2.33)$$

これは、ある POD モードの展開変数と SPOD モードの関係性を示す。これに対し、ある SPOD モード一つに絞った場合の、時系列のデータに対する展開変数について、以下の様な式を考える。

$$a_i(t, f') = \langle u(x, t), \psi_i(x, f') \rangle \quad (2.34)$$

式(2.32)は周波数 f' を持つある SPOD モードが、流れ場中でどのような時間変化を行うのかを取り出せる。式(2.14)にこの $a_i(t, f')$, $\psi_i(x, f')$ を代入すると

$$u(x, t) = \int_F \sum_{i=0}^r a_i(t, f) \psi_i(x, f) df \quad (2.35)$$

式(2.35)は、得られた

2.2.3 データから SPOD モードの導出

本研究では、輝度情報 $I(x, t)$ SPODを適用するが、実際の可視化の輝度情報では、時間は離散的に取得されたものとなる。この $I(x, t)$ を、周波数領域でのパワースペクトル密度に変換した $\hat{I}(x, f)$ について POD を行う。周波数 f_k でのクロススペクトル

$$S_{f_k} = \hat{I}(x, f_k) I(x, f_k)^* \quad (2.36)$$

に対する固有値問題

$$S_{f_k} W \Psi_{f_k} = \Psi_{f_k} \Lambda_{f_k} \quad (2.37)$$

を解くことで、 $n \times n$ の固有ベクトル Ψ_{f_k} 及び、それに対応する固有値 λ_{f_k} を得られる。尚、ここでの $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は空間重みである。

しかし、 $n \times n$ の固有値問題は計算コストが高い。また、パワースペクトル密度の推定においても、通常の離散フーリエ変換(DFT)を使用すると、取得された時間軸のデータ数 m が長くなるほど計算コストが高くなり、ま、各周波数での推定値の不確かさは、推定値自体の大きさと同程度になる。そこで、Towneらはウェルチ法を用い、より少ない計算コストで精度良く SPOD を行える手法を提案した。まず、データ I を以下のような、重複を認めた等長のブロックに分解する。

$$I^{(n)} = [i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \dots, i_{N_f}^{(n)}] \quad (2.38)$$

$$i_k^{(n)} = i_{k+(n-1)(N_f-N_o)} \quad (2.39)$$

このとき、 N_f は各ブロック内の時系列データの長さ、 N_o は隣接するブロック間の重複するデータの長さである。この各ブロックについて DFT を行ったものは以下のように表せる。

$$\hat{I}^{(n)} = [\hat{i}_1^{(n)}, \hat{i}_2^{(n)}, \dots, \hat{i}_{N_f}^{(n)}] \quad (2.40)$$

$$i_k^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{N_f}} \sum_{j=1}^{N_f} w_j u_j^{(n)} e^{-2\pi i(k-1)\{(j-1)/N_f\}} \quad (2.41)$$

尚, ここでの w_j は離散フーリエ変換における窓関数を指す. また, $i_k^{(n)}$ に対応する周波数 f_k は以下のようになる,

$$f_k = f(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{N_f \Delta t}, & k \leq \frac{N_f}{2} \\ \frac{k-1-N_f}{N_f \Delta t}, & k > \frac{N_f}{2} \end{cases} \quad (2.42)$$

ここで, ある周波数 f_k について, $i_k^{(n)}$ を全てのブロックから集めた

$$\hat{I}_{f_k} = [\hat{i}_k^{(1)}, \hat{i}_k^{(2)}, \dots, \hat{i}_k^{(N_b)}] \in \mathbb{R}^{N \times N_b} \quad (2.43)$$

について, そのクロススペクトル

$$\mathbf{S}_{f_k} = \hat{I}_{f_k} \hat{I}_{f_k}^* \quad (2.44)$$

を求める. これにより, 式(2.44)は式(2.36)と同様の物となる.

更に, Towne らは snapshot-POD の手法を SPOD に適用した. 式(2.44)の $\mathbf{S}_{f_k}$ に対し, 式(2.12)の様な $N_b \times N_b$ の固有値問題

$$\mathbf{S}_{f_k} \mathbf{W} \boldsymbol{\Theta}_{f_k} = \boldsymbol{\Theta}_{f_k} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{f_k} \quad (2.45)$$

を解く. 求めたい固有ベクトル $\tilde{\Psi}_{f_k}$ は, 式(2.11)と同様に以下の式によって求まる.

$$\tilde{\Psi}_{f_k} = \hat{I}_{f_k} \boldsymbol{\Theta}_{f_k} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{f_k}^{-1/2} \quad (2.46)$$

これにより, ある周波数 f_k の持つ N_b 個の POD モードが, 現実的な計算コストにより求まる. SPOD は, 実験 とシミュレーションの両方のデータによって以前からジェットに適用されてきた. これらの研究では, 注目する量 i (本研究では輝度値), 空間領域 Ω (本研究では解析領域), 内積重み $\mathbf{W}$ の定義が様々に異なっている.

第3章 実験条件及び解析条件

3.1 可視化実験

3.1.1 シュリーレン可視化とシャドウグラフ可視化

(i) シャドウグラフ法⁽²⁰⁾

シャドウグラフ法は媒質の密度変化による屈折率の変化を利用した可視化手法である。点光源からの光は、密度が一様でない測定部を通過するとき曲げられ、投影面に明るさの濃淡をもつ像を作る。Fig.3.1 にシャドウグラフにおける可視化原理を示す。

ここでは、簡単のため、密度変化は2次元であり紙面に垂直な x 方向には変化しないものとする。また、今回は1つの光線 r_A を考える。屈折率が $n = 1 + K\rho$ で表される気体を光線 r_A が通過するときの屈折角 θ_y は、

$$\theta_y = \int_0^d \frac{K}{n} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz \quad (3.1)$$

となる。密度が y 方向のみに変化するものとする、全屈折角は

$$\theta_y = \frac{Kd}{n} \frac{d\rho}{dy} \cong Kd \frac{d\rho}{dy} \quad (3.2)$$

となる。密度勾配 $d\rho/dy$ が y 方向で一定であれば、すべての光は一様に曲げられ、投影面上での像の明るさ I は変化しない。したがって、明るさの変化 ΔI は密度勾配の変化となる。すなわち、

$$\Delta I \propto \frac{d\theta_y}{dy} \propto \frac{d^2\rho}{dy^2} \quad (3.3)$$

密度が x, y 方向ともに変化する場合は

$$\Delta I \propto \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} \quad (3.4)$$

の関係が成立するため、シャドウグラフ法によって得られる像の明るさの濃淡は、気体密度の2次微分つまり密度勾配の変化に比例するものであることがわかる。

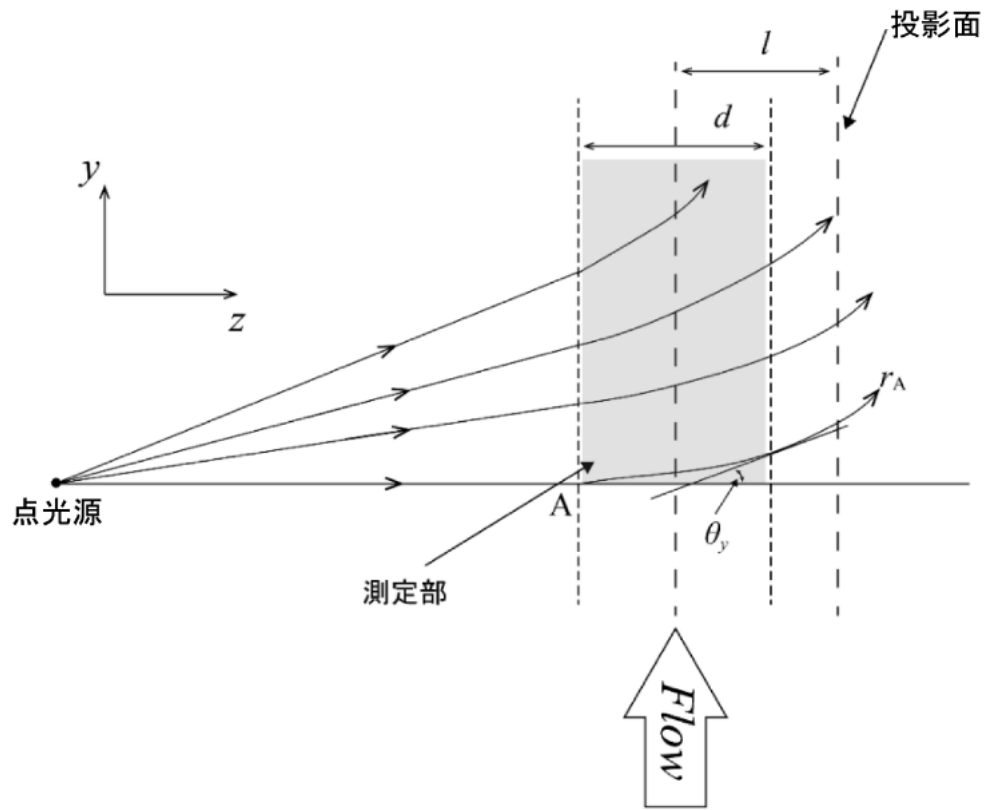


Fig.3.1 シャドウグラフ法による可視化原理⁽²⁰⁾

シャドウグラフ法では、輝度値は密度の2階微分を表しているため、後述するシュリーレン可視化よりも、輝度の濃淡が薄く POD による解析が困難になる可能性がある。しかし、シュリーレン横切りに比べて、衝撃波の振動にフォーカスした解析が可能であると考えたため解析を行った。シャドウグラフ可視化によって得られる衝撃波は白と黒の帯状の線として現れる。衝撃波により密度はステップ状に変化するため、その2回微分が極小極大の 2 つのピークを持つ。また、シュリーレン法に比べて噴流境界のような密度変化の小さい現象もとらえにくくなる。噴流や衝撃波といった密度の不連続面の形状やその向きの測定に有効である。Fig.3.2 に実際解析で使用したシャドウグラフ法による時系列画像(NPR=1.6 剥離泡崩壊時)を示す。

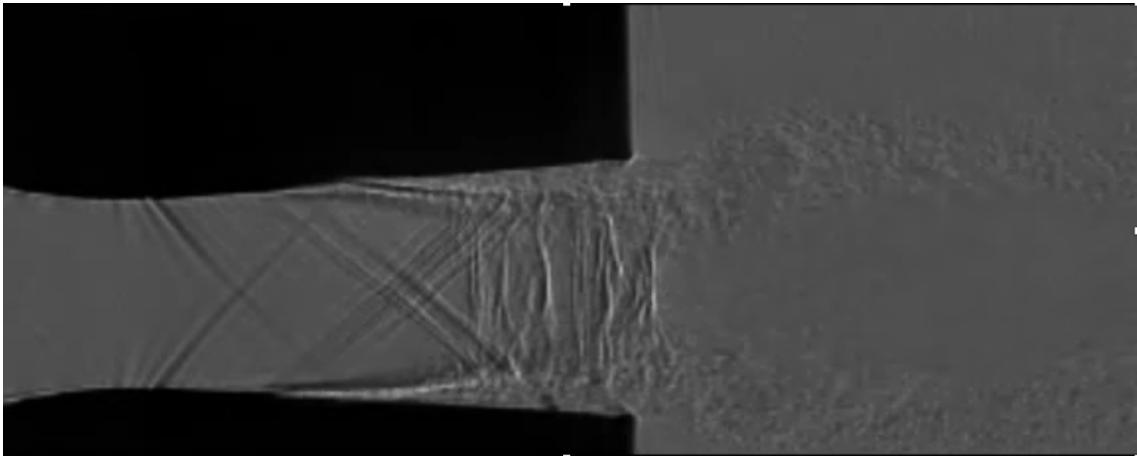


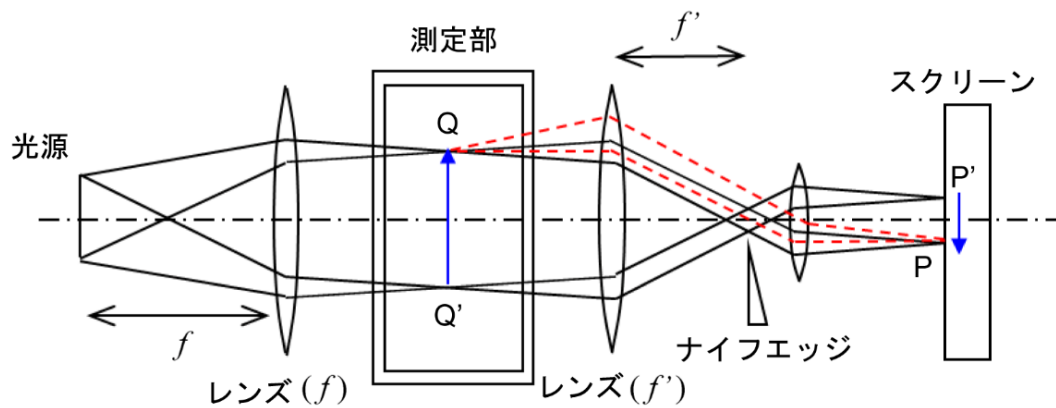
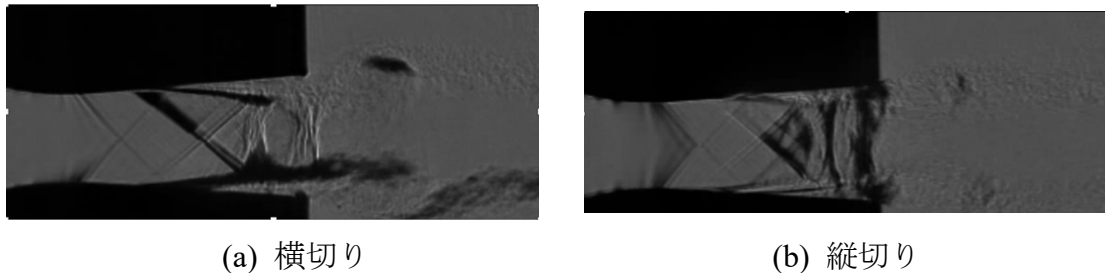
Fig.3.2 解析で使用したシャドウグラフ法による時系列画像(NPR=1.6 剥離泡崩壊時)⁽¹⁷⁾

(ii) シュリーレン法⁽²⁰⁾

シャドウグラフ法に対してシュリーレン法では、輝度値は密度の1階微分.Fig.3.3 にシュリーレン法における可視化原理を示す.

$$\Delta I \propto \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (3.5)$$

測定部において密度変化がなければ、実線で示すように Q を通る光線も Q' を通る光線もレンズの焦点において完全に一致し、光源のくっきりとした像を結ぶ. しかし、測定部内で Q のみが他の点と密度勾配が異なると、 Q を通過する光線は点線のように屈折し、 Q' などを通る光線がむすぶ像とずれて像を結ぶことになる. そこで、測定部下流のレンズの焦点距離にナイフエッジを設置すると、ナイフエッジ上を通過する光線だけ他の点よりも明るくなるため、測定部に密度勾配があるとスクリーン上で明暗が生まれる. また、ナイフエッジに平行な方向の光源の像の動きは光度に影響がなく直角な方向の動きのみが光度の変化を与える. そのため、測定したい現象の密度勾配が最も急になる方向に対して直角の向きにナイフエッジをセットする. 衝撃波に適用した場合、噴流軸方向に対して水平に切る横切りでは、噴流境界にかけての密度勾配が現れる. 横に切っているため、噴流軸方向に垂直な方向の流れを取り分けることができる. また、噴流軸方向に対して水平に切る縦切りでは、シャドウグラフと比べて不足膨張噴流の作る圧縮波と膨張波を輝度の濃淡によって表すことができる. 密度が減少傾向の膨張領域では、光が上流側に屈折するため暗くなり、逆に圧縮領域では明るくなる. 撮影による画像のコントラストを上げるためには、遮光量を増やす必要がある.Fig.3.4(a),(b)に解析で使ったシュリーレン法による時系列画像 (NPR=1.6 剥離泡崩壊時)をそれぞれ横切り・縦切りを示す.

