

自動車構造を対象とした効率的振動分析技術に関する研究

中島, 樹

<https://hdl.handle.net/2324/6787605>

出版情報 : Kyushu University, 2022, 博士 (工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

自動車構造を対象とした効率的振動分析技術
に関する研究

九州大学大学院 工学府 機械工学専攻

中島 樹

目次

第1章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	有限要素法およびモード解析を用いた振動分析	1
1.3	本研究の目的	4
1.4	局部振動分離法	5
1.5	ウェーブレット変換を用いた振動分離手法	6
1.6	構成要素モード分解	8
1.7	本論文の構成	8
第2章	解析モデル	10
2.1	解析モデルについて	10
2.2	解析モデルの固有モード	13
2.3	解析モデルの周波数応答	16
2.4	構造全体振動と局部振動，および連成振動への振動対策	18
2.4.1	構造全体振動が支配的なモードに対する振動対策	19
2.4.2	局部振動が支配的なモードに対する振動対策	19
2.4.3	構造全体振動と局部振動が連成するモードに対する振動対策	20
第3章	局部振動分離法	25
3.1	局部振動分離法について	25
3.3	局部振動分離法を用いた構造全体振動と局部振動の分離	27
3.4	分離した振動に着目した固有モードの分類	32
第4章	三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法	36
4.1	離散ウェーブレット変換の概要と三次元離散ウェーブレット変換への展開	36
4.2	三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法	42
第5章	直交変換を用いた構成要素モード分解と固有モードにおける 連成度評価	50

5.1	主系モードの抽出	50
5.2	従系モードの抽出	54
5.2.1	k-means 法を用いた局部振動領域の特定	54
5.2.2	DBSCAN を用いた局部振動領域の特定	58
5.2.3	特定した局部振動領域に基づく従系モードの抽出.....	61
5.3	固有モードの連成度評価.....	65
5.4	構成要素モードの平滑化による振動数評価.....	68
第6章	結 言	71
謝 辞	74
付録 A	Guyan の静縮小	75
付録 B	k-means 法および k-means++法	77
付録 C	Daubechies wavelet	79
C.1	トゥースケール関係	79
C.2	トゥースケール関係による分解アルゴリズム.....	80
C.3	トゥースケール関係による再構成アルゴリズム.....	81
C.4	離散直交ウェーブレット	82
C.5	コンパクト・サポート	84
C.6	Daubechies のウェーブレット	85
付録 D	DBSCAN	87
参考文献	88

第1章 序 論

1.1 はじめに

現代の人々の生活に必要不可欠となった自動車という乗り物にはマシンとして、あるいは商品として、走行性能だけでなく環境性能やデザイン性、耐久性、快適性など多くの要求が伴う。そのうち安全性や居住性に影響を与える要素としてNVH（Noise, vibration and harshness；振動，騒音，乗り心地）が挙げられる。とくに自動車構造の振動は車内音を誘発し、乗員の乗り心地にも大きな影響を与えるため、開発段階で考慮されるべきものである(1)(2)。近年、エンジンの騒音レベルはかなり低減され、自動車の静粛性は著しく向上している。その一方でこれまでエンジン音などによってマスキングされていたロードノイズや風切り音などの騒音が目立つようになり、快適性が損なわれるケースが出てきている。すなわち、現在では車内音を構成する個々の音の要素が静粛性或快適性の印象を左右するということである(3)。しかし、こうした音要素単体に対して単純に対策を施していくだけではコストや重量の増加を招き、結果的に自動車の性能や商品としての価値を損なう可能性がある。したがって、自動車の各構成要素の振動騒音特性を事前に把握した上で、車両全体で包括的に評価することが重要である。また、現在の自動車業界はCASE（Connected, Autonomous, Sharing & Services, Electric；通信機能，自動運転，シェアリングとサービス，電動化）領域を筆頭に100年に一度の技術的な変革期と呼ばれ、駆動源の電動化をはじめ構成要素の変化が急速に進んでいる。そのため、自動車の開発現場ではこうした変化に対応した効率的かつ高精度な振動騒音解析，評価技術の重要度が増している。

1.2 有限要素法およびモード解析を用いた振動分析

自動車をはじめ、輸送機器の振動低減に関する研究は今日に至るまで多々行われており、関心の高い分野であると言える。特に振動源あるいは振動伝達経路となるコンポーネントに関する研究は多く、例えばホイールの鳴き(4)、ブレーキの鳴き(5)、サスペンション(6)、エンジンフレーム連成振動(7)、バイクフレームとマフラー(8)などが挙げられる。こうした自動車をはじめとするものづくりの現場では、製品まわりに起こる振動や騒音等の現象の分析や予測にCAE（Computer aided engineering）と呼ばれるコンピュータ支援技術が必要不可欠なものとなっている。CAEは実際に製品の試作や実験を行う前に、コンピュータを用いた数値計算によって性能や機能をシミュレートすることであり、こうしたシミュレーションは製品の試作や実験の回数を減らせるため、設計開発に要するコストおよび時間の短縮に貢献している。そのうち、構造物の振動特性の把握には有限要素法（Finite element method；FEM）およびモード解析が広く用いられ

る。現代の構造解析や振動解析, 熱解析, そして流体解析などの基礎となっている有限要素法は, 図 1.1 のように, 構造物を節点 (ノード) で構成される有限の要素 (エレメント) で分割し, 分割した各エレメントの質量および剛性をノードに分配してモデル化を行う(9). 図 1.1 は簡易的な自動車ボディのモデルであり, こうした有限要素で構成されるモデルを有限要素モデルと呼ぶ.

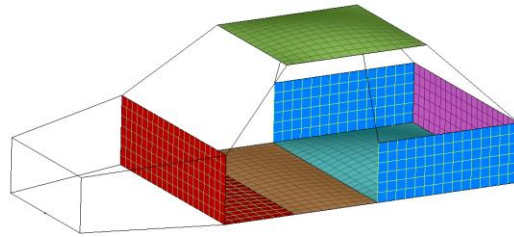


Fig. 1.1 Simplified finite element model of an automobile body structure.

有限要素法によって分配された質量や剛性をノードごとに行列形式で表したものが質量行列および剛性行列となる. こうして算出された質量行列と剛性行列を用いた一般固有値問題を線形代数的に解くことでモデルの固有モードおよび固有振動数といったモード特性が求まる. このように, モデル化によって対象の自由度を決めてモデルを作成し, 力学的原理に則って数学モデルに変換し, 数値計算によって固有振動数や固有モードを求める方法を理論モード解析と呼ぶ. 一方で, 振動試験で測定した加振力と応答の実験データを分析することによってモード特性を同定する手法は実験モード解析と呼ばれる(10)(11). モード解析の特徴は大規模自由度の系を小規模自由度の系に合理的に縮小することが可能で, これにより周波数応答といった計算をきわめて効率的に行えることである(12). しかし, こうして構造物の振動特性を固有モードの重ね合わせで表すモード合成法の精度は, 採用するモード数に左右されてしまうため, 高精度な解析を行うには結局採用モード数を増やし, 計算負荷を増大させる必要があった. これに対し, Hansteen は省略する高次モードの影響を補償することにより, 採用モード数を抑えつつ, 解析精度を向上させる方法を提案した(13). さらに, 馬, 萩原らは高次のモードだけでなく低次のモードも省略できるモード合成法を提案し, 周波数応答解析や感度解析に適用した(14)(15)(16)(17).

このような有限要素法やモード解析を組み合わせたシミュレーションは自動車に限らずあらゆる機械製品の設計開発に広く用いられてきた(18). しかし, こうした解析手法が普及し始めた当初はコンピュータの計算能力上, モデル化して解析できるサイズや自由度に制限があった. そのため, 図 1.1 のように簡易的なモデルを用いた基礎的な検討, あるいは構成要素ごとに分けてモデル化し (これらを分系と呼ぶ), 個別に解析した結果を合成して構造物全体 (これらを全系

と呼ぶ)の振動特性を解析する方法が採られていた。こうした手法の例として、大熊、長松らは各分系で振動解析を行って得られる固有モードを一般化座標として全系に対する振動方程式を作成する区分モード合成法(Component mode synthesis ; CMS)を提案した(19)。区分モード合成法では全系の変位を各分系の固有モードを用いて表すので、全系よりもはるかに小さい自由度で振動解析を行えることが利点であった。長松らは、それまで用いられていたビルディングブロック法(20)などの手法と総じて部分構造合成法と称し(21)、部分構造合成法を用いた種々の振動解析手法を提案してきた(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)。しかし、これらの方法では周波数の高い高次のモードにおける精度不良が挙げられ、限られた計算性能でどのように高精度な分析を行うかが課題であった。

しかしながら、こうしたモデルの低次元化は計算の効率化には有効であったため(29)、特定の分系と全系との相互関係に着目する振動解析に有用であった。例として、望月らは解析対象領域の自由度をそのままに、それ以外の領域を縮約して解析するモーダル差分構造法(30)(31)(32)を提案した。また、城戸らは全系の振動目標値を満たすべき分系間の振動伝達と連成を定量的に評価する手法を提案し(33)、鶴見らは有限要素モデルに伝達関数による縮退を適用し、振動低減に有効な部位とその付加剛性値を効率的に求める最適設計手法を提案した(34)。松村らは一般化された射影行列を用いたモード分解法を提案し、実稼働応答におけるモード寄与度を評価した(35)(36)(37)(38)。

近年ではコンピュータ性能や計算技術の向上によって、多少の時間を要するものの、図1.2のような詳細かつ緻密で大規模自由度を有し、計算コストのかかる有限要素モデルでも解析自体は可能となった。また、こうした解析モデルの緻密化および大規模化に伴い、それまで顕出しなかったローカルなモードも多く現れるようになり、着目すべき周波数範囲における固有モード数(=固有モード密度)が上昇した。一般に、振動対策では個々の固有モードに対して行うのが有効であるため、固有モード密度の増加は対策に要する作業量と時間の増大を招く。

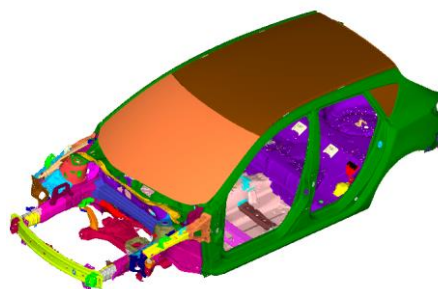


Fig. 1.2 Detailed finite element model of an automobile body structure.

このような問題に対し、適切な指標を用いた固有モードのグループ化や、応答に主たる影響を与える代表モードの抽出など、検討対象となるモード数を合理的に減らして振動対策の効率化を図る研究がなされている。固有モードをグループ化する方法の例として、平井らはシリンダブロックを対象にモード形状の類似性に基づいた分類を行い(39)、小泉らは車体全系の固有モードに対する分系固有モードの影響度を基にしたモード分類法を提案している(40)。加えて、代表モードの抽出法の例として、望月らは特異値分解を通じて周波数応答に占める割合の高い振動を抽出する主成分モード分析(41)や、全系のモードに対する部分構造の寄与度を定量的に評価する方法を提案している(42)。これらの研究から、モードのグループ化や取捨選択が効率的な振動解析に有効であることが示されている。しかし、これらの手法では特異値分解を通して得られる物理量の把握が難しいことや、代表モード抽出に至るまでに様々な計算手続きをとる必要があるため解析者の負担となるといった問題点を抱えている。

1.3 本研究の目的

本研究では図 1.3 に示すような構造物の固有モードにみられる二つの主な振動形状に着目する。一つは図 1.3(a)に示すような構造物の骨格を成すフレーム等の硬い（リジッドな）構造（これを主系と呼ぶ）に起因する振動で、これを構造全体振動（Global deformation）と呼ぶ。もう一方は図 1.3(b)のように主系を補助するパネル等の柔らかい（フレキシブルな）部材（これを従系と呼ぶ）の局所的な振動で、これを局部振動（Local deformation）と呼ぶ。自動車ボディのような構造物の固有モードでは、これらの振動形状が混在して見られる。構造全体振動は車体の強度や安全性に大きく影響するため、設計初期段階での対策を要するのに対し、局部振動はリブや制振材の付加といった設計後期段階での応急的処置でも対処可能である。このように、二つの振動形状は対策の優先度やアプローチが異なるため、これら二つの振動形状を瞬時にかつ正確に把握できれば迅速な振動対策が実行できる。また、構造全体振動と局部振動が連成する場合の振動対策には主系と従系に当たる、リジッドな構造とフレキシブルな部材の両方をバランスよく補強する必要がある。本論文の第 2 章でこの現象について説明する。このことから、機械構造物の振動対策においては構造全体振動および局部振動とこれらを誘起する主系および従系にあたる部位を把握することが重要である。

本研究ではこの考えのもと、コンピュータによる自動的な振動分析を目的として、各固有モードでどの構成要素がどのように連成して振動しているかを効率的かつ正確に把握し、評価する計算手法を提案する。