Fig.3.3 シュリーレン法による可視化原理⁽²⁰⁾Fig. 3.4 解析で使用したシュリーレン法による時系列画像(NPR=1.6 剥離泡崩壊時)⁽¹⁷⁾

3.1.2 実験セットアップ

本研究では、石橋によって得られた遷音速でのノズル内外の衝撃波の振動などの流体の流れのシュリーレン可視化によって得られた時系列画像⁽¹⁷⁾を解析対象とする。以下に、石橋が行った実験のセットアップについてまとめる。Zaman⁽¹⁶⁾らの研究において Transonic tone が顕著に観測されたノズル形状を参考にして、寸法を決定している。ノズル出口の広がり角は 3.81 deg とし、ノズル出口まで角度が一定になるように設計している。ノズルは真ちゅう製で上部と下部の 2 つに分かれており、中心軸に対して線対称である (Fig.3.5)。ノズル入口部の高さは 60.0 mm、スロート高さは 6.0 mm、出口高さは 8.0 mm とした。またノズル入口からスロートまでの距離 60.0 mm とし、スロートから出口までの距離を 15.0 mm、ノズル出口におけるリップ厚さは 7.5 mm としている。前述の通り、ノズル内部の流体现象の 2 次元性を十分に確保するため、ノズル幅を 80.0 mm (スロート断面におけるアスペクト比 = 13.3 に相当)としている。

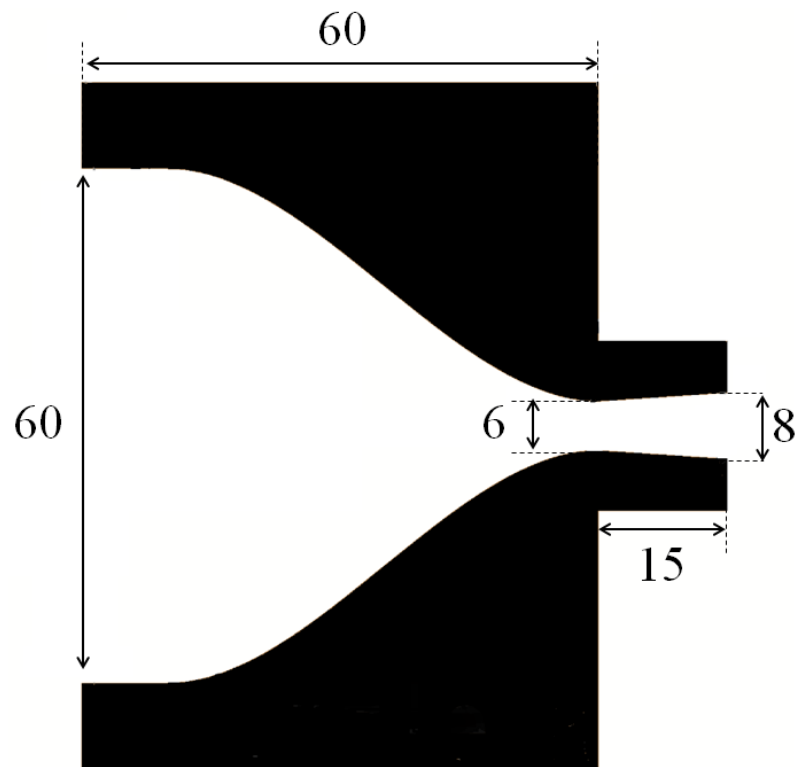


Fig.3.5 ノズル断面寸法 (単位: mm) ⁽¹⁷⁾

シュリーレン可視化光学系をFig.3.2に示す. 光源には75Wキセノン光源(カトウ光研, LS-75)を, 凹面鏡には $\phi = 150\text{mm}$, $f = 1000\text{mm}$ のものを2つ用い, ズームレンズ(Nikon ED AF NIKKOR 80-200mm)を取り付けたハイスピードカメラ(Photron FASTCAM SA-Z)において撮像した. また可視化用の測定部には $140\text{mm} \times 140\text{mm}$ の光学ガラスを用いた. ナイフエッジは水平, 垂直にそれぞれ設置した. またハイスピードカメラにおける設定では撮影速度 240 kfps, 露光時間 $0.25\mu\text{sec}$, 解像度 384×136 pixels で撮影を行った.

$$NPR = \frac{P_0}{P_b} \quad (3.7)$$

理論的にはこの条件下で適正膨張となり, NPR がこれ以下である場合には過膨張流れとなる. 過去の研究より, Transonic tone が $NPR = 1.4 \sim 2.0$ の範囲で発生することが分かっている. しかし石橋の研究によると, $NPR=1.4 \sim 1.5$ では stage2 が支配的, $NPR=1.6 \sim 1.9$ では stage1 が支配的, そして $NPR=2.0$ では Transonic tone 発生しないことが分かっている. 本研究では, より非定常な挙動を示すとされている, $NPR=1.6 \sim 1.9$ に着目し, 衝撃波振動と剪断層の発達やその他の流体现象の関連性を明らかにすることで, その非定常性の原因を探ることにした.

Table 3.1 に, 各 NPR でのノズル出口における噴流の流速とマッハ数を表に表す. 尚, $\gamma = 1.4$ とした.

Table 3.1 NPR とノズル出口部マッハ数の対応

NPR	M_e
1.60	0.848
1.70	0.905
1.80	0.956
1.90	1.00

また, POD, SPOD による解析に対する比較として, 高速かつ非定常な現象を対象とした圧力計測を実施するため, 時間応答性に優れる半導体圧力センサ (Kulite XCQ-062-25SG)を用いた. Fig. 3.1 のノズル上部にスパン方向中心にあたる側面から 40 mm, 出口から上流へ 4 mm の位置に直径 0.5mm のノズル内静圧計測用の圧力孔を設けた. 静圧孔(ノズル内圧力計測用)を圧力センサで計測したものをを用いて比較し妥当性を検証した.

3.2 POD の適用

3.2.1 可視化画像に対する POD の適用方法

本解析では, 上述したシュリーレンやシャドウグラフ可視化によって得られた時系列画像での衝撃波の輝度情報に対して Snapshot-POD を使用した.

POD 解析を行う前処理として, 時刻 m における, 画像上のある位置 (x, y) における輝度 $I(x, y, m)$ について, 式(2.1)のように, 空間上の位置を一次元で表す様, 式(3.8)の $U^0(z, t)$ で表す様に対応させた. このとき, n_x は画像一行当たりの輝度の点数である. また, Fig. 3.4 に式(3.8)の対応関係を図で表し

た.

$$I(x, y, m) = U^0((y - 1)n_x + x, t) \quad (3.8)$$

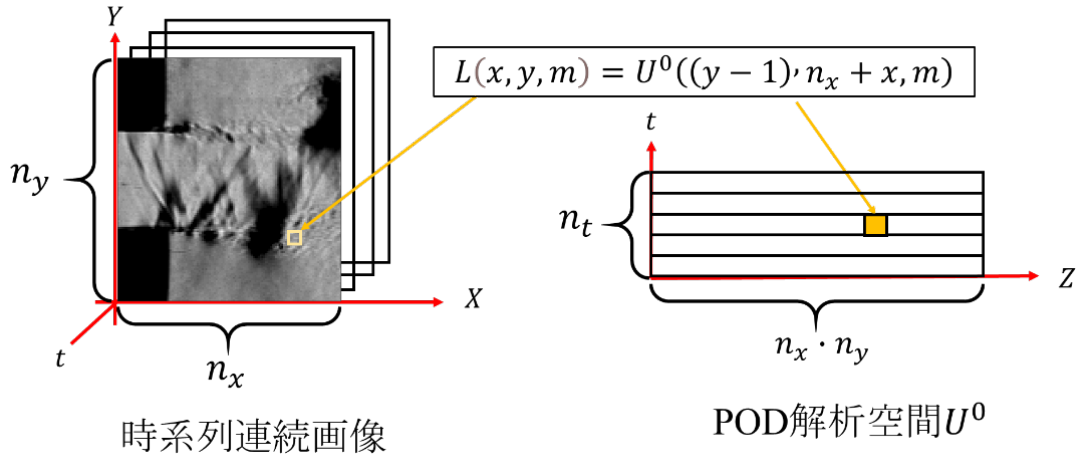


Fig.3.7 時系列連続画像と POD 解析空間の関係

次に、式(3.2)の様に U^0 から時間平均を減算した変動場の行列 U を求めた.

$$I(z, m) = I^0(z, m) - \sum_{m=1}^{n_t} I^0(z, m) \quad (3.9)$$

この U に対し、式(2.10), (2.11)に示された Snapshot-POD を適用することで、各 POD モードの固有値 λ_k 及び固有ベクトル ϕ_k を導出した. 固有値 λ_k について Snapshot-POD で求まる全ての POD モードの固有値の和 S 中で λ_k の占める割合

$$P_k = \lambda_k / S \quad (3.10)$$

は、第 k POD モードがどの程度 U のデータを表現しているのかを示す. 一般的に、POD のエネルギー効率と呼ばれることもある.流れ場によれば、第 1 モードと第 2 モードのエネルギー値の和で 90%以上の場合もあり、第 1 モードや第 2 モードは、流れ場を支配的に表すことが分かっている.本研究でも、特に第 1 モードと第 2 モードを中心に議論していく. POD では、低次のモードであるほど、より大きな現象を表現することが分かっている.

特に、NPR を 1.6 固定し(NPR=1.6~1.9 では、流体现象の性質を同じであるため)、可視化手法を変えたり、Snapshot-POD に用いる画像数を変えたりしてそれらから得られる情報を分解して、目的ごとに可視化データを使い分けることにした.

シャドウグラフでは、シュリーレンで得られた時系列可視化画像と比較して、衝撃波の動きが把握しやすく(剪断層の発達による流れなどの流れを強く拾ったりしない)ので、衝撃波振動による現象をより支配的に POD によって解析できると考えた.

また、シュリーレン(横切り、縦切り)の取り分けられる流体现象を以下のように考えた.

シュリーレン(横切り)では、噴流軸方向の対して垂直な方向の流れを取り分けることができる. よって、剥離泡の崩壊に伴い発生する渦や噴流境界層の流れなどの現象を強く取り分けることができる

ため、剥離泡の崩壊による物理を理解するのに最も適している。

シュリーレン(縦切り)では、噴流軸方向の流れ(本研究では、衝撃波の膨張波や圧縮波)を取り分けるのに適している。

更に、式(2.13)を利用し式(2.12)の展開変数 $a_k(t)$ を求めた。この $a_k(t)$ はある POD モードの、元のデータに対する時間変動を示す。この $a_k(t)$ に対し離散フーリエ変換(DFT)を行い、各 POD モードの持つ周波数特性を求めた。この周波数特性は POD モード k が注目している現象の周波数特性、と言い換えることもでき、POD 基底と照らし合わせ、各 POD モードに含まれる周波数が現象にどう作用しているのかについて考察した。また、 $a_k(t)$ とノズル内静圧スペクトルと比較し、 $a_k(f)$ の正当性について評価した。また、シュリーレン法の性質より $a_k(f)$ は主流方向、または主流に垂直な方向の現象といえ、POD 基底、 $a_k(f)$ 、圧力計測の周波数特性より、各 POD モードの捉えた周期的現象の空間における方向性について考察した。

最後に、 r 個 POD モードの POD 基底 ϕ_k 、変動係数 a_k を式(2.12)に適用し、流れ場のデータ中における特にエネルギーの高い主要な成分のみで再構成された輝度情報 $L'(x, y, m)$ を観察した。 ϕ_k 、 a_k のみからは言い表せない、渦の発展、移流といった現象の時間変化に対し、 $L'(x, y, m)$ を用いて考察した。このとき、1つの POD モードだけでは流れ場の衝撃波の流れや剥離泡の崩壊に伴って発生する物理現象を表現できないと考えている。

3.2.2 SPOD の適用

通常の POD には、1つのモードに複数の周波数現象が含有されている。Transonic tone のような特徴的な周波数領域でピークを持つ現象では、適当な周波数に注目する必要がある。そこで、SPOD を導入する必要がある。3.2.1 の変動場行列 U に対し、ウェルチ法を用いパワースペクトル密度 $\hat{U}_{f_k}$ の推定を行った。式(2.44), (2.45)より各周波数の振動が持つ SPOD モードの固有値 $\tilde{\Lambda}_{f_k}$ 及び固有ベクトル $\tilde{\Psi}_{f_k}$ を求めた。

本研究では、Oliver Schmidt により作成された Spectral proper orthogonal decomposition (SPOD)のコードを使用した⁽²³⁾。

SPOD は、POD とは異なり、POD モードが離散化された周波数ごとに決定する。各周波数ごと POD モードが決定するという具合である。上記にした Oliver Schmidt のコードでは、Welch 法が用いられており、周波数抽出量と画像枚数に相関関係があることがわかる。石橋によって得られたシュリーレン、シャドウグラフの時系列画像ともに、合計で 17685 枚で構成されている。FPS が 240kHz のため、実時間で表すと、約 0.07s であることがわかる。

ここで、注目した周波数領域での、SPOD モードの基底 $\tilde{\Psi}_{f_k}$ は、その周波数における周期運動の起きている場所を示す。通常の POD と比較して、POD 基底内にどのような周波数現象が含まれているのかを観察するとともに、現象全体に対して、どのような現象を取り出すことができているのかを確認する。更に、角周波数の SPOD モードに対し、特徴的な固有値を持つものについて式(2.34), (2.35)を用いて、POD モードが示す流れ場を時系列のデータに復元した。復元したデータより、衝撃波やその他の現象の支配的な動きについて、その特性を考察した。

3.3 SPOD Algorithm

ここで、シュリーレンやシャドウグラフで得られた時系列画像の解析領域や SPOD Algorithm について述べる。得られた時系列画像は上述のように、解像度 384×136 pixels である。Fig.3.8 に示すように、流れ場全体に対して POD や SPOD を適用したい。流れ場に関係ない領域を解析領域に含む必要がないので、 300×100 pixels に簡易的にトリミングしている。

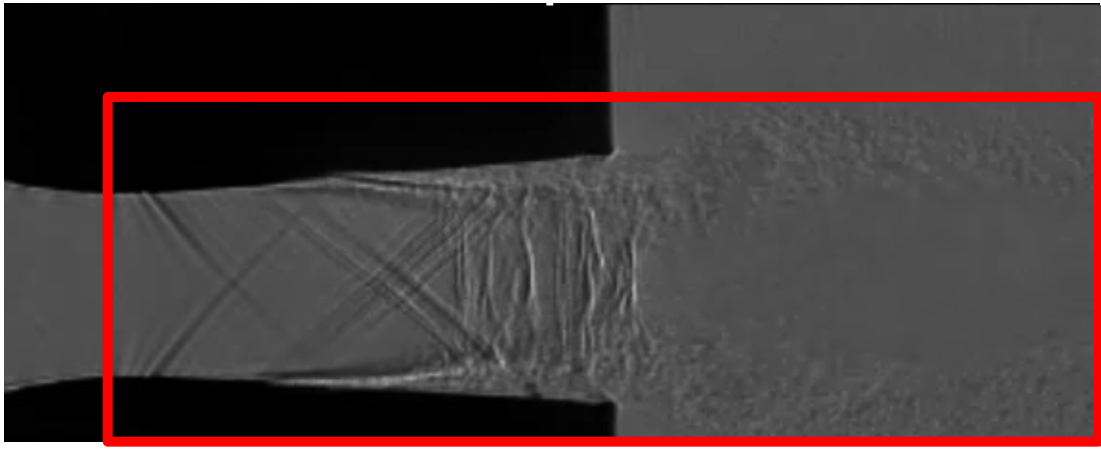


Fig.3.8 SPOD の解析領域

以下に、Schnmidt によって作成された SPOD Algorithm を示す。また、Welch 法の形式図を Fig 3.9 に示す。

Algorithm(SPOD)

SPOD Algorithm に使用した Welch 法⁽²²⁾の概略図を Fig.3.9 に示す。

(前処理)

1. 各データブロック $n = 1, 2, \dots, N_b$ に関して、シュリーレン可視化によって得られた時系列画像を各ブロック N_f 枚ごとの Snapshot に分解する(データに連続性を持たせるため N_o 枚重複させる)

(a) Data matrix の組み立て

$$I^{(n)} \leftarrow [i_{1+(n-1)(N_f-N_o)}, i_{2+(n-1)(N_f-N_o)}, \dots, i_{N_f+(n-1)(N_f-N_o)}] \quad (3.11)$$

(b) FFT をかけて、行単位の DFT に格納していく

$$\hat{I}^{(n)} = FFT(I^{(n)}) = [\hat{i}_1^{(n)}, \hat{i}_2^{(n)}, \dots, \hat{i}_{N_\omega}^{(n)}] \quad (3.12)$$

$\hat{i}_k^{(n)}$ は、 k 個の離散周波数 f_k で n 個のフーリエモードからなる

第4章 解析結果及び考察

4.1 Snapshot-POD

POD に関しては、十分に特徴量を捉えられるシュリーレン横切りと縦切りを採用したシャドウグラフに関しては、密度変化による輝度の濃淡が薄く、目視で定性的に特徴を分析することはできるが、PODで現象を捉えにくいことがわかった。また、シュリーレン横切り・縦切りでも衝撃波振動のストローク(snapshot の数)によって、得られる POD エネルギーが変動し、議論の対象となる。これらを踏まえて、最適に POD を適用できる条件をシュリーレン横切りの衝撃波振動のストローク数を変化させることで導いた。また、その条件での基底や流れ場の再構成を見ることで、その現象での支配的な現象を議論していくことにする。

4.1.1 固有値

シュリーレン横切りの時系列画像の対しての Snapshot-POD(以下、POD と示す)の解析結果に関して、モード 1~15 における、POD 固有値(以下、エネルギーと示す)を示す。衝撃波振動のストロークごとの POD エネルギーを比較したものを Fig.4.1 に示す。ここでは、あくまでも POD エネルギーが各ストロークごとにどのくらい得られるかを確認するために、POD エネルギーで比較する。ストローク数が 5 では、POD エネルギーは 10^8 オーダーで、ストローク数が 8 になると 10^{11} オーダーになり、ストローク数が 12 では、同じく 10^{11} オーダーになる。ストローク数が 5 から 8 に変化させると、大きく得られる POD エネルギーは変わるが、8 から 12 の変更では大きく変わらない。また、ストローク数 12 からストローク数 20 でも、 10^1 オーダーでの POD のエネルギーの変化が見られない。また、50 ストロークに変更したところ、極端に時間変動 $a_k(t)$ の周波数特性での分解能が高くなりすぎて、流れ場の再構成時にうまく再構成ができないことがわかった。また、流れ場の再構成は、縮約モデルと異なり $m \times m$ の固有値分解をそのまま解いており(縮約モデルでは、 $n \times n(n \ll m)$ で計算している)、計算コスト・時間がかかる。よって、ストローク数を 20 に設定することにした。また、モード 1~15 までにおける、固有値の全体に対する寄与率(折れ線)とその累積和(棒)を Fig.4.2 に示す。ここでは、累積和で mode1~9 で全体の 50%の現象を捉えていることがわかる。言い換えると、mode1~9 までで、その流体现象での支配的な物理現象を抽出できていることがわかる。本研究で扱う流体现象では、ノズル内の衝撃波振動が複雑かつ支配的であり、mode に分解するのが難しいと考えられる。衝撃波振動に関する物理現象が複合的に関係し合い、それぞれ個々が強く物理現象として捉えられるのではないかと考えられる。