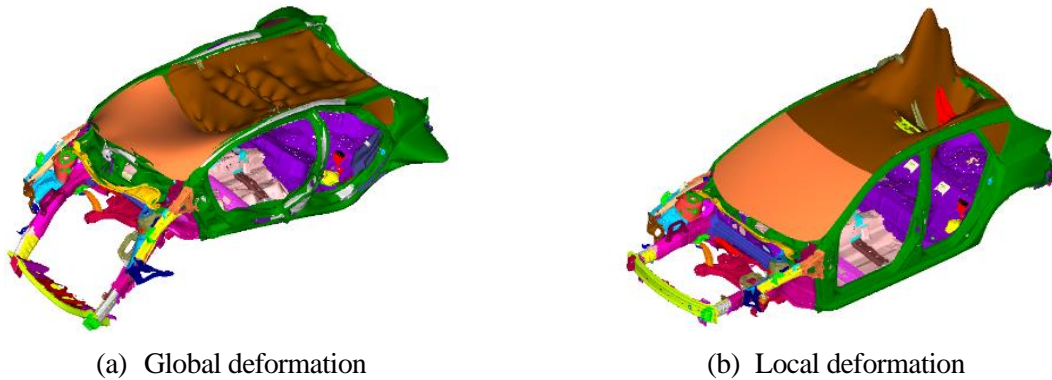


Fig.1.3 Examples of global and local deformation shapes.

1.4 局部振動分離法

モデルの部分構造は、その拘束条件や周囲との接合条件によって振動特性が変化する。例えば簡単な梁モデルでも、片持ちなのか両端支持なのか、固定支持なのか単純支持や移動支持なのかによって固有振動数や固有モードが異なる。したがって、部分構造の振動特性を高精度に把握するには、周囲ないし構造物全体との関係性を考慮する必要がある。その方法の一つとして、解析対象とする部分構造以外の領域の剛性を縮約して解析対象の特性行列に付加する Guyan の静縮小(43)がある。これによって、計算上は解析対象の自由度で振動解析を行うものの、周囲の剛性を考慮した解析を行うことができる。長松らが提案した部分構造合成法(44)ではこの Guyan の静縮小を用いてモデルの質量行列と剛性行列を縮小した上で振動解析を行っていた。こうした周囲との関係性をある程度考慮した方法では、部分構造単体で振動解析を行い、その結果を合成して全系の振動特性を求める従来の方法と比べて全系モードの再現精度が改善した。しかし、この方法で考慮できるのは剛性のみであるため、周波数の低い低次のモードでは精度が良かったものの、慣性項の影響が強くなる周波数の高い高次のモードで解析精度が悪いままであった。

先述のように、近年ではコンピュータの計算能力が向上したことで、大規模自由度を有するモデルでも部分構造に分けずに全系のまま解析が可能となった。これにより、より緻密なモデルを用いることで高精度な振動解析を行えるようになった。しかし、こうした緻密で大規模なモデルではローカルな振動現象も再現されるため、結果として解析結果として得られるモード数が増加

し、解析結果の複雑化を招いている。そのため、部分構造の振動特性を把握するには解析者が固有モード一つ一つを精査しなければならず、設計開発フェーズ短縮の障害となっている。

このような背景を踏まえ、本研究では、有限要素モデル全系の固有モードから部分構造の振動、特に構造全体の振動である構造全体振動と、部材の局所的な振動である局部振動を力学的計算に基づいて分離する局部振動分離法を提案した。局部振動分離法では、モデルのフレーム構造を主系、パネル部材を従系として、構造全体振動を主系の変形とそれに起因する従系の静変位、局部振動を固有モードと構造全体振動の差分として得られる従系の振動と定義する。これにより、上述の Guyan の静縮小を応用して構造全体振動と局部振動とを固有モードから直接抽出する。そのため、部分構造合成法のようにあらかじめモデルを部分構造に区切って個別に固有値解析する方法と比べて、高次のモードでも精度良く部分構造の振動形状を効率的に抽出できることが局部振動分離法の利点である。

1.5 ウェーブレット変換を用いた振動分離手法

提案した局部振動分離法を含め、既存の手法は解析者がモデルの詳細を把握し、どの部位が主系あるいは従系としての役割を担うのかを理解していることが前提であった。そこで、本研究ではこうした主系や従系といった部位が不明な場合でも、解析者の知識や経験に依らず自動的に構造全体振動と局部振動を特定し、定量的に評価できる手法の開発に取り組んだ。本研究では構造全体振動は構造全体が変形する空間周波数が低い振動形状であるのに対し、局部振動はモデルの一部が変形する空間周波数が高い振動形状であることに着目した。そこで、空間周波数が異なるこれらの振動形状を分離する方法としてウェーブレット変換の利用を試みる。

ウェーブレット変換 (Wavelet transform) は信号を時間 (または空間) 領域と周波数領域で展開する信号処理手法であり (45)(46), Morlet が石油探査に用いたことを契機に急速に発展した (47)(48)(49)。信号を周波数領域のみに展開するフーリエ変換では失われる時間情報をウェーブレット変換は保持できるという特徴を持ち、これによって信号が「いつ (どこで)」「どんな周波数特性」を持つかを明らかにできる。したがって、ウェーブレット変換はフーリエ変換では解析できない過渡的な振動や周波数が時間変化する振動などの信号処理において強力なツールとなる。ウェーブレット変換には連続ウェーブレットを用いる連続ウェーブレット変換と、連続ウェーブレットを二進分割して得られる離散ウェーブレットを用いる離散ウェーブレット変換とがあるが、本論文では主に離散ウェーブレット変換を扱う。ウェーブレット変換は主に時間周波数解析やデータ圧縮、画像処理などに用いられる。例えば、超音波パルス波形のウェーブレット変換に

よって得られる瞬時振動数を用いた非破壊検査手法などが提案されており(50)(51), フーリエ変換では捨てられる位置の情報が構造物における欠陥の検出に有効であることがわかっている. また, ウェーブレット変換のフィルタとしての役割を用いて機械の操作力波形を平滑化するという研究も行われている(52). さらに, 画像処理では写真などの画像を二次元平面に画素値が並んだ二次元離散データとみなして, 離散ウェーブレット変換を二次元に拡張した二次元離散ウェーブレット変換が用いられる(53). こうした離散ウェーブレット変換を用いた画像処理は画像データの圧縮やノイズ除去, エッジ検出等に広く利用され, 我々が普段から用いているコンピュータの中でも日常的に行われている処理である. こうした画像処理技術を用いた研究も多々行われており, 例えば航空写真から建築物を自動検出する研究(54)や, 医用画像においてエッジ検出の最適化により特定部位を強調表示する研究(55)などが進められている. また, 離散ウェーブレット変換は先述のスカラーデータだけでなく, ベクトルデータの解析にも用いられている. 例えば, 乱流などの流体(56)(57)や, 電磁界分布(58), 気象データ(59)の解析等にも応用されている. 離散ウェーブレット変換をさらに三次元に拡張した三次元離散ウェーブレット変換のアーキテクチャが村木(60)や Weeks(61)らによって提案されたことで, 三次元離散データの解析が可能となり, 三次元配列(ボリュームデータ)を対象とした研究が多く進められている. 例えば MRI (Magnetic resonance imaging ; 核磁気共鳴画像法) など三次元画像の処理(62)や, 二次元動画(二次元画像の時間変化)の処理(63), 物体や人の表情などのインテグラルイメージ(多方向撮影した画像データ)の処理(64)(65)(66), 三次元画像モーフィング(ある画像を別の画像になめらかに変化させる画像処理技術)(67), 三次元モデル形状の解析(68)(69)(70)(71)(72)(73)などが挙げられる.

本研究では三次元有限要素モデルの固有モードを三次元離散データ(ボリュームデータ)に変換することで三次元離散ウェーブレット変換を適用する. 離散ウェーブレット変換を用いた有限要素法(74)や, 有限要素モデルの変位量等を三次元離散データとして扱う研究(75), ウェーブレット変換を用いた特徴量抽出に関する研究(76)は過去にあるが, 有限要素モデルの変形や変位を対象に, 離散ウェーブレット変換を用いて振動形状に着目して解析した例はこれまでになく, 本研究独自の手法である. 本論文では, 有限要素モデルの固有モードを基に作成したボリュームデータに対して三次元離散ウェーブレット変換を適用し, 空間周波数が低い構造全体振動と, 空間周波数が高い局部振動を自動的に分離する新たな解析手法を提案する. 本研究では分離後の空間周波数が低い変形を含むモードを低周波数モード, 空間周波数が高い変形を含むモードを高周波数モードと呼ぶ. 本手法による解析はモデルの物性等の情報を考慮せず, 空間周波数のみに着目して振動を分離する. そのため, 局部振動除去のようにモデルの物性を予め解析者が理解してお

く必要なく、モデルを入力としてコンピュータが自動的に構造全体振動と局部振動とに分離することが可能となる。

1.6 構成要素モード分解

三次元離散ウェーブレット変換によって分離した低周波数モードおよび高周波数モードはあくまで各固有モードの変形で空間周波数が低い成分と高い成分を分離しただけであり、それぞれにどのような振動形状がどの程度含まれるのかまでは評価できない。これらの中には変形を持たないものや、異なるモード間で類似する振動形状を持つもの、一つのモードに複数の部材の振動形状を持つものなどが混在している。そこで、本研究では先述した三次元離散ウェーブレット変換によって固有モードから分離する低周波数モードと高周波数モードをさらに主系および従系単体のモードに分解する構成要素モード分解を提案する。本手法では低周波数モードおよび高周波数モードに直交変換(77)を繰り返し適用することで、類似する振動形状を集約、排除し、単一の振動形状のみを有するモードに逐次分解する。このとき、主系に誘起される構造全体振動を有するモードを主系モード、従系単体の局部振動を持つモードを従系モードと呼び、合わせて構成要素モードと呼ぶ。また、提案手法で最終的に得られた直交行列の要素から、各固有モードがどの構成要素の連成によって形成されているか定量的に評価できる。

1.7 本論文の構成

最後に、本論文の構成を以下に示す。

まず、第2章では本論文で用いる解析モデルについて説明する。このモデルは自動車ボディの一部を模した有限要素モデルであり、硬いフレーム構造とそれを補助する柔らかいパネル部材から構成される。本モデルの固有値解析により、フレーム構造に起因する構造全体振動とパネル部材の局部振動とが混在する固有モードが得られる。そこで、構造全体振動と局部振動の振動を低減するための補強例を示す。このとき、構造全体振動と局部振動が同時に生じる（連成する）モードでは、両方の振動形状に対してバランスよく補強をしないとかえって振動が増大する場合があることを示す。

第3章では、有限要素モデル全系の固有モードから構造全体振動と局部振動を直接分離する局部振動分離法について述べる。本手法はモデルにおける堅固な構造を主系、柔軟な部材を従系と定義し、構造全体振動を主系の変形とそれに起因する従系の静変位と定義することで力学的計算に基づいて分離する。また、分離結果を用いて各固有モードを構造全体振動が支配的なモード、局部振動が支配的なモード、構造全体振動と局部振動が連成するモードに分類する。

第4章では、三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法について述べる。本手法は三次元有限要素モデルの固有モードを三次元離散信号（ボリュームデータ）に変換した上で三次元離散ウェーブレット変換を適用し、構造全体振動を空間周波数が低い変形（低周波数モード）、局部振動を空間周波数が高い変形（高周波数モード）として分離する。これにより、モデルの主系や従系といった部位を解析者が選択したり、モデルの物性を考慮したりする必要なく自動的に振動を分離する。

第5章では、第4章で分離した低周波数モードおよび高周波数モードから、主系や従系といった構成要素単体のモードに分解する手法について述べる。本手法では低周波数モードおよび高周波数モードの形状相関に着目した直交変換によって構成要素単体のモードに分解する。また、こうして構成要素単体のモードに分解する一連の手法をまとめて構成要素モード分解と呼ぶ。さらに、構成要素モード分解のプロセスを定式化することで、各固有モードに各構成要素の振動がどの程度含まれるのかを簡便に評価できることを示す。