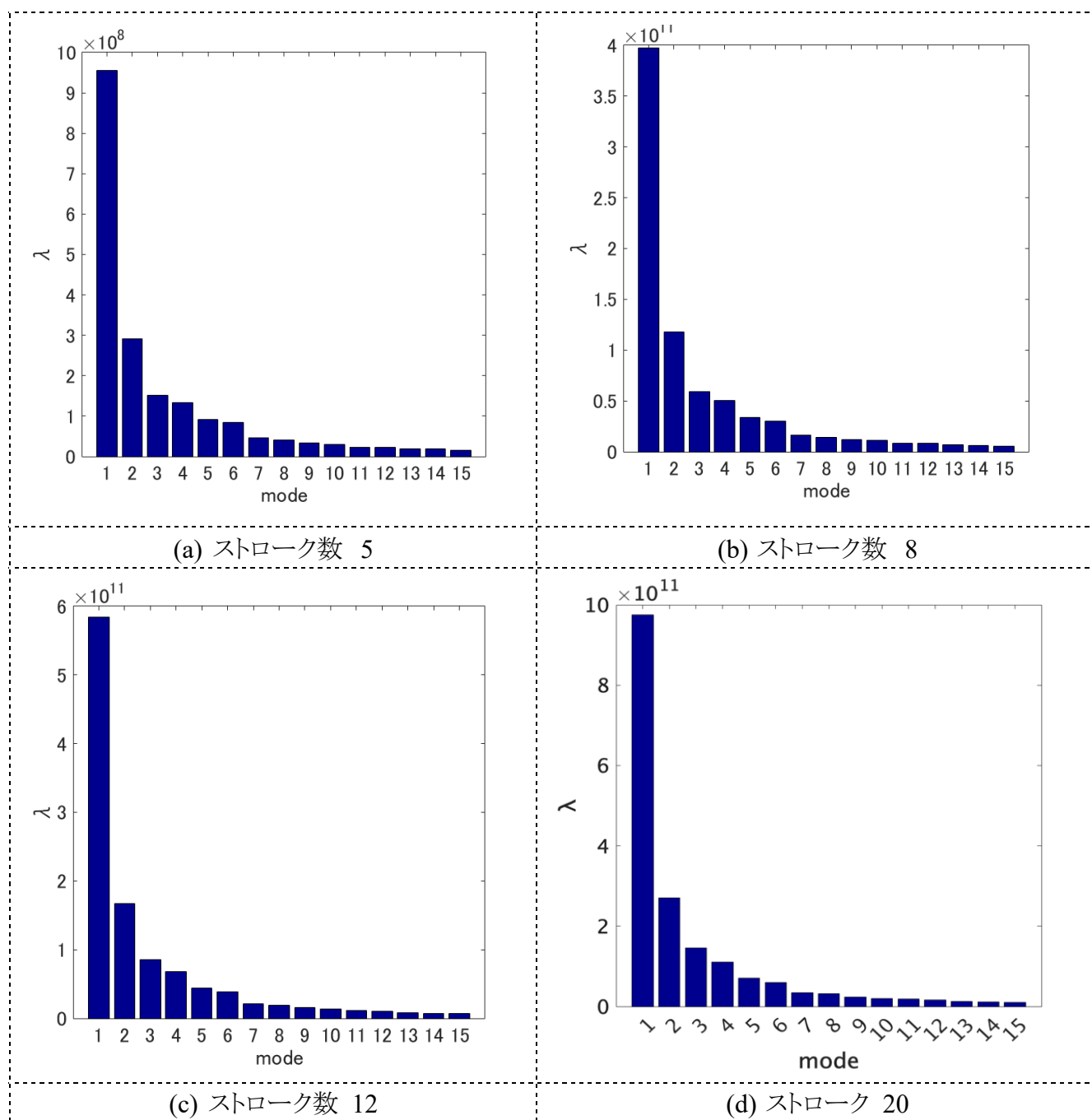


Fig.4.1 各ストローク数での mode ごとの固有値

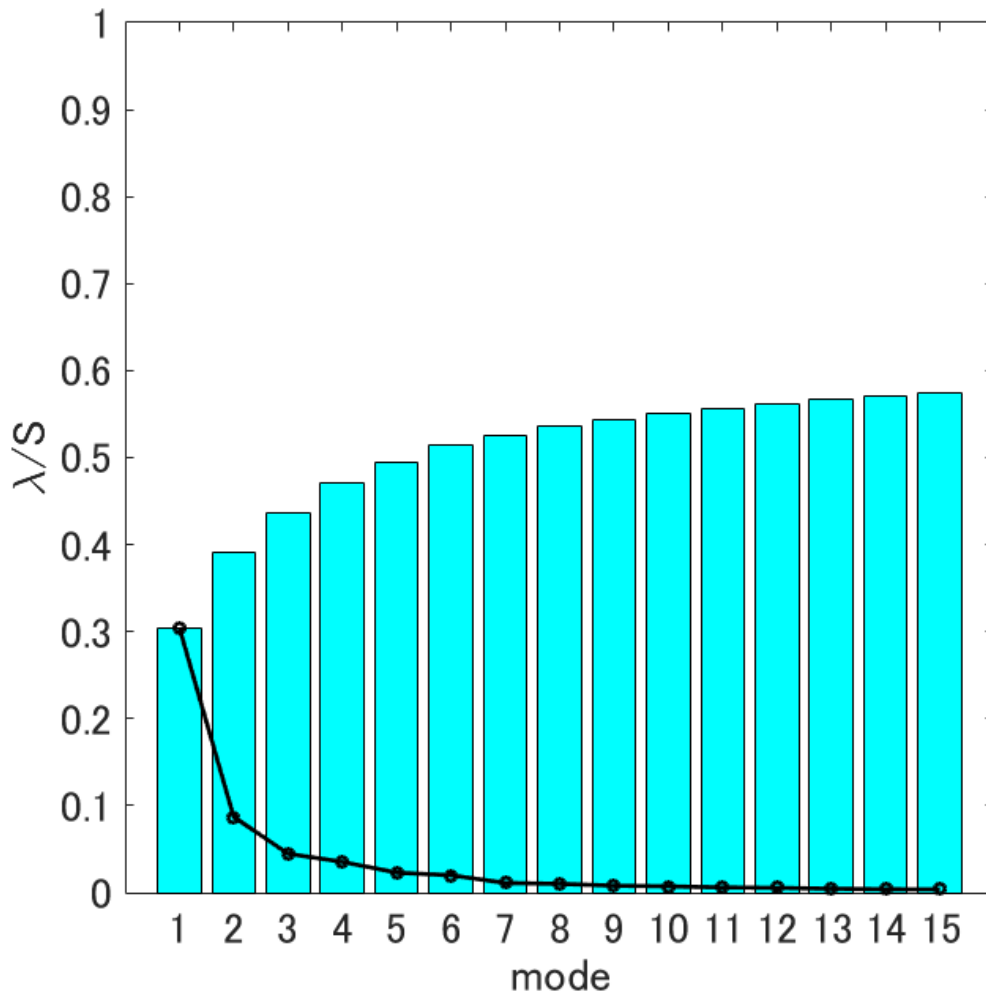


Fig.4.2 固有値の寄与率 λ_k/S 及びその累積和(ストローク数 20)

4.1.2 POD モードの周波数特性と妥当性

次に, POD モードの展開係数 $a_i(t)$ に DFT を適用した. シュリーレン横切り・縦切りで得られた結果をそれぞれ Fig.4.3, Fig.4.4 石橋によって得られたノズル内静圧変動スペクトル⁽¹⁷⁾と, 半澤らによって得られた音圧スペクトル, ノズル静圧の時間変動⁽¹⁵⁾を Fig.4.5, Fig.4.6, Fig.4.7 に示す. それらと POD モードの展開係数 $a_i(t)$ の周波数特性を比較することで POD 解析の妥当性を確認した.

まず, シュリーレン横切りでは mode1 では, 2.4kHz 付近にあるピークを主に抽出していることがわかる. 2.4kHz 付近は, Transonic tone の Stage1 のピーク周波数と一致していることがわかる. また, 小さなピークが見える 4.9kHz, 7.5kHz 付近は, 音圧スペクトルでも見られるピークであり, この POD 解析が妥当であることを示している. また, mode2 では, mode1 ほど強く, Transonic tone の Stage1 のピーク周波数を捉えておらず, ほかの周波数の現象を捉えるようになる. mode3 では, 2.4kHz の現象よりも 4.9kHz 付近の現象を強く拾うようになり, さらにノイズが強くなる. mode4 以降は, さらに 4.9kHz 付近の現象を強く捉えるようになるため, 基底を議論する必要がないことがわかる. 石橋らの研究によるとノ

ズル内静圧の関係や、音圧スペクトルの関係から 2,4kHz の現象は衝撃波振動によるものと考えられている。また、その他のピークに関しては、石橋が圧力計測と可視化の同期計測によって確認した圧力波に由来する流体现象によるものだと考えられる。

シュリーレン縦切りでも, mode1~2 までは同じことが言える. mode3 では, 2,4kHz よりも 4.9kHz 付近の現象を強く拾うようになり, ノイズ成分が強くなる. mode4 では, 4.9kHz 付近の現象と 10kHz 付近の現象を強く拾うようになる. mode4 以降は, ノイズ成分が強くなるため, 基底を議論する必要がないことがわかる. 横切りとは, 異なり圧縮波と膨張波と捉えていて, さらに複雑になっていると考えられる. その複雑性に伴い, mode3 以降, 横切りとは異なるピーク周波数の抽出になっているのではないかと考えられる.

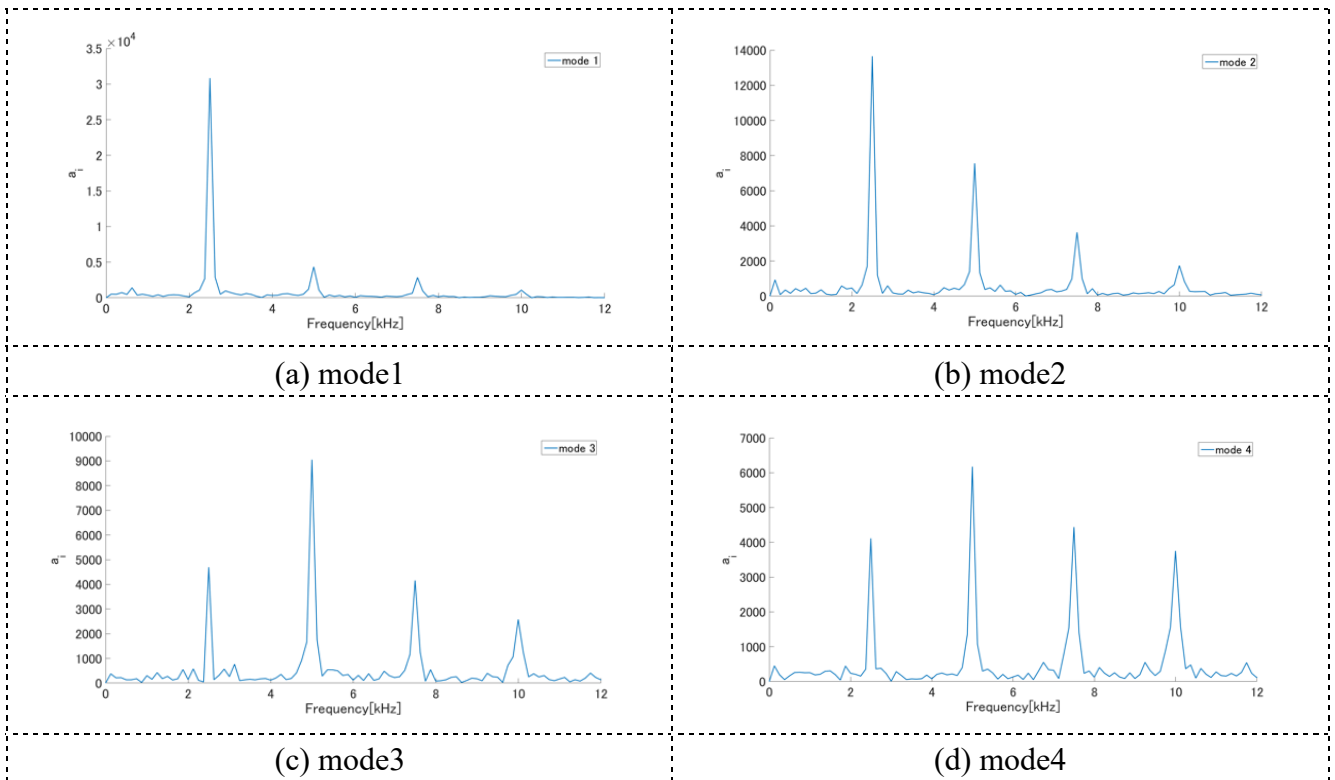
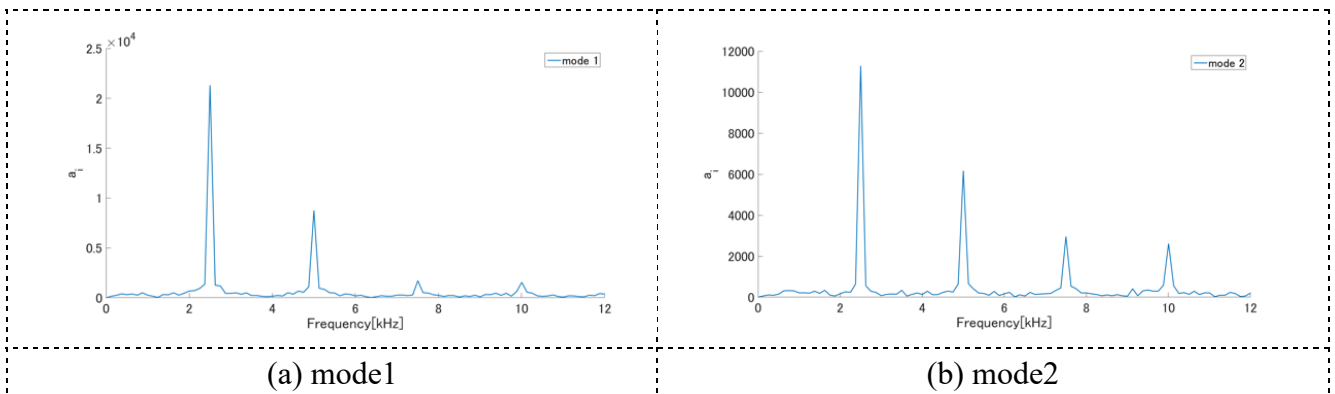