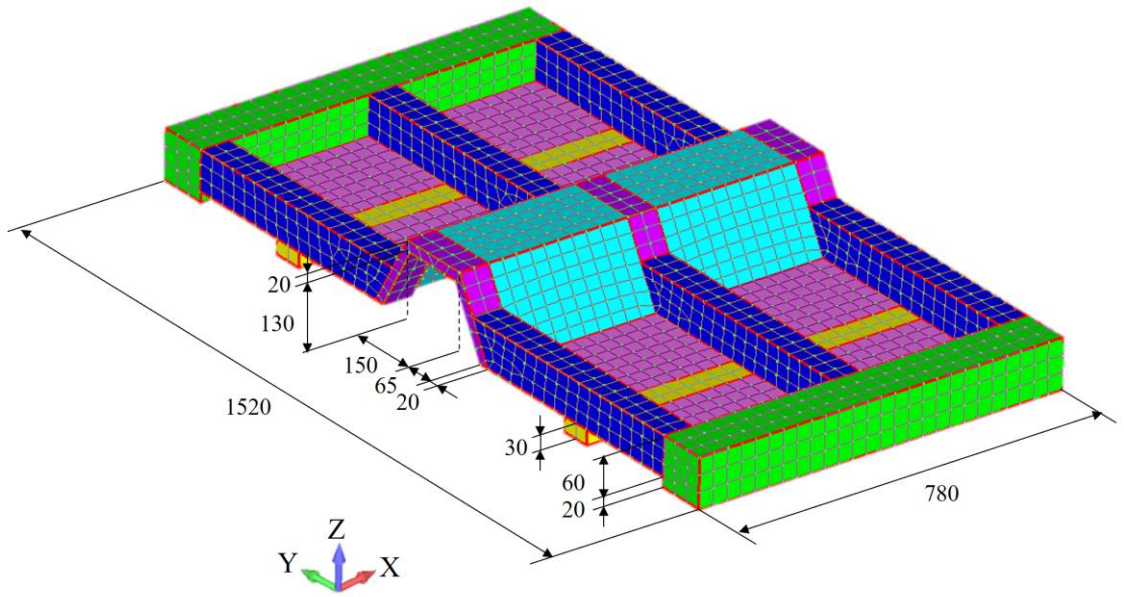
第6章では本研究で得られた成果を総括する。

第2章 解析モデル

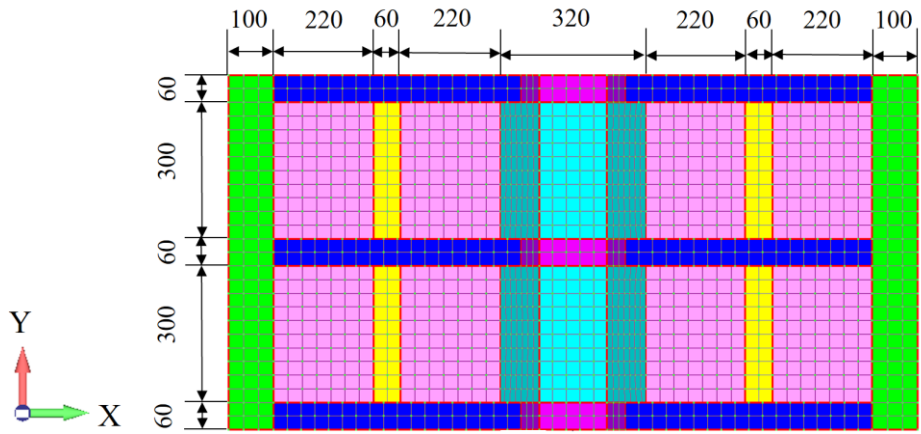
本章では本論文において提案手法のデモンストレーションに用いる解析モデルについて説明する。まず、2.1 節で解析モデルの寸法や物性について述べ、次に 2.2 節で解析モデルの固有モード、2.3 節で解析モデルの周波数応答について述べる。そして 2.4 節では解析モデルの構造全体振動および局部振動、そして両者の連成振動への対策アプローチについて述べ、特に連成振動では振動対策に注意を要することについて説明する。

2.1 解析モデルについて

本論文では、自動車アンダーボディのフロアの形状を模擬した有限要素モデルを解析モデルとして用いて提案手法を説明する。図 2.1(a)にモデルの立体図、(b)にその平面図を寸法と共に示す。解析モデルの作成および解析はSIEMENS社の構造解析ソフトウェアである Simcenter Femap with NX Nastran を利用しており、3095 個のノードと 3336 個の平面プレート要素から構成されている。また、解析時の座標軸はモデルの長手方向を Y 軸、パネルの法線方向を Z 軸として設定する。解析モデルは図 2.2(a)に示すリジッドな中空フレーム構造と、それらに取り付けられた(b)に示すフレキシブルな板状パネル部材から構成される。モデル中央部のトンネル形状はシャフトが通る部位を模擬している。図 2.3(a)に各フレームの部材名を、図 2.3(b)に各パネルの部材名を示す。フレームについては、緑のフレームを紙面向かって右から A1, A2, 青のフレームは紙面向かって右手前から奥に順に B1, B2, B3 とし、再び左手前から奥に順に B4, B5, B6 と名付ける。また、底部の黄色のフレームは右から順に C1, C2 として、トンネル部分の紫のフレームは手前から D1, D2, D3 と名付ける。パネルについても図のように、フロア部分のピンクのパネルは P1 から P8 とし、トンネル部分の水色のパネルは T1 から T6 と呼ぶことにする。表 2.1 にフレーム部材、表 2.2 にパネル部材の厚さおよび物性値を示す。本モデルでは簡易的ながら可能な限り多くの振動形状を解析することを目標に、各部材の厚さにばらつきを持たせている。物性値については、全ての部材でヤング率 205.9 GPa, ポアソン比 0.3, 密度 8150 kg/m³ とする。

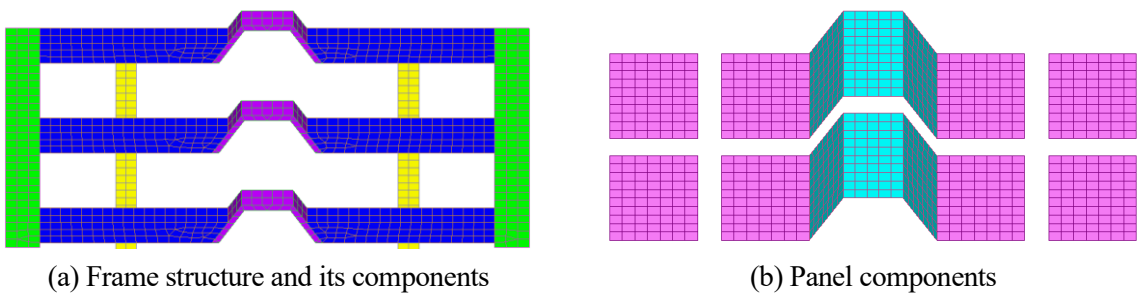


(a) 3D figure and size of the model.



(b) 2D figure and size of the model.