Fig.4.3 シュリーレン横切り $a_i(t)$ の周波数特性



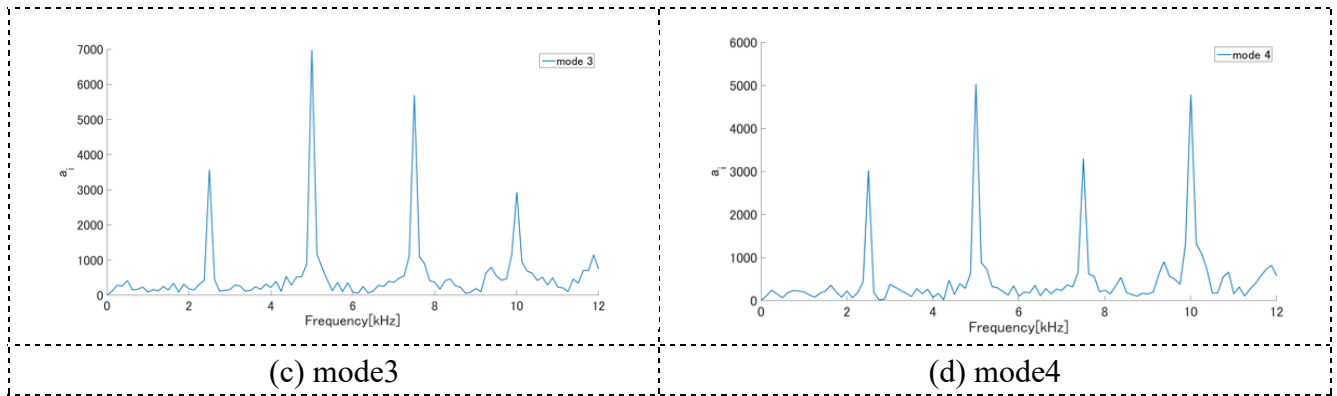


Fig.4.4 シュリーレン縦切り $a_i(t)$ の周波数特性

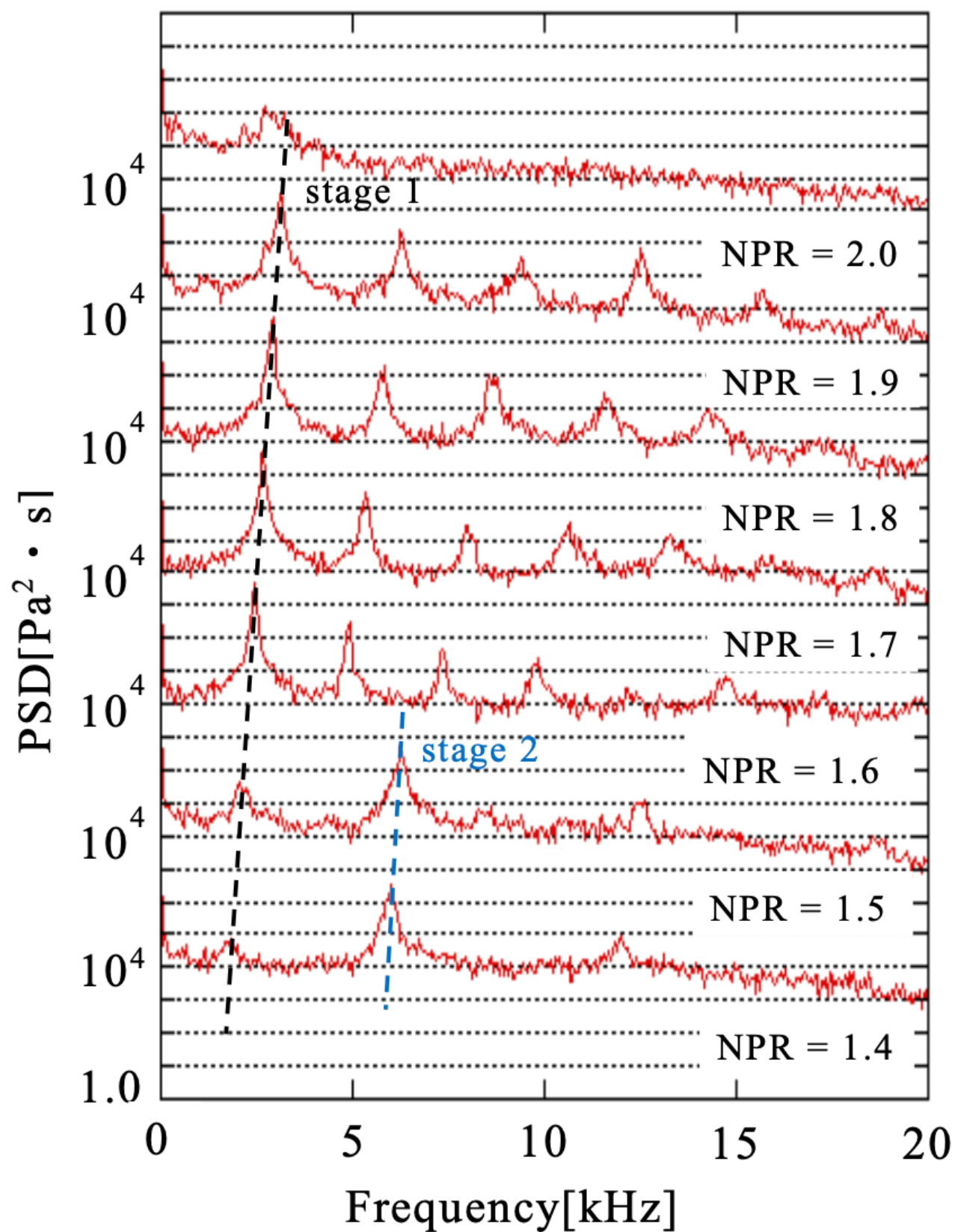


Fig.4.5 ノズル内静圧変動⁽¹⁷⁾

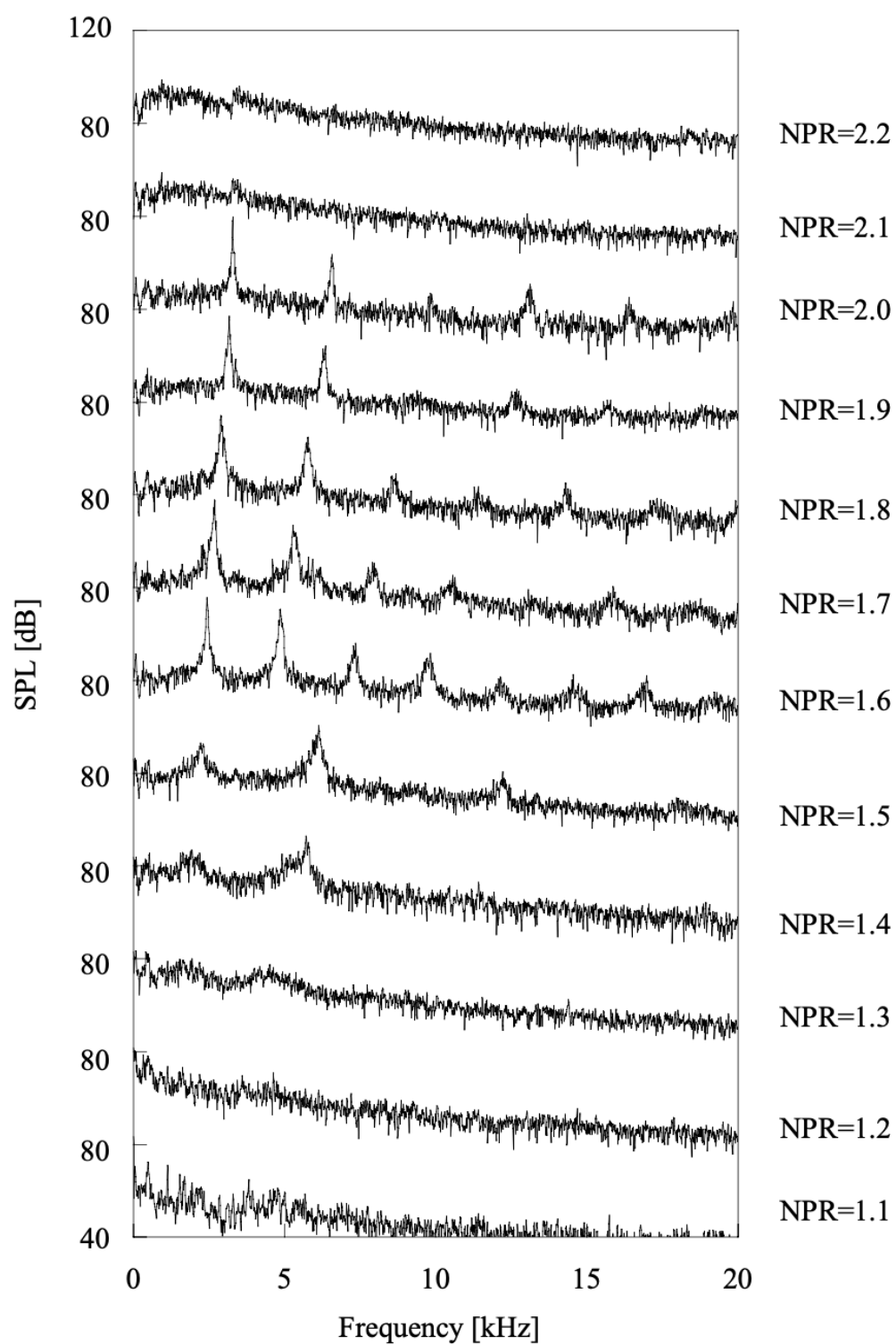
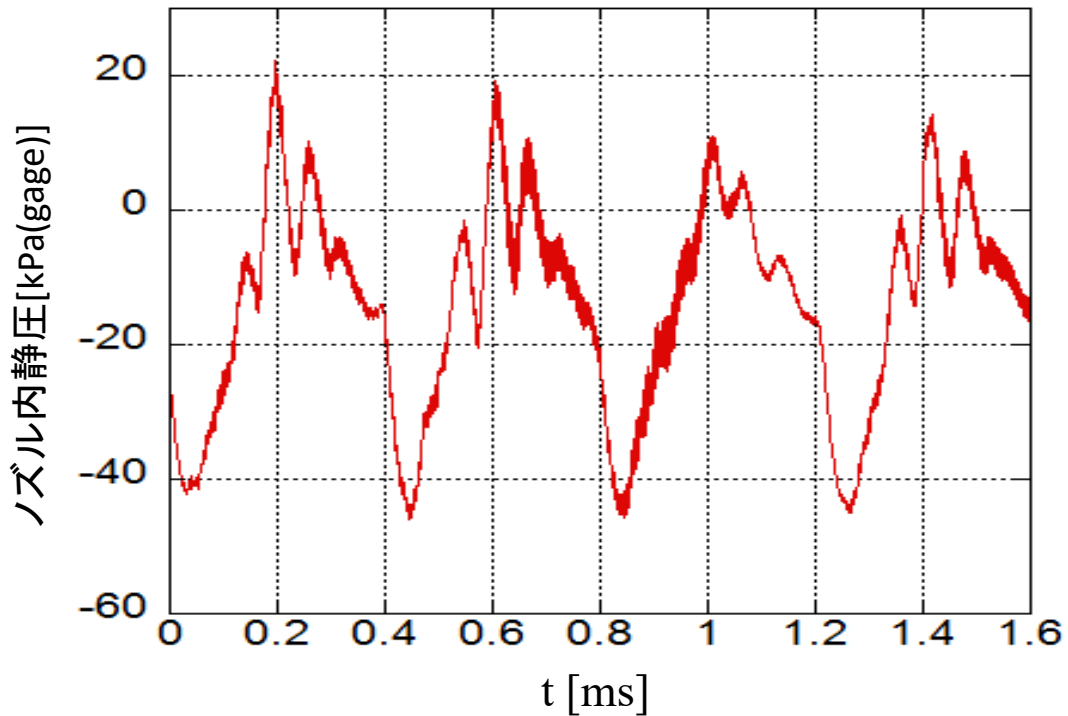


Fig.4.6 音圧スペクトル⁽¹⁵⁾

Fig.4.7 ノズル静圧の時間変動⁽¹⁷⁾

4.1.3 POD 基底

4.1.1 で、POD エネルギーを各ストローク数ごとに比較することでストローク数が 20 で最適だということが分かったので、POD ではストローク数を 20 に設定し、シュリーレン横切り・縦切りに適用した。得られた基底をそれぞれ Fig.4.2, Fig.4.3 示す。POD では、Fig.4.3, Fig.4.4 の示されるように、複数の周波数現象を抽出している。また、処理—レン可視化の方法によって得られる現象やそのパターンを異なる。それらに注意して、Fig.4.8, Fig.4.9 に示されたシュリーレン横切り・縦切りの各モードでの基底に注目していくこととする。

シュリーレン横切り

まずは、シュリーレン横切りの POD 基底から議論していく。いずれのモードも剥離泡形成・崩壊時の現象を強く捉えられている。しかし、複数の周波数を抽出しているが、モードごとによって含有する周波数現象が異なることに注意したい。mode1 では、2.4kHz 付近の現象を強く捉えており、その他の周波数現象は mode2 以降に比べて支配的ではない。

- (a) シュリーレン横切り, mode1 での基底は、剥離せん断層内の現象と剥離せん断層外の現象を強く切り分けていることがわかる。また、流れが剥離する前の境界層を強く捉えている。主流部の流れと剥離せん断層内の逆流を捉えているのではないかと考えられる。この結果と $a_i(t)$ の周波数

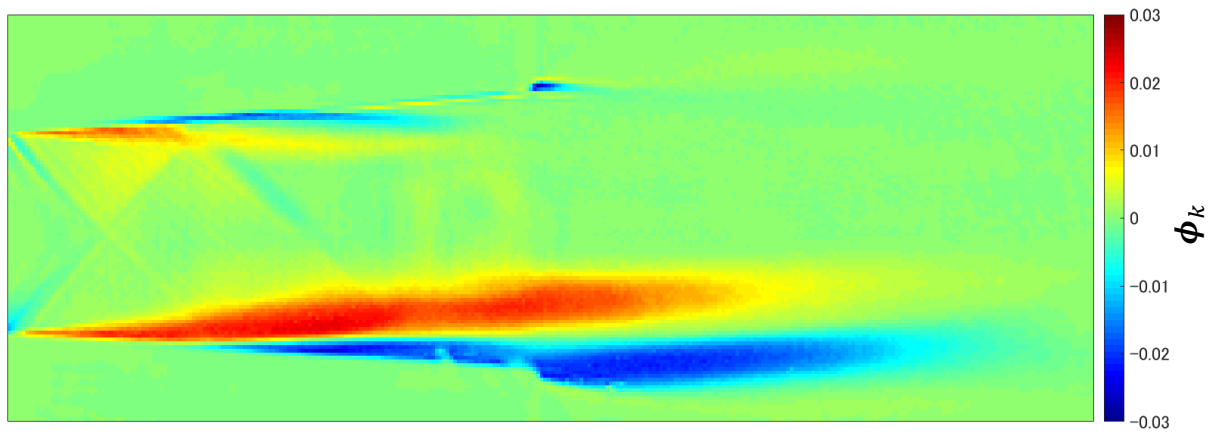
特性から、概ね 2.4kHz の現象に由来するものが、剥離せん断層に沿って伸びる流れであることがわかる。

- (b) シュリーレン横切り, mode2 での基底は、剥離せん断層内の現象(逆流)と剥離せん断層外の現象と、さらに、渦放出、斜め衝撃波と剥離せん断層外の流れの干渉を捉えている。シュリーレン可視化の元画像と比較すると剥離泡が崩壊している瞬間を強く捉えているのではないかと考えられる。POD の性質上, mode1 で捉えることができた現象と比較してより細かな現象である。
- (c) シュリーレン横切り, mode3 での基底は、mode2 で捉えられた現象に加えて剥離せん断層外の現象がさらに、衝撃波が逆流していく部分と主流方向に伸びていく部分に分けられる。逆位相の流れが互いに、境界層がエネルギーを伝える媒体として、影響しあっているのではないかと考えられる。
- (d) シュリーレン横切り, mode4 での基底は、mode1~3 までにあった現象がさらに細分化されて、渦放出や主流部での流れが細かくわかる。

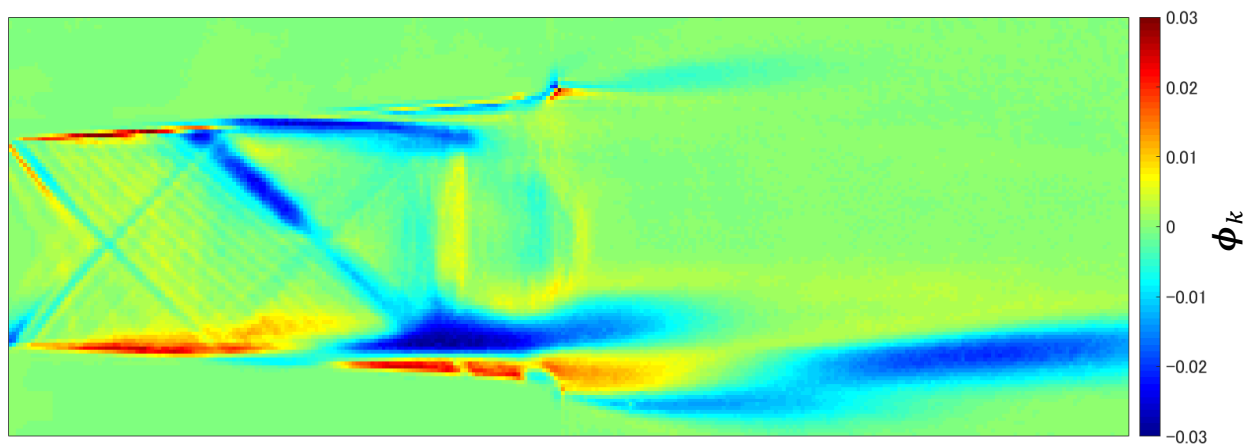
シュリーレン縦切り

シュリーレン縦切りでは、その性質上、剥離泡形成までの現象を強く捉えているのではないかと考えられる。横切りと比べて、より多くの周波数現象が1つのモードに含有されていることがわかる。そのため、ノイズ成分がより多く捉えられており、主要流れの分類が難しい