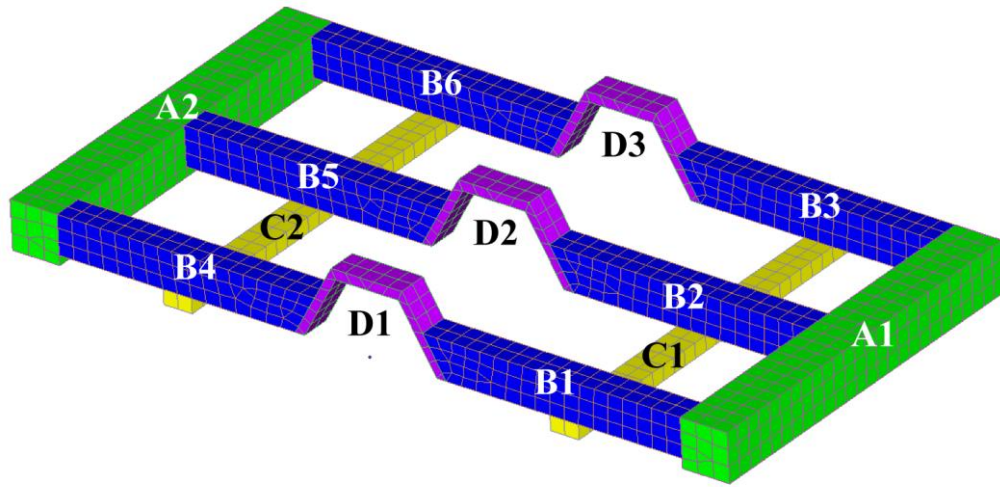
Fig. 2.1 Figures and size of analysis model.



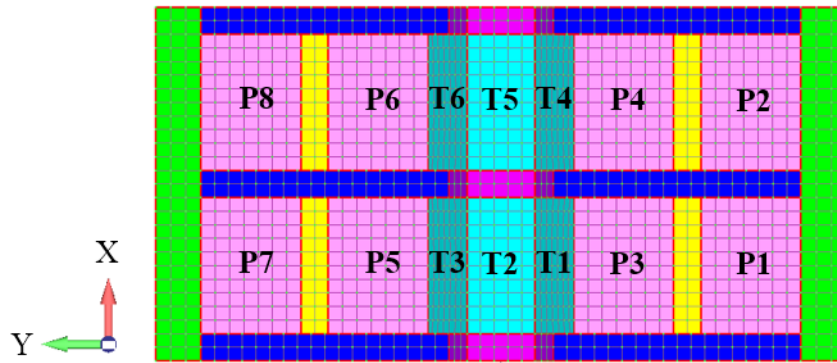
(a) Frame structure and its components

(b) Panel components

Fig. 2.2 Structure and components of the model.



(a) Labels of frame components



(b) Labels of panel components

Fig. 2.3 Labels of each component in the model.

Table 2.1 Thickness and physical property values of frame components.

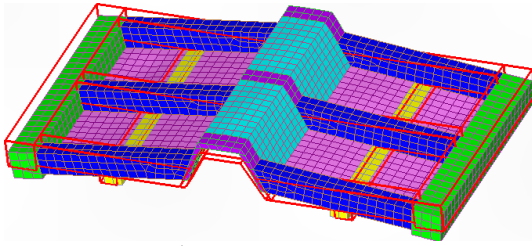
Label of component (Color of component)	Thickness (mm)	Young's Modulus (GPa)	Poisson ratio	Density (kg/m ³)
A1 (Green)	1.1	205.9	0.3	8150
A2 (Green)	1.2			
B1 (Blue)	0.9			
B2 (Blue)	1.0			
B3 (Blue)	1.1			
B4 (Blue)	0.9			
B5 (Blue)	1.0			
B6 (Blue)	1.1			
C (Yellow)	1.0			
D1, D2 (Purple)	2.0			
D3 (Purple)	1.5			

Table 2.2 Thickness and physical property values of panel components.

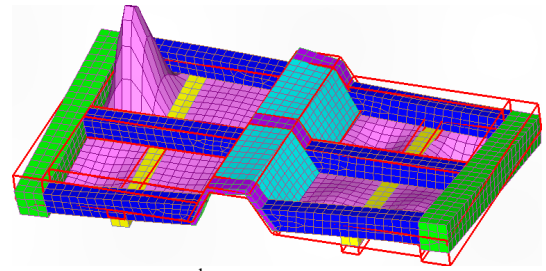
Label of component	Thickness (mm)	Young's Modulus (GPa)	Poisson ratio	Density (kg/m ³)
P1	1.0	205.9	0.3	8150
P2	0.66			
P3	0.89			
P4	0.72			
P5	1.2			
P6	1.38			
P7	0.98			
P8	0.56			
T1	1.25			
T2	0.65			
T3	1.5			
T4	1.4			
T5	0.9			
T6	1.5			

2.2 解析モデルの固有モード

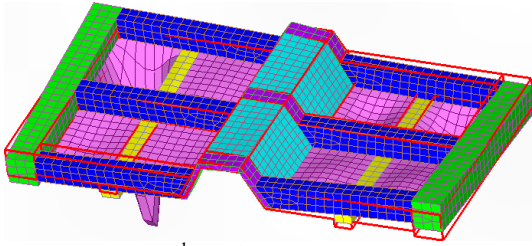
本論文では0~200 Hzを検査対象周波数域に設定する。この範囲は車室内の静粛性や快適性に大きな影響を及ぼすエンジン振動やこもり音の主要な周波数域にあたる(3)。解析モデルに対して固有値解析を行うと剛体モードを除き、検査対象周波数域内で1次から18次までの18個の固有モードが得られる。NX Nastranの固有値解析機能を用いて得た解析モデルの固有振動数と固有モード形状を図2.4に示す。図2.4中の赤線はモデルの静止時の位置を表している。解析にあたって質量は分布質量を用いている。



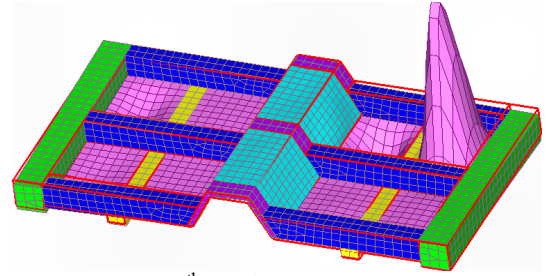
1st mode (38.4 Hz)



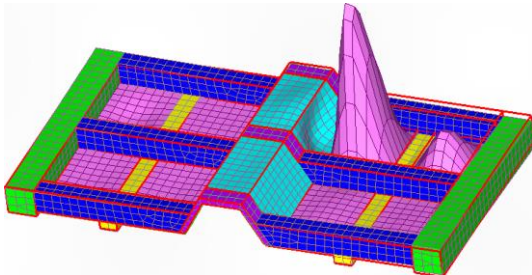
2nd mode (76.9 Hz)