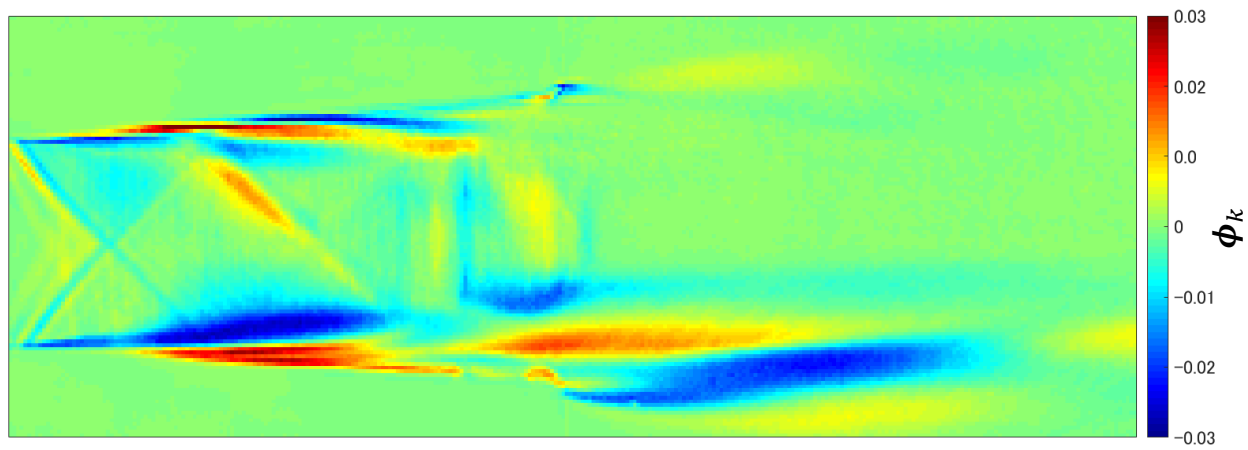
- (a) シュリーレン縦切り, mode1 での基底は、膨張波と剥離せん断層の発達が強くと捉えられている。横切りとは違い、剥離せん断層内の現象と剥離せん断層内の現象が同位相であることがわかる。剥離点より、上流側に存在する網目状のやノズル沿って存在する強い現象が剥離点より下流側にある膨張波や、剪断層内外の流れ、垂直衝撃波などに伝わっていることがわかる
- (b) シュリーレン縦切り, mode2 での基底は、剥離せん断層の発達と垂直衝撃波が強くと捉えられている。
- (c) シュリーレン縦切り, mode3 での基底は、圧縮波と垂直衝撃波が強くと捉えられていると考えられる。ただし、ノイズ成分が強すぎて主要な成分同士の関係性をうまくつかめない。
- (d) シュリーレン縦切り, mode4 での基底は、1.00kHz 付近の現象を捉えるようになるので、衝撃波振動を薄く捉えるようになる。この基底の結果から、1.00kHz の現象は衝撃波振動の主要な現象や音響波に由来する現象を捉えるには、ノイズになってしまうことがわかる。



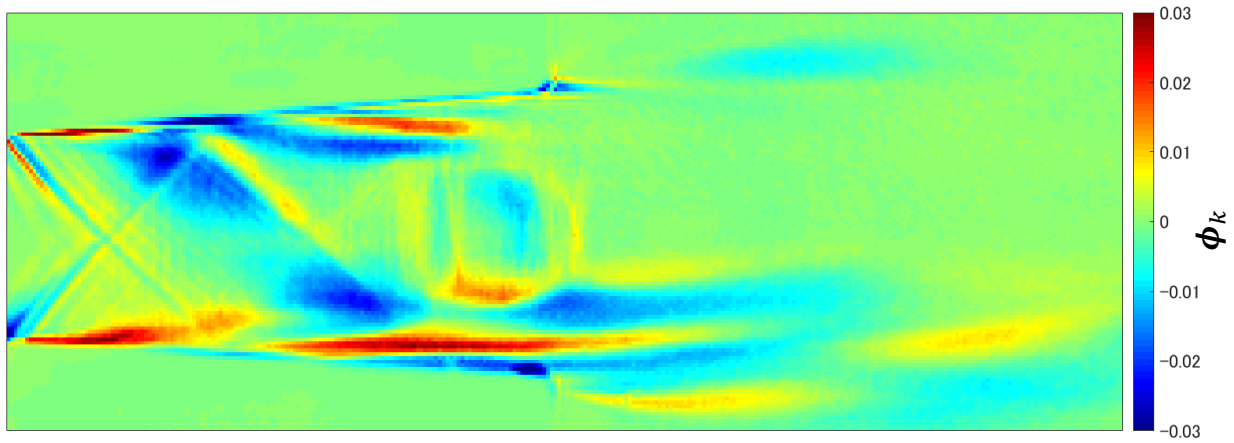
(a) mode1



(b) mode2

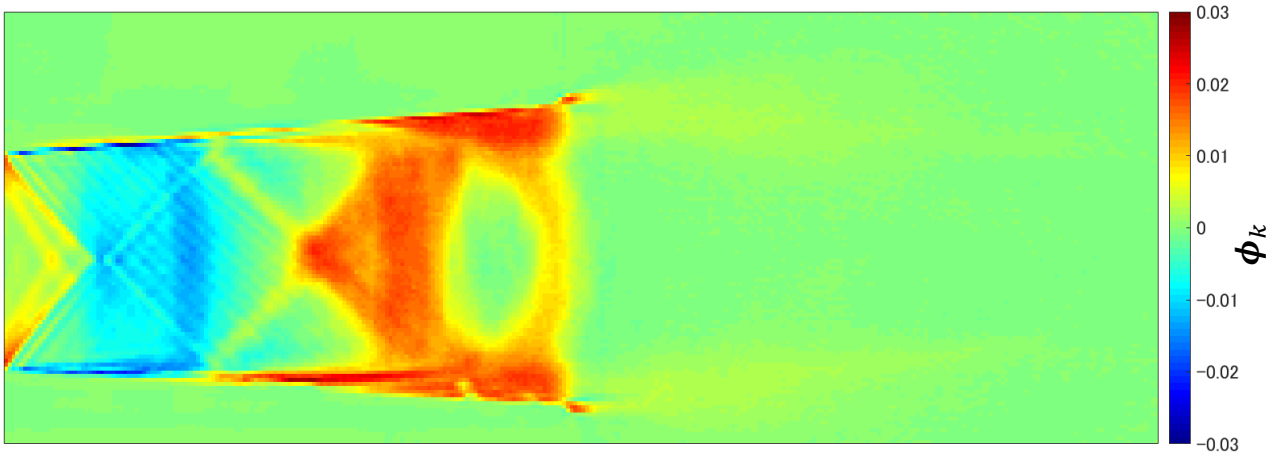


(c) mode3

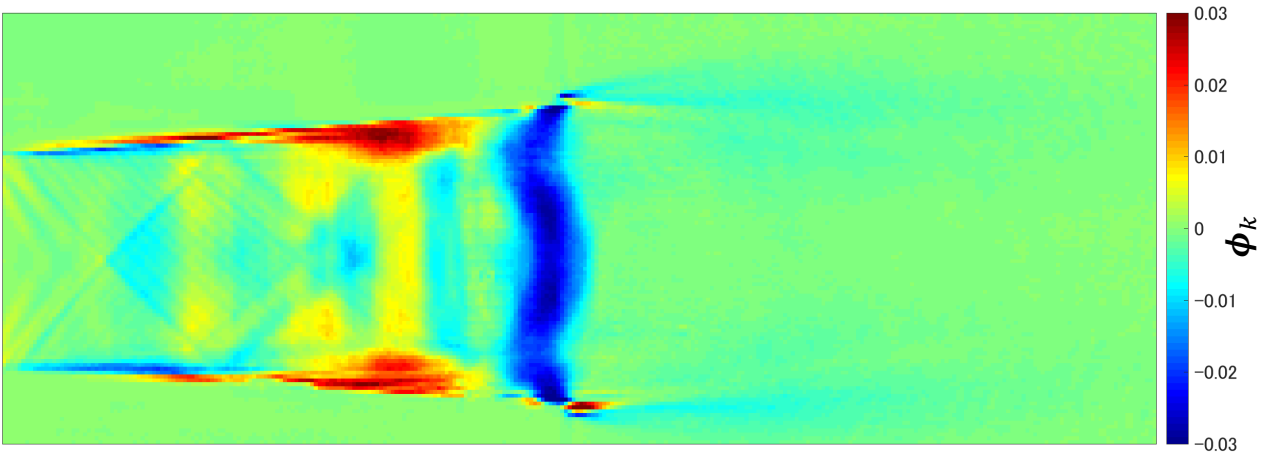


(d) mode4

Fig.4.8 シュリーレン横切り POD 基底(NPR = 1.6)



(a) mode1



(b) mode2

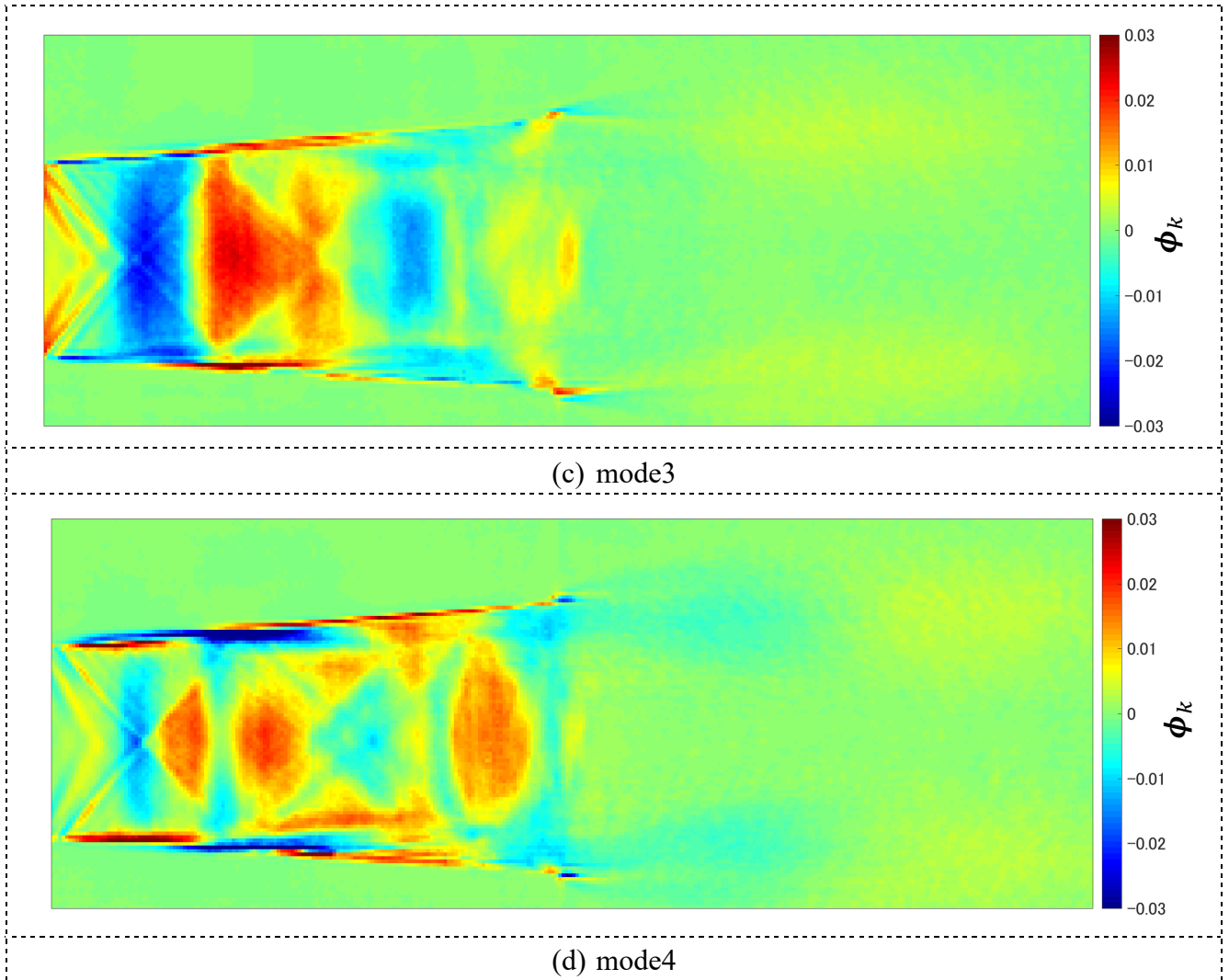


Fig.4.9 シュリーレン縦切り POD 基底(NPR = 1.6)

4.1.4 流れ場の再構成

4.1.2, 4.1.3 の結果から, 流れ場の再構成に用いる. シュリーレン横切り・縦切りともに, 2.4kHz 付近の現象が衝撃波振動に由来しているものであり, それ以降の 4.9kHz, 7.5kHz 付近はともに, 音圧スペクトルに表れているピークであり, 圧力波に由来するものであると考えられる. それ以降に現れるピーク衝撃波振動を捉えるには, ノイズだと見なし, 再構成には用いない. それらを考慮すると, シュリーレン横切り・縦切りともに, モード 1~2 までを再構成するのが最適だと考える. モード 1~2 までで再構成を行い, シュリーレン横切り・縦切り, それぞれ重要な部分を画像をして示す.

シュリーレン横切りでは, 剥離泡の崩壊から剥離せん断層の厚さが一番薄くなるまでを強く示しているので, その現象にフォーカスする.

シュリーレン縦切りでは, 剥離せん断層の発達と, 垂直衝撃波の関係を捉えるタイミングにフォーカスする.

シュリーレン横切り

剥離泡崩壊時にフォーカスして、解析前画像と再構成画像を剥離泡崩壊前、剥離泡崩壊時、剥離泡崩壊後をそれぞれ、Fig.4.10, Fig.4.11, Fig.4.12 に示す。斜め衝撃波は、垂直衝撃波に遅れて下流方向に進んでいく、シュリーレン画像からは、画像左下部から反射波が発達していき、上部で反射し、剪断層の厚みを持った部分に干渉している様子がわかる。流れ場の再構成画像からは、ちょうど剪断層の厚みを持った部分に干渉した途端に、剥離泡が崩壊している様子がわかる。剥離泡の崩壊後もノズル

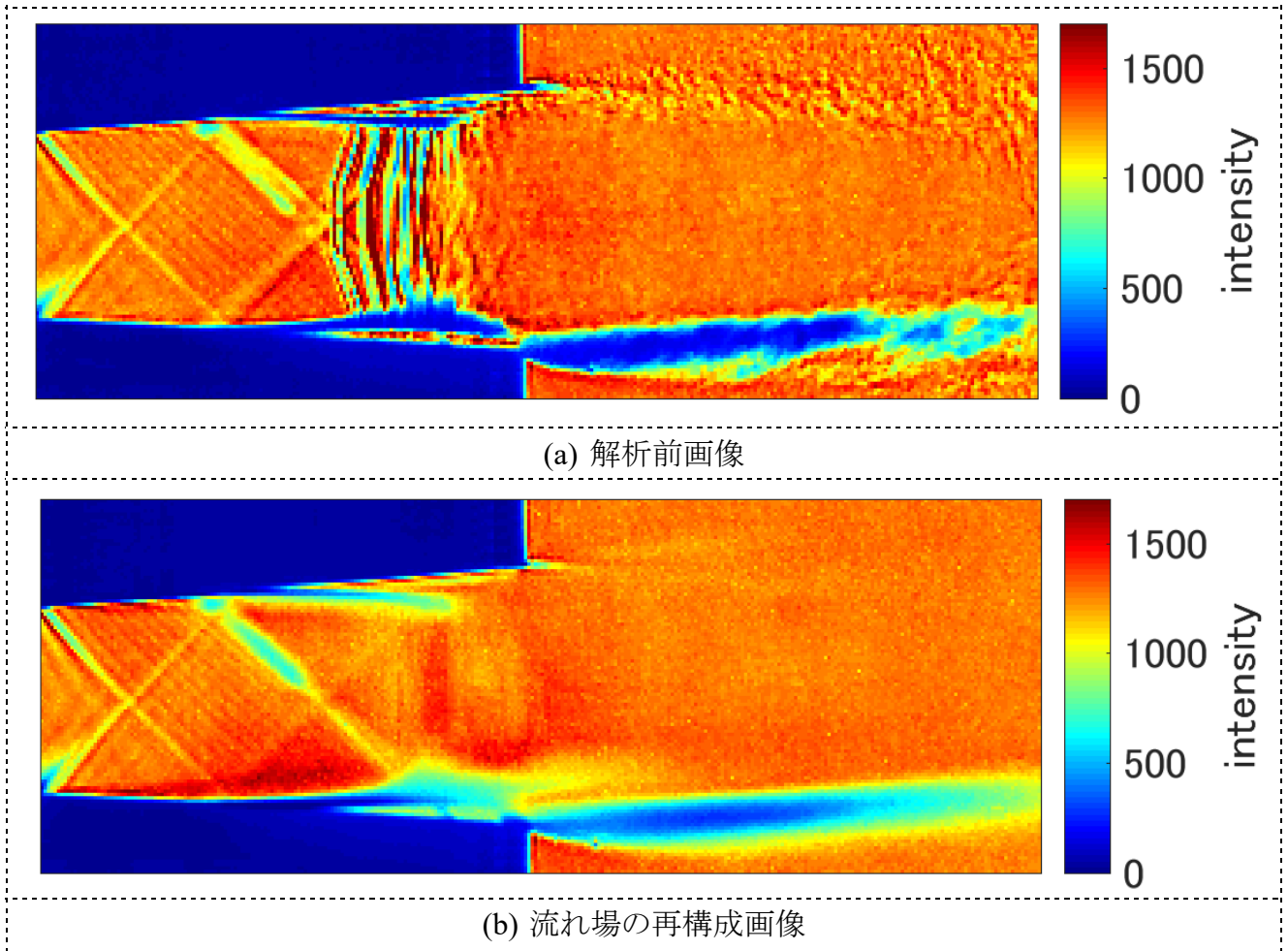
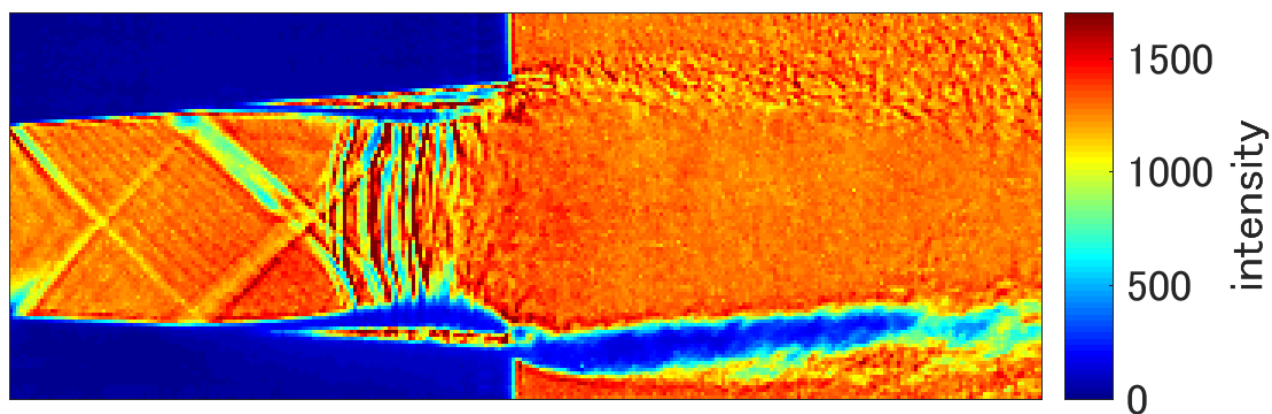
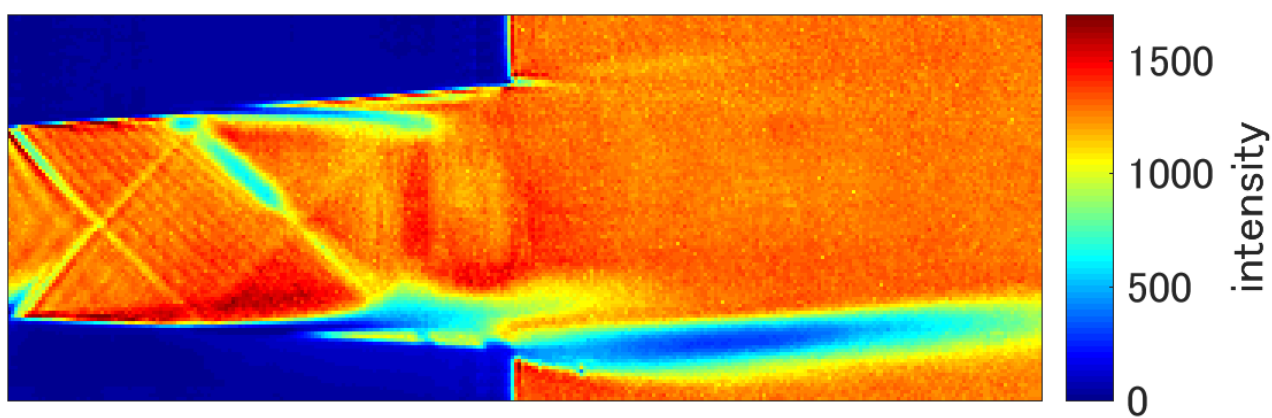