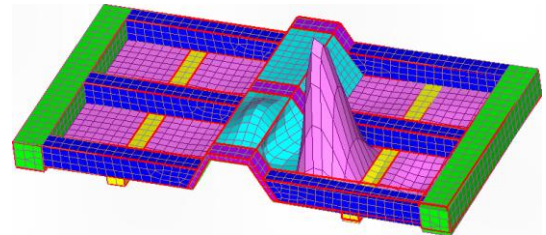
3rd mode (82.6 Hz)



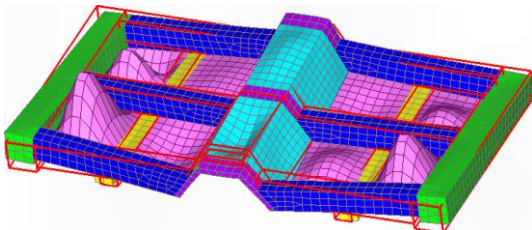
4th mode (95.1 Hz)



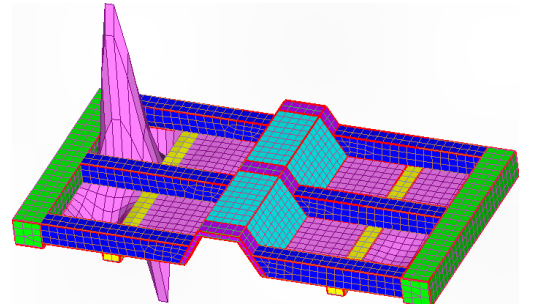
5th mode (99.8 Hz)



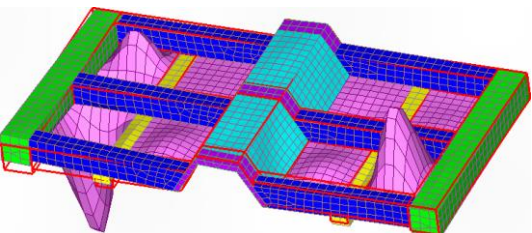
6th mode (114.4 Hz)



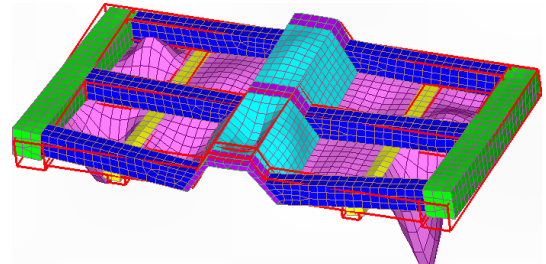
7th mode (129.0 Hz)



8th mode (134.3 Hz)



9th mode (136.0 Hz)



10th mode (139.0 Hz)

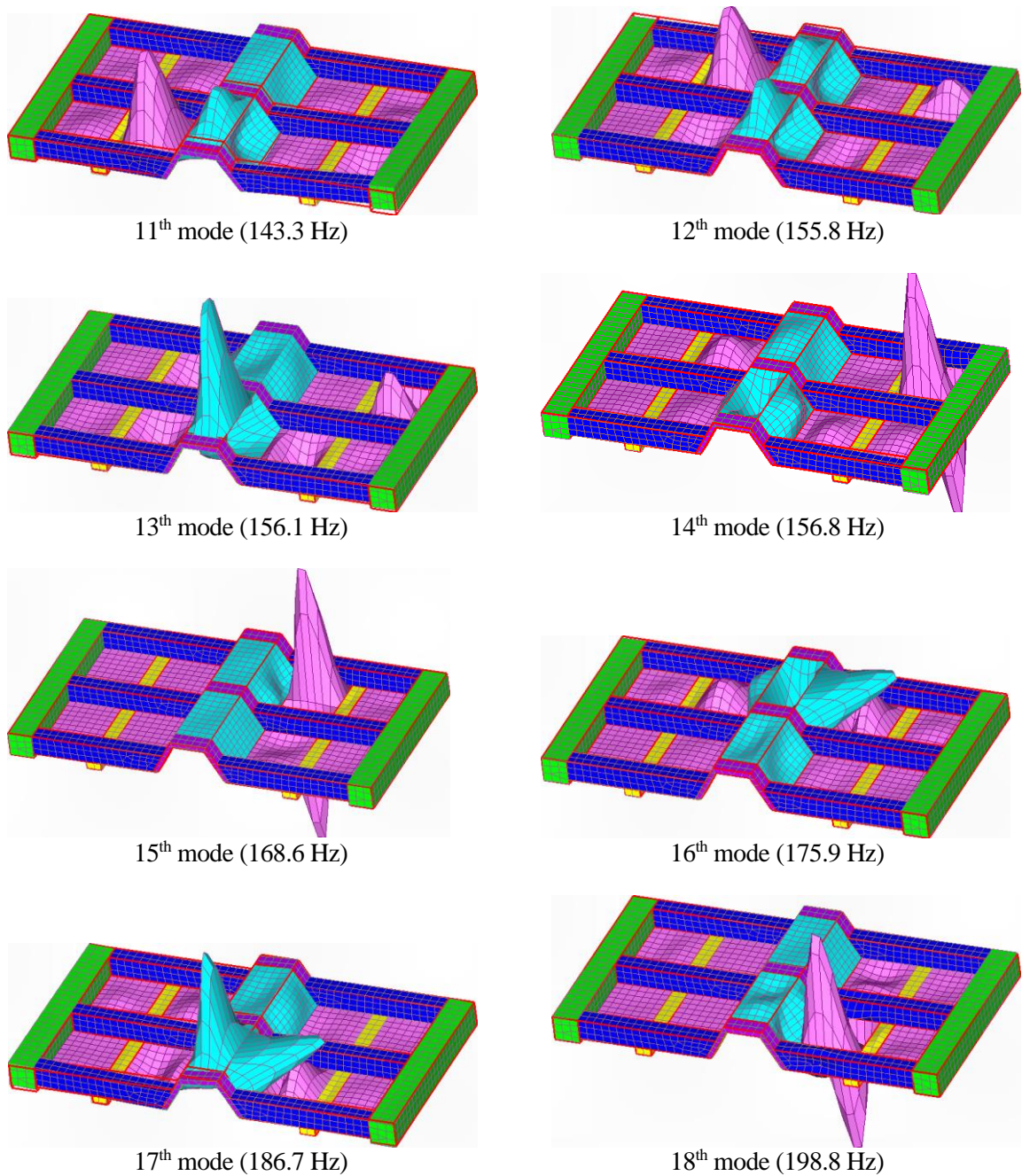


Fig. 2.4 Characteristic mode shapes and natural frequencies of the analysis model.