Fig.4.10 剥離泡崩壊前

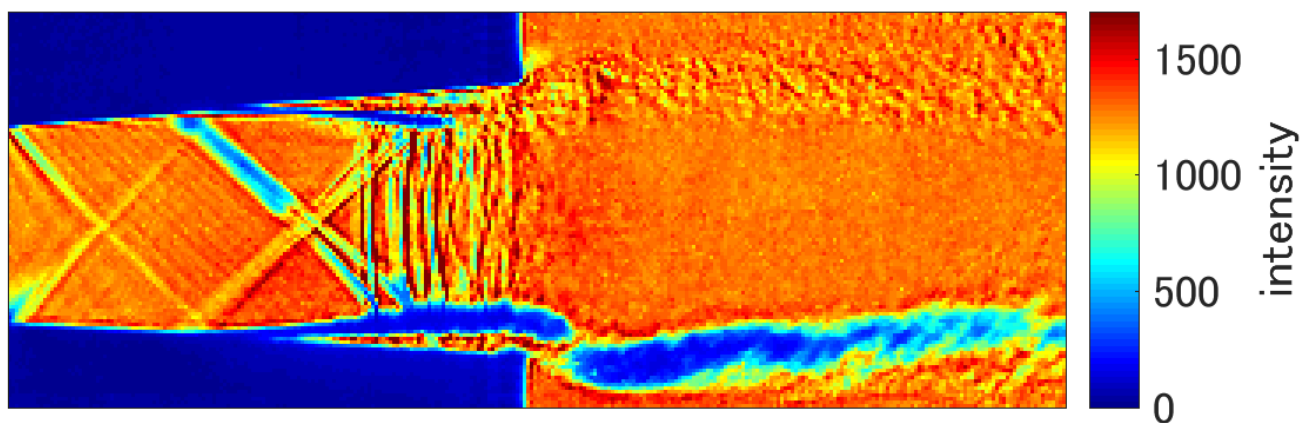


(c) 解析前画像

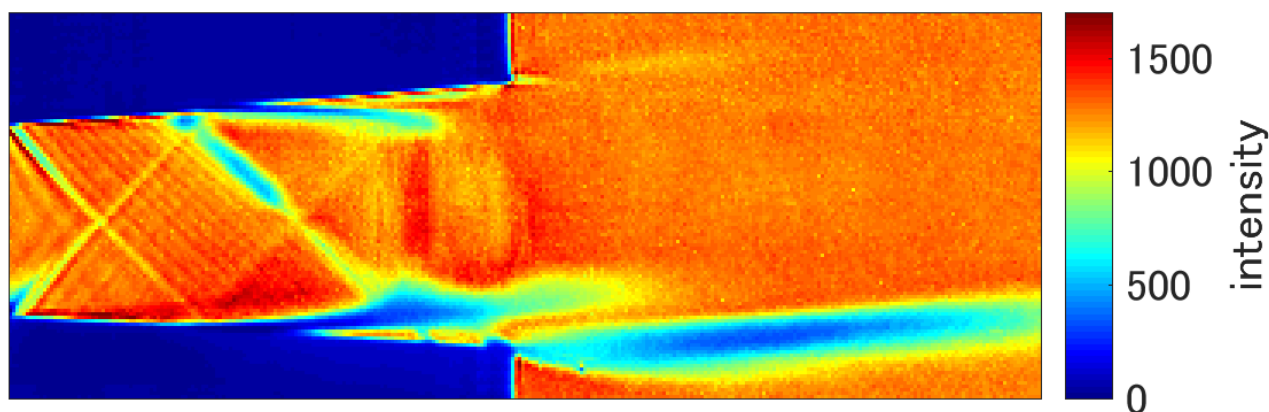


(d) 流れ場の再構成画像

Fig.4.11 剥離泡崩壊時



(e) 解析前画像



(f) 流れ場の再構成画像

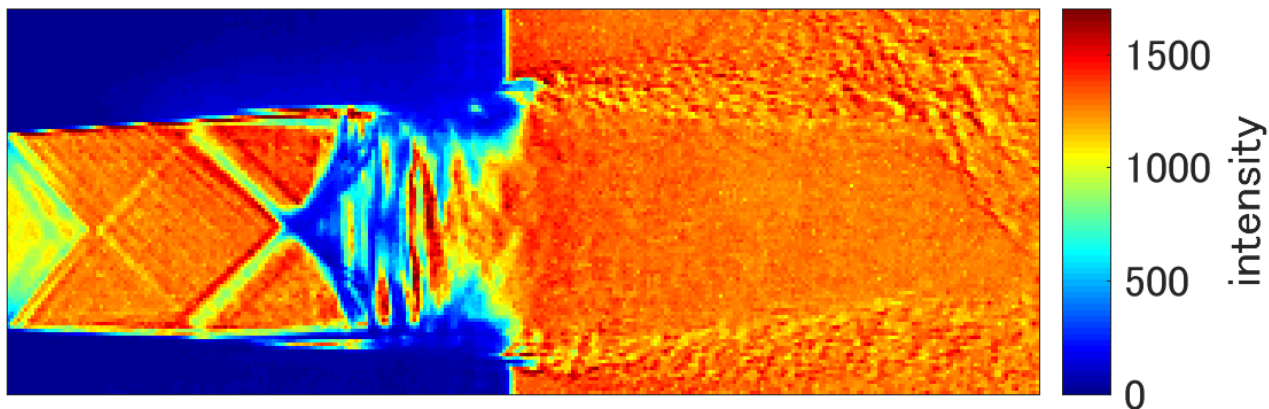
Fig.4.12 剥離泡崩壊後

シュリーレン縦切り

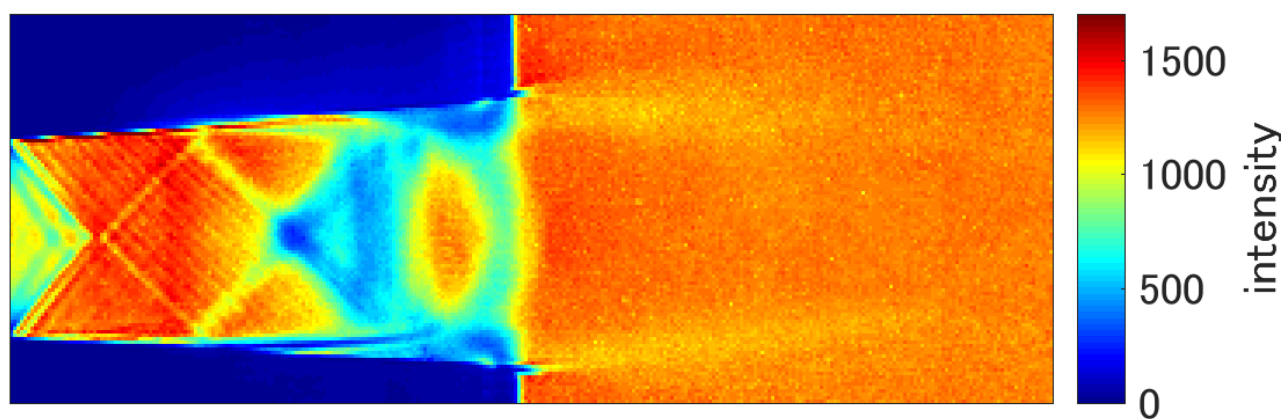
シュリーレン横切りの剥離泡崩壊と関連するのが、垂直衝撃波のノズル出口到達時である。垂直衝撃波のノズル出口到達前、到達時、到達後の流れ場を Fig.4.13, Fig.4.14, Fig.4.15 に示す。それぞれを比較することで、衝撃波がノズル出口に到達する流れと剪断層付近の流れを関連性を調べた。Fig.4.14 では、ノズル出口に衝撃波が到達して留まっている始めと終わりをそれぞれ、(a)(b), (c)(d)に示している。

剥離泡の崩壊後、剥離せん断層付近から、エネルギーが伝わっていることがわかる。この解析からは、ノズル出口に衝撃波が到達する瞬間に渦放出をするかどうかは理解できないことがわかる。

全ての衝撃波がノズル出口に到達した後、約 $3.3 \times 10^{-5} \text{s}$ 滞在して、上流に押し戻される。

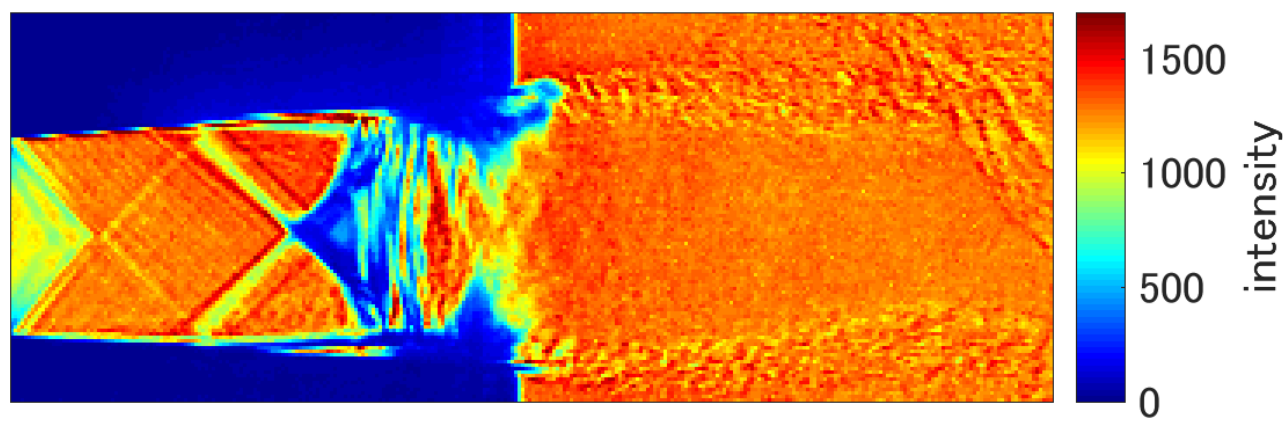


(g) 解析前画像

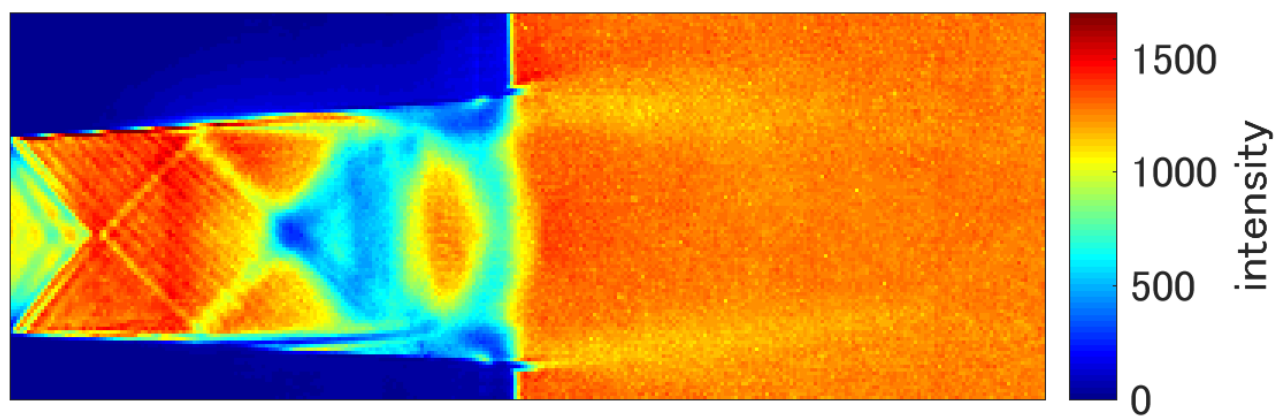


(h) 流れ場の再構成画像

Fig.4.13 剥離泡崩壊前



(i) 解析前画像



(j) 流れ場の再構成画像

Fig.4.14 剥離泡崩壊時

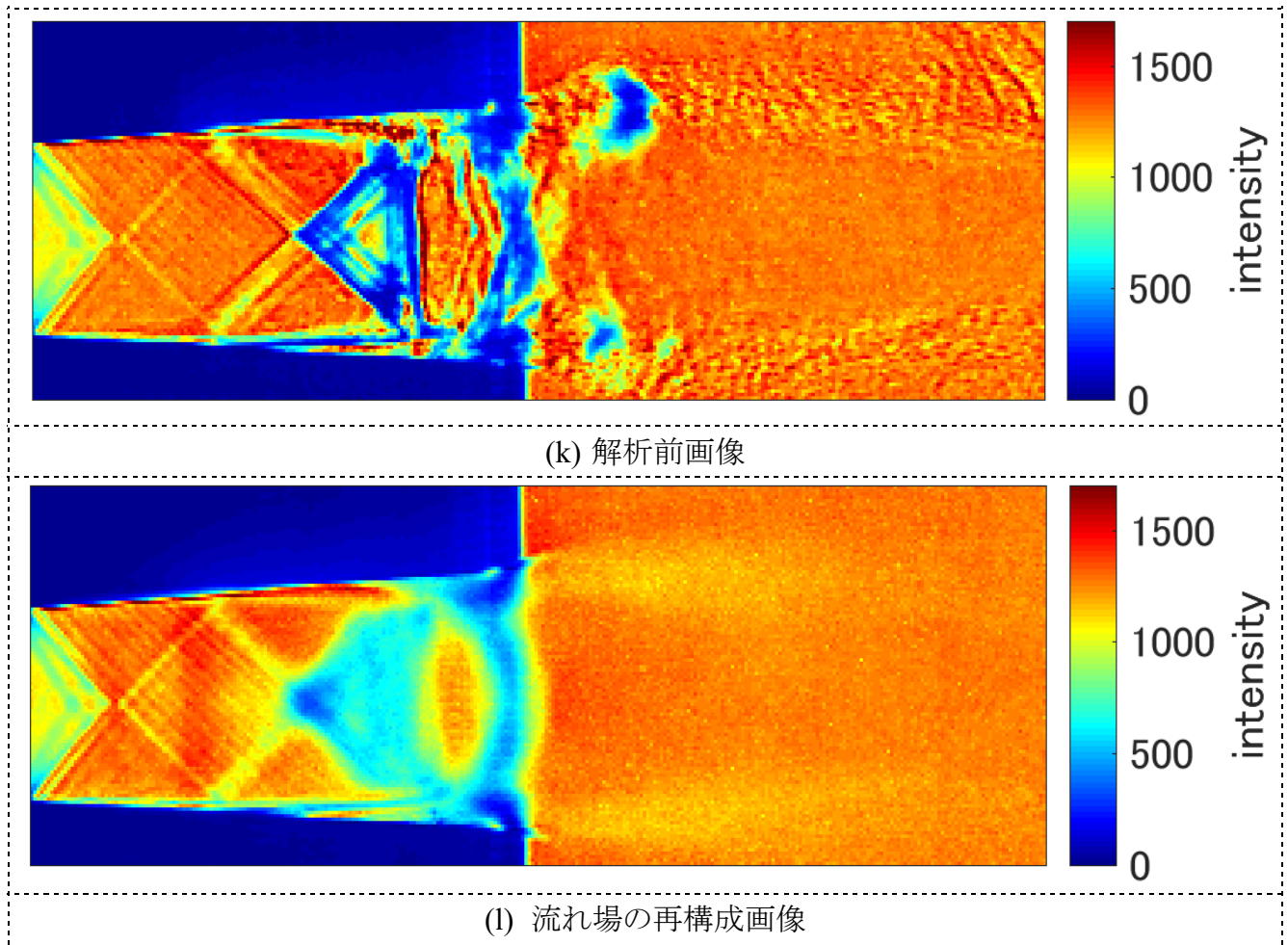


Fig.4.15 衝撃波ノズル出口到達時(剥離泡の崩壊, 渦放出後)

4.2 SPOD

次に, シュリーレン横切り・縦切りに SPOD を適用した結果を示す. POD とは, 異なり, 周波数, 各モードの基底や固有ベクトルを求めることができる. POD では, 複数の周波数現象が含まれているため, 特徴的な周波数でピークをもつ現象を捉えるには, 適していない. また, SPOD は空間と時間にコヒーレントに発展する構造を表すのに対し, POD は一般的にそうではないことがわかっている⁽¹⁹⁾. まずは, 固有値を周波数, モードごとに評価する. 石橋によって得られたノズル内静圧スペクトル⁽¹⁷⁾, 半澤によって得られた音圧スペクトル⁽¹⁵⁾と比較することによって, SPOD の結果が妥当な解析なのかと評価する. また, 第三章の SPOD Algorithm から Snapshot の数に依存して周波数分解能が決まることがわかる. その, 周波数分解能が Transonic tone のような特徴的な周波数現象を捉えるのに, 十分であるかを評価する. その後, ピーク周波数での横切り・縦切りの基底を示して, 既知の流体減少と同定することでラバルノズル内の非定常可視化画像への SPOD 適用の有効性を示す.

4.2.1 固有値(SPOD エネルギー効率), 周波数分解能の妥当性

上記に示した通り, 解析の妥当性を検証するために, 各周波数での $\widetilde{A}_{f_k}$ の和/SPOD の $\widetilde{A}_{f_k}$ の総和からわかる周波数特性と, Fig.4.5, Fig.4.6 のノズル内静圧スペクトルと音圧スペクトルを比較する. Fig.4.16, Fig.4.17 に SPOD エネルギーの周波数特性 ($P_{f_k} = A_{f_k} / \sum_i \lambda_i$) をシュリーレン横切り・縦切りをそれぞれ示す. それぞれ, ピーク周波数は左から, 2.58kHz, 4.92kHz, 7.50kHz である. 音圧スペクトルを比較して, ピーク周波数は, 概ね一致している. また, ノズル内静圧スペクトルと比較しても Stage1 のピーク周波数と概ね一致していることがわかる.

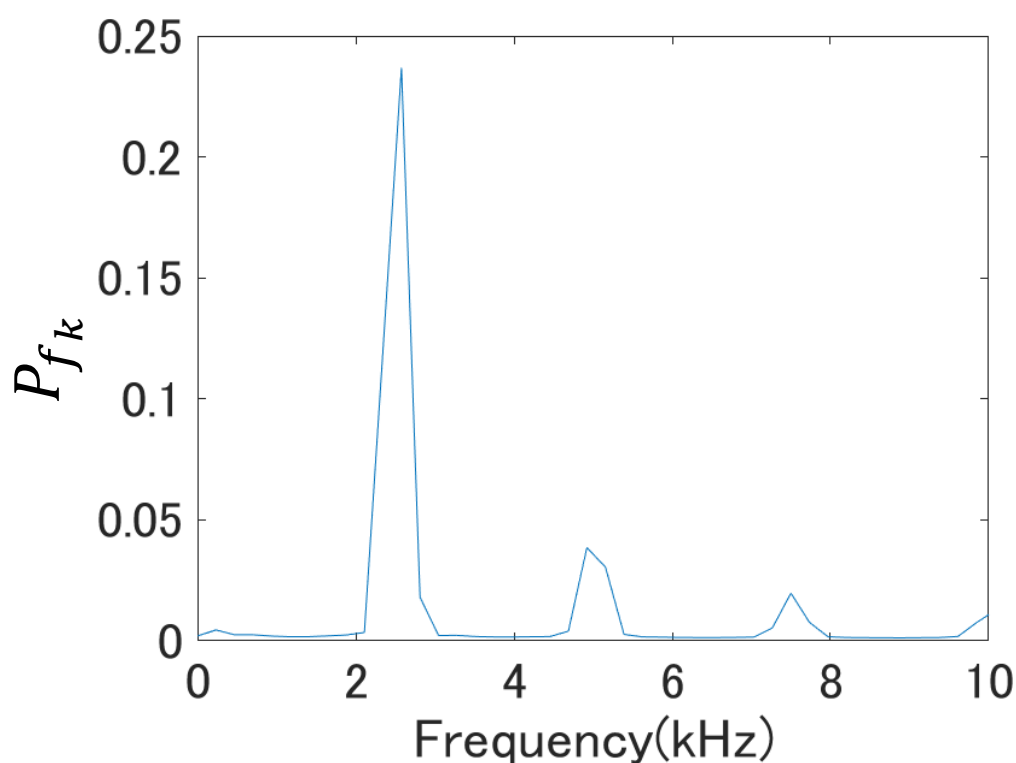


Fig.4.16 各周波数での $\widetilde{A}_{f_k}$ の和/SPOD の $\widetilde{A}_{f_k}$ の総和 (横切り)

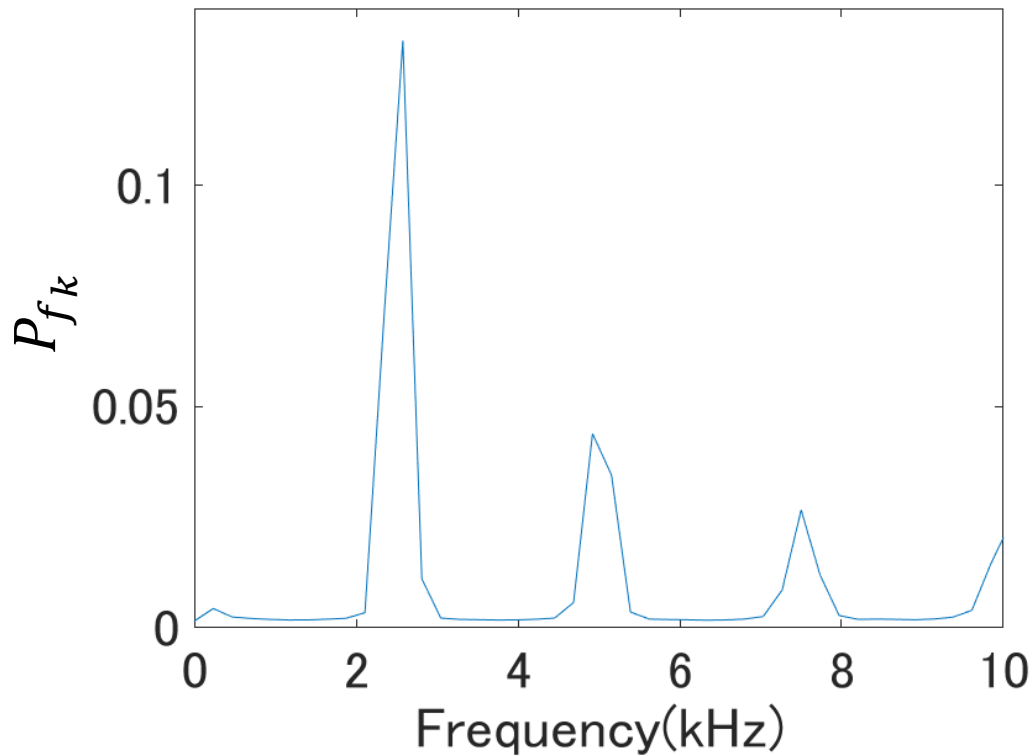


Fig.4.17 各周波数での $\tilde{\Lambda}_{f_k}$ の和/SPOD の $\tilde{\Lambda}_{f_k}$ の総和(縦切り)

また, 周波数分解能が妥当か検証する. Table.4.1 に Snapshot の数ごとの周波数分解能を示す.

Table.4.1 各 Snapshot の数の周波数分解能

Snapshotの枚数	周波数分解能(Hz)
5000	930
10000	467
15000	234

石橋の実験⁽¹⁷⁾では, Snapshot の合計枚数が 17,685 枚であり, 測定開始と終了付近の約 1,000 枚を差し引いた, 15,000 枚を有効データとする. 5,000 枚, 10,000 枚, 15,000 枚で比較していくと, 15,000 枚での周波数分解能 234Hz が一番よい. また, 式(2.42)によって抽出する周波数は決まるため, N_f を大きくすれば周波数分解能はよくなる. N_f 変更時の周波数分解能(Hz), 抽出モード数, ピーク周波数のモード 1 での SPOD エネルギー, ピーク周波数を Table.4.2 にそれぞれ示す.

Table.4.2 N_f 変更時での各パラメータ

N_f	1024	2048	4096
周波数分解能(Hz)	234	117	58.6
モード数	28	13	6
SPODエネルギー	4.00E+06	6.20E+05	1.80E+05
ピーク周波数(kHz)	2.58	2.46	2.52

N_f を増やしても、十分周波数分解能も良くなり、さらに SPOD エネルギーが落ちることがわかる。

これらを考慮した結果、 N_f は変更を加えずに、Snapshot の枚数 15,000 に設定した条件が、周波数分解能十分とれた上で、十分な SPOD エネルギーを確保できることがわかる。よって、Welch 法に準拠して解析を行うことにした。

各モードの寄与率 P_k を横切り・縦切りそれぞれ Fig.4.18, Fig.4.19 に示す。これらから、横切り・縦切りともに、モード 1 で全体の 55%なので、モード 1 のみで十分現象を捉えられていることがわかる。モード 2 以降の寄与率は、モード 1 と比較して極めて低く、議論する必要がないと考えられる。

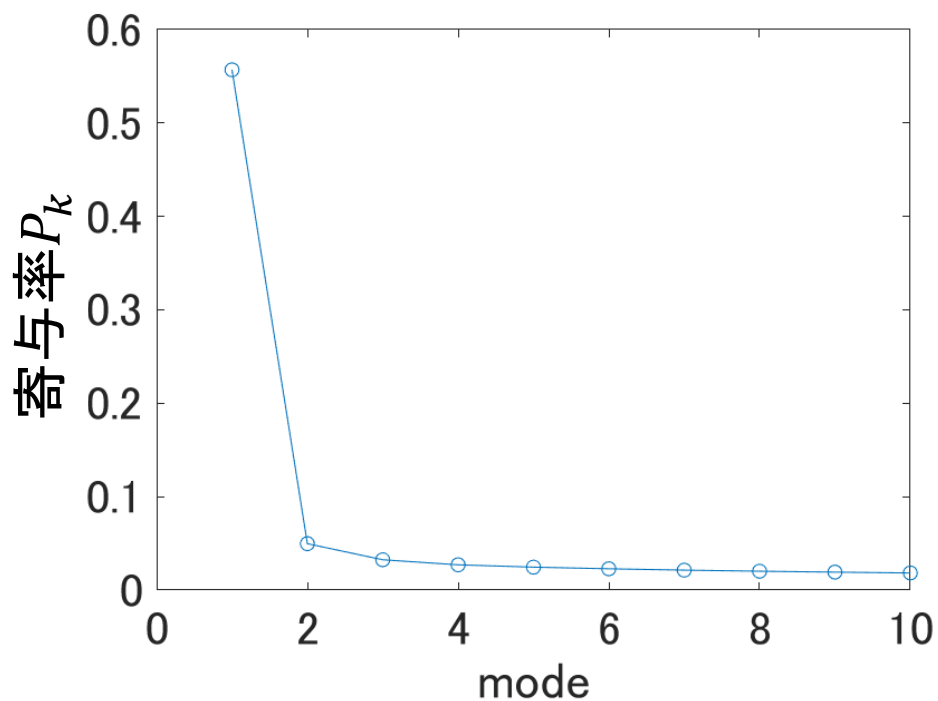


Fig.4.18 各モードでの $\tilde{\Lambda}_{f,k}$ の和/SPODの $\tilde{\Lambda}_{f,k}$ の総和(横切り)

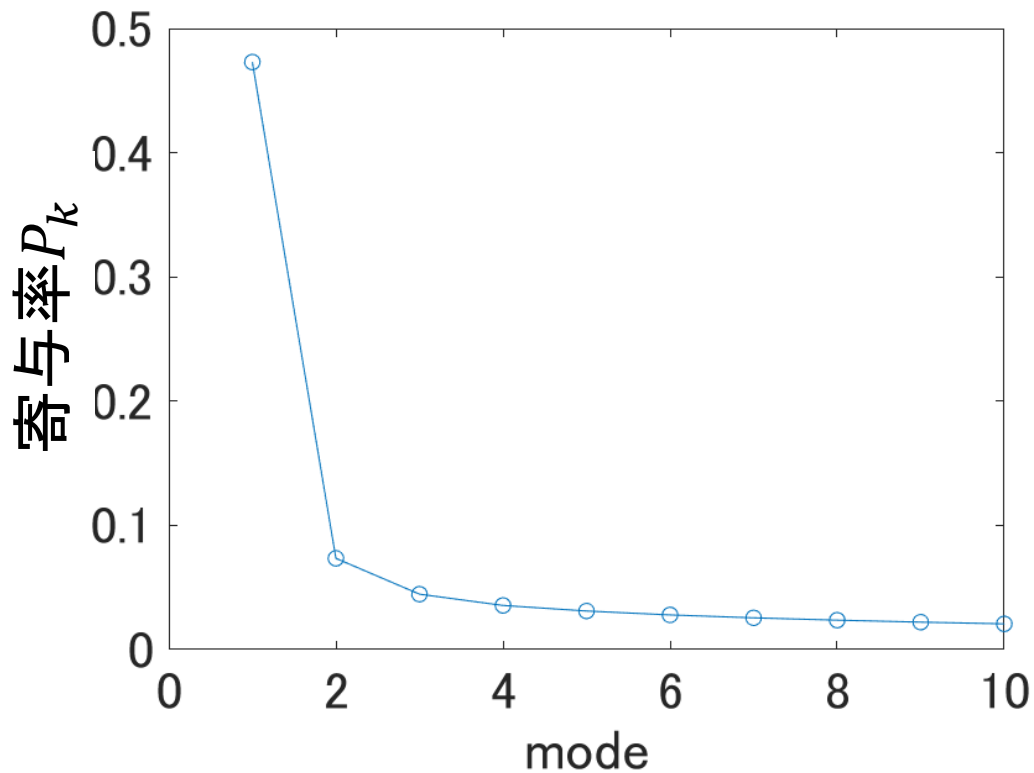


Fig.4.19 各モードでの $\tilde{\Lambda}_{fk}$ の和/SPODの $\tilde{\Lambda}_{fk}$ の総和(縦切り)

4.2.2 ピーク周波数での SPOD 基底

NPR1.6, シュリーレン横切り・縦切りでのピーク周波数, モード 1 での基底をそれぞれ Fig.4.20, Fig.4.21 に示す. カラーコンタの示す量は, SPOD 基底 $\tilde{\Psi}_{fk}$ をこの周波数での全エネルギーで規格化したものである. よって, ある特定の周波数でのエネルギーのうちそのモードによって記述される割合を示している.

シュリーレン横切りでは, 剥離せん断層内の流れ, 剥離せん断層外の流れ, 斜め衝撃波(反射衝撃波)を捉えていることがわかる. それぞれに関連性があることがわかるが特に, 剥離せん断層と衝撃波の干渉がエネルギー伝達(壁圧上昇)と関係があるのでないかと考えられる.

シュリーレン縦切りでは, 垂直衝撃波, 剥離せん断層の厚みの発達(剥離泡の形成)などが捉えられている. 剥離点前の乱流境界層での流れが剥離し衝撃波振動の流れであり, また, 剥離点から剥離泡形成されていることもわかる. そして, 垂直衝撃波がノズル出口に伝わることをわかる.

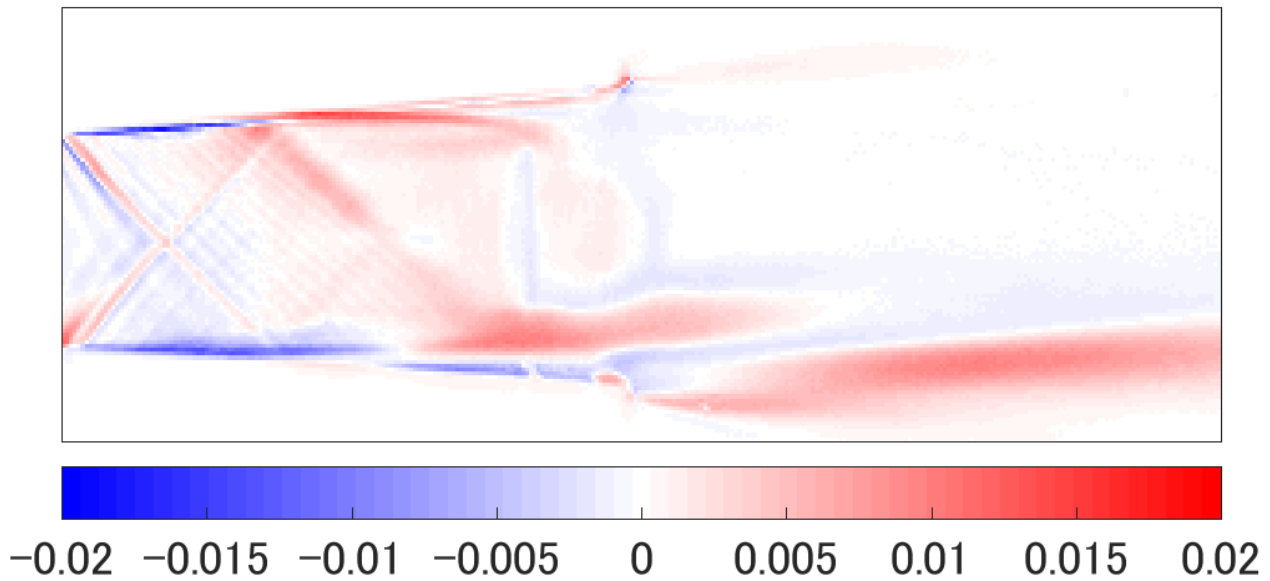


Fig.4.20 2.58kHz, モード 1 での SPOD 基底 $\tilde{\psi}_{fk}$ (横切り)

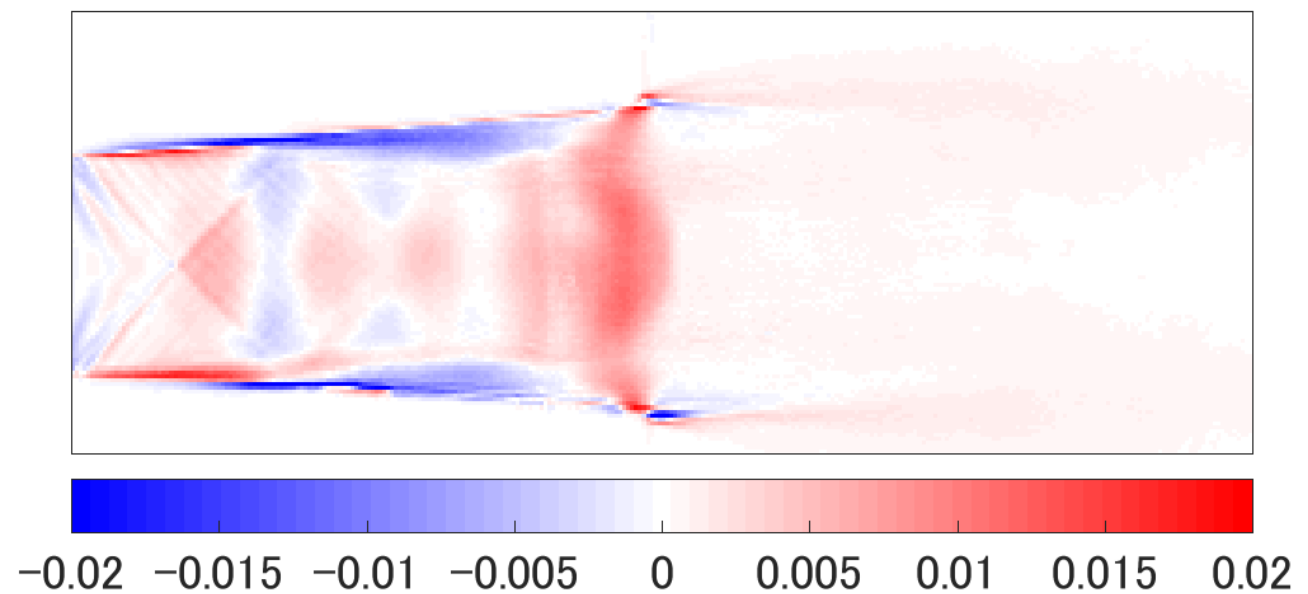
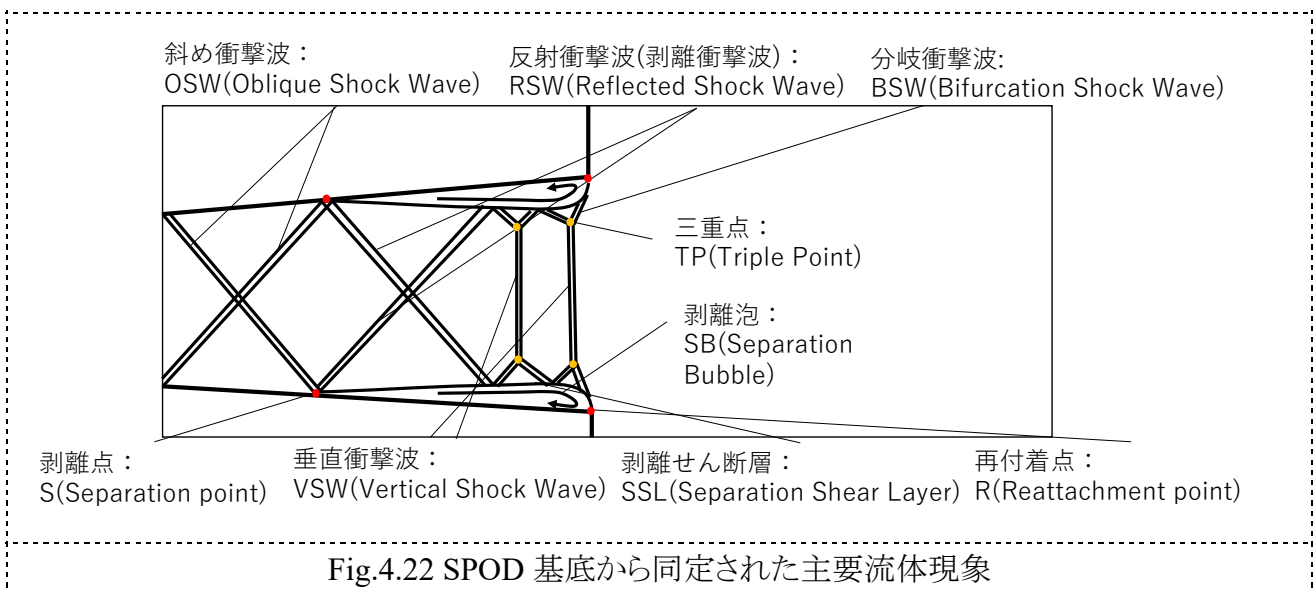


Fig.4.21 2.58kHz, モード 1 での SPOD 基底 $\tilde{\psi}_{fk}$ (縦切り)

4.2.3 SPOD 基底と主要流体现象の同定

SPOD 基底と先行研究からわかっている流体现象⁽¹⁷⁾との同定を行う。単純化モデル構築の動機付けとして, SPOD 基底は重要であることがわかっている⁽¹⁹⁾。シュリーレン可視化画像に適用した SPOD 基底を用いているため, 測定方法の性質上, 同定が困難な部分がある。シュリーレン横切りでは, 噴流軸に対して垂直な方向にナイフエッジで切っていて, 特に噴流軸から上部(シュリーレン画像上部)

の光をカットしているため、その部分の流れを横切りによって同定することは難しい。そこで、シュリーレン縦切りの SPOD 基底を利用した。シュリーレン縦切りからわかるように、衝撃波振動や剥離泡形成などの主要流れは、画像上下で対照的である。そのことから、シュリーレン横切りで得られる現象も、対照的な現象と見なすことができる。シュリーレン横切りでは、4.2.2 に示した通り、SPOD 基底から剥離せん断層と反射衝撃波の干渉を抽出している様子がわかる。また、横切りと縦切りともに斜め衝撃波(入射衝撃波)が乱流境界層に干渉する位置で剥離している様子も捉えている。その後、剥離した流れに反射衝撃波が干渉した位置に衝撃波が境界層の近くで枝分かれした状態になること(衝撃波の分岐、分岐衝撃波)や垂直衝撃波が縦切りの SPOD 基底からわかる。剥離した流れが再付着する理由として、分岐衝撃波と剥離せん断層が干渉することが考えられる。その影響で剥離泡を形成し、逆流領域が生じる。



第5章 結論

本研究では、遷音速流によって Transonic tone が発生する流れ場のシュリーレン可視化画像に対して、Snapshot-POD, SPOD を適用し、衝撃波振動での支配的な物理現象を捉えることを試みた。特に、本研究では、特徴的な周波数でピークを迎えるような現象を捉えるために、POD モードの展開係数及び、SPOD のモード性質を応用して周期現象を読み解くことで主要な流れを抽出した。

POD 結果・再構成

シュリーレン横切りでの流れ場の再構成に着目すると、反射衝撃波が剥離せん断層に干渉した瞬間に剥離泡が崩壊している様子が、解析後の画像よりわかる。このことから、反射衝撃波がノズル壁に対してエネルギーを伝えているのではないかと考えられる。シュリーレン縦切りでの流れ場の再構成に着目すると、剪断層付近流れの発達、膨張波、垂直衝撃波を強く捉えており、それらの関係性を理解することができる。剥離泡の崩壊と垂直衝撃波のノズル出口の到達である。解析後の画像に着目すると、ノズル出口に先頭衝撃波が伝わる様子はわからないが、すべての衝撃波がノズル出口に滞在した時間は、カメラの撮影速度と Snapshot の枚数からわかる。POD からは、その流体现象での支配的な物理現象を捉えることはできるが、周期的な現象について解析することは難しいことが分かった。

SPOD 同期解析による現象の断定

SPOD 基底から主要な流れとして、剥離せん断層内の流れ(逆流)、剥離せん断層外の流れ(衝撃波振動)、斜め衝撃波(反射衝撃波)を捉えていることわかる。SPOD の性質上、これらの流体现象はコヒーレントな関係であり、周期現象の中で互いに関係していると考えられる。乱流境界層に斜め衝撃波が干渉し、剥離した流れが衝撃波振動に由来する流れ(剥離せん断層内の流れ)に関係する。剥離せん断層内では、逆流領域が存在し剥離泡が形成される。その際に、垂直衝撃波が分岐した衝撃波と剥離せん断層が干渉することによって、剥離泡が崩壊しているのではないかと考えられる。以上から、SPOD 解析はピークの鋭い周波数現象に対して効果的にその特性を可視化することができた。

また、本研究では、衝撃波振動に着目してシュリーレン可視化画像に適用した。SPOD による超音速噴流から発生する音響波のシュリーレン画像に同定⁽²⁴⁾では、シュリーレン可視化画像に SPOD を適用して音響波を抽出していることがわかる。そのことから、Transonic tone が支配的なラバルノズル内の遷音速流の音響場(流体変動を含まない領域)に解析領域を限定することで、音源位置から伝播パターンを示し、衝撃波振動に由来する周期現象と同定することができるのではないかと考えられる。

参考文献

- (1) Strykowski, P.J., Counterflow thrust vectoring of supersonic jets, *AIAA J.*, 34(1996), pp.2306-2314.
- (2) Ramesh, R., Pradeep, S., Muraganadam, M. ,and Sujith, R., Studies on freejets from nozzles for high speed mixing applications, *Experiments in Fluids*, 29(2000), pp.359-368.
- (3) 渡辺泰秀, LE-7A エンジンノズル内段差による剥離の停滞とジャンプの現象, 日本航空宇宙学会論文集, Vol.55, No.645, pp.467-473, 2007
- (4) 米澤宏一, 二次元超音速ノズルの停止時に生じる横推力に関する研究, 日本機械学会論文集, 69 巻 683 号, 2003
- (5) Sanjiva K. Lele, Britton J. Olson, A mechanism for unsteady separation in over-expanded nozzle flow, *Phys. Fluids*, 110809 (2013)
- (6) 米澤宏一, ロケットノズルに生じる横推力に関する 3 次元非定常 CFD, 日本機械学会, 2002
- (7) Crow, S. C. and Champagne, F. H., Orderly structure in jet turbulence, *J. Fluid Mech.*, 48(1971), pp.547-591.
- (8) Brown, G. L. and Roshko, A., On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.*, 64(1974), pp.715-816.
- (9) Harper-Bourne, M. and Fisher, M.J., The noise from shock wave in supersonic jets, *Proceedings of the AGARD Conference on Noise Mechanisms*, B131(1973), pp.11.1 – 11.3.
- (10) Tanna, H.K., An experimental study of jet noise, Part: shock associated noise, *J. Sound and Vibration*, 50(1977), pp.429-444.
- (11) Tam, C.K.W., Stochastic model theory of broadband shock associated noise from supersonic jets, *J. Sound and Vibration*, 116(1987), pp.265-302.
- (12) Powell, A., On the noise emanating from a two-dimensional jet above the critical pressure, *Aeronautical Quarterly*, 4(1953), pp.103-122.
- (13) Tam, C.K.W., Seiner, J.M., and Yu, J.M., Proposed relationship between broadband shock associated noise and screech tones, *J. Sound and Vibration*, 110-2(1986), pp.309-312.

- (14) 宮里義昭,ラバルノズルからの超音速噴流の騒音特性に関する実験,流体光学部門講演会講演論文集,pp.45(2003)
- (15) 半澤雄太, 二次元超音速ノズルから発生する空力騒音に関する研究, 日本機械学会九州支部講演論文集 Vol.67, No.630(2014)
- (16) K.B.M.Q,Zaman, M.D.Dahl,T.J.Benic and C.Y.Loh, Investigation of a transonic resonance with convergent-divergent nozzles, *J.Fluid Mech.*,463(2002), pp.313-343.
- (17) 石橋遼平, ラバルノズルから発生する流体騒音の機序に関する実験的研究, 2015年度, 環境エネルギー工学専攻 修士論文
- (18) 平 邦彦: ながれ, **30**(2011), 115-123
- (19) A. Towne *et al.*: *J. Fluid Mech.*, **847**(2018), 821-867.
- (20) 流れの可視化学会, 流れの可視化ハンドブック, 朝倉書店(1986)
- (21)宮武京右, 固有直交分解を用いた流体可視化画像からの特徴量抽出, 2020 年度, 環境エネルギー工学専攻 卒業論文
- (22) Perter D. Welch, IEEE TRANSACTIONS ON AUDIO AND ELECTTOACOUSTICS, Vol. AU-15, No.2, 1967
- (23)Oliver Schmidt, Spectral proper orthogonal decomposition(SPOD)
https://github.com/SpectralPOD/spod_matlab
- (24) 小澤雄太, 超音速噴流の乱流構造と発生する音響波の可視化, 可視化情報 Vol.39 No.155 (2019)

謝 辞

本研究活動にあたり、多くの方々にお世話になりました。お世話になった方々に感謝の言葉を述べさせていただきます。

安養寺正之 准教授には、研究を進めていくうえで、的確な助言や多くのご指導をしていただきました。先生おかげで、この修士論文を書き上げることができました。本当にありがとうございました。

大和裕里 秘書には、事務的な手続き等、便宜を図っていただきました。ありがとうございました。

浜辺直子 秘書には、精神面で研究活動を行う中支えていただきました。本当にありがとうございました。

JSPS 外国人特別研究員の Than The Hung 氏には、私の拙い英語に耳を傾けてくださり、研究面での的確な助言をいただきました。ありがとうございました。

本研究室博士課程の土黒聖斗 さん、Sharma Gopal さんには、本研究を円滑に進めるにあたり、多大なるご協力をいただきました。ありがとうございました。

本研究室の谷晃徳 君、宮武京右 君、山口拓真 君のおかげで非常に有意義な研究室生活を送ることができました。また、研究活動以外の面でも大変仲良くさせてもらいました。ありがとうございました。

本研究室の木村航 君、稲又雅人 君、田邊龍聖 君、井上ヒカリ さん、Zhang Yuekai 君にも心から感謝しております。これからも、頑張ってください。

さらに、精神的・金銭的ともに支援をしてくださった家族には心から感謝しております。家族の支えなしでは、研究活動を続けることができませんでした。社会に出て少しずつその恩を返せていけたらと思っています。本当にありがとうございました。

本大学院に入学してから、この度修士論文を完成させるに至る過程で、総合理工学専攻の皆様ほか、多くの方々にご指導ご鞭撻を賜りました。皆様への感謝の意を表し、謝辞とします。

令和5年2月7日