図 2.4 に示した固有モードにはモデルの全体構造が振動しているモード，一部の部材（主にパネル）が局所的に振動しているモード，そして両方の振動が連成しているモードが混在していることがわかる。

2.3 解析モデルの周波数応答

本節ではモデルの一端に対して図 2.5 に矢印で示す，パネル面に垂直な Z 軸方向に加振力を与えた場合の周波数応答を求める．本論文で求める応答は，音響放射(78)に寄与するパネルを含むモデル全体での振動を簡易的に評価する目的で全節点の並進速度二乗和とする．以下ではモデルの周波数応答を求める計算過程について説明する．

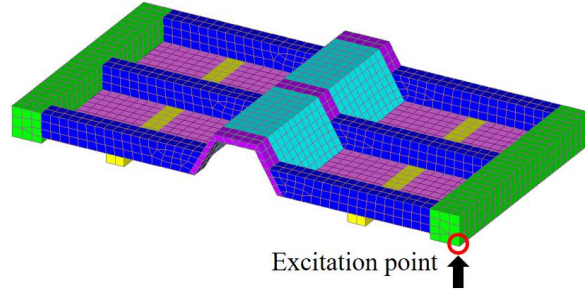


Fig. 2.5 Excitation point on the model.

振動数 ω の調和外力が作用する強制振動の運動方程式は次式で表される．減衰は構造減衰を与えるものとし，質量行列を \mathbf{M} ，剛性行列を \mathbf{K} ，変位ベクトルを \mathbf{x} ，外力振幅ベクトルを \mathbf{F} ，構造減衰係数を G ，虚数単位を i とおく．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + iG\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (2-1)$$

このとき，強制振動解としての変位応答を，振幅ベクトル \mathbf{X} を用いて次式で表す．

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{i\omega t} \quad (2-2)$$

式 (2-2) を式 (2-1) に代入し整理すると次式を得る．

$$\left[-\omega^2\mathbf{M} + (1 + iG)\mathbf{K} \right] \mathbf{X}e^{i\omega t} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (2-3)$$

式 (2-3) より，強制振動に対する変位応答振幅 \mathbf{X} は強制外力の振動数 ω の関数 $\mathbf{X}(\omega)$ として次式で表される．

$$\mathbf{X}(\omega) = \left[-\omega^2\mathbf{M} + (1 + iG)\mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{F} \quad (2-4)$$

ここで，変位応答は式 (2-2) で表されるので，速度応答 \mathbf{v} は次式で表される．

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = i\omega\mathbf{X}e^{i\omega t} \quad (2-5)$$

したがって、速度応答振幅 V は ω の関数として次式で表される。

$$\mathbf{V}(\omega) = i\omega\mathbf{X}(\omega) \quad (2-6)$$

ここで、応答ベクトルならびに各特性行列の次元は、ノード数 N と自由度数（並進 3 自由度 + 回転 3 自由の計 6 自由度）を乗じた数である。このうち、本論文で用いる応答は各節点における並進 3 自由度成分 (x, y, z) 速度の 2 乗和の総和としている。よって、 n 番目ノードの x, y, z 並進成分の速度 2 乗応答振幅をそれぞれ $|V_n^x(\omega)|, |V_n^y(\omega)|, |V_n^z(\omega)|$ として次式で表す。

$$\begin{cases} |V_n^x(\omega)|^2 = \text{Re } V_n^x(\omega)^2 + \text{Im } V_n^x(\omega)^2 \\ |V_n^y(\omega)|^2 = \text{Re } V_n^y(\omega)^2 + \text{Im } V_n^y(\omega)^2 \\ |V_n^z(\omega)|^2 = \text{Re } V_n^z(\omega)^2 + \text{Im } V_n^z(\omega)^2 \end{cases} \quad (2-7)$$

本論文では求める周波数応答 $H(\omega)$ を式 (2-7) により得られる各節点の速度応答振幅の総和として次式で算出する。

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N |V_n^x(\omega)|^2 + |V_n^y(\omega)|^2 + |V_n^z(\omega)|^2 \quad (2-8)$$

計算に用いたパラメータの値を表 2.3 に示す。表 2.3 に示すパラメータを用いて算出した周波数応答を図 2.6 に示す。図 2.6 中のピーク上の数字は固有モードの次数を表す。ここで、8 次固有モードのピークは小さく、周波数応答の中では埋もれている。

Table 2.3 Parameters for calculating frequency response.

Parameter	Values
Excitation force	100 N
Excitation frequency	30 ~ 200 Hz
Structural damping coefficient	0.005

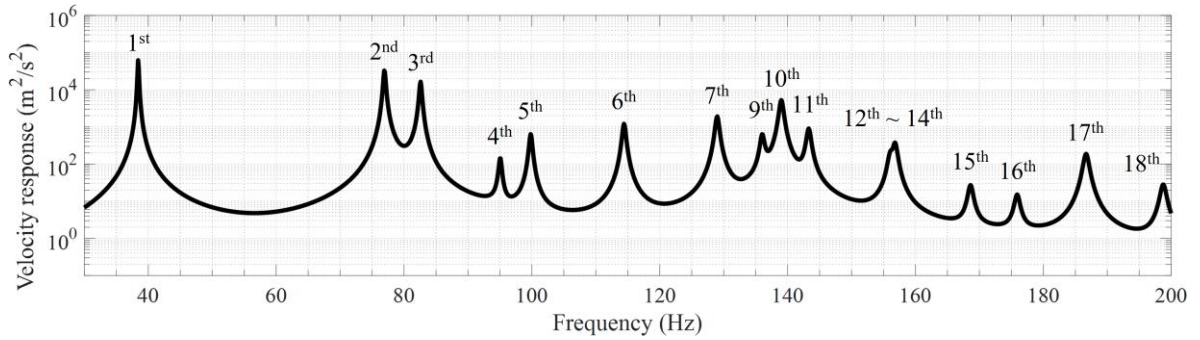


Fig. 2.6 Frequency response of analysis model. The peak of 8th mode is lower than other modes thus it is hidden in the graph.

図 2.6 が未補強時の周波数応答であり，以下ではこの周波数応答からの変化によって振動の増減を評価する．また，計算方法や加振点，加振力のパラメータは以降も同じものを用いる．

2.4 構造全体振動と局部振動，および連成振動への振動対策

解析モデルの固有モードのうち，図 2.4 に示す代表例として構造全体振動が支配的なモードである 1 次モード，局部振動が支配的なモードである 4 次モード，そして構造全体振動と局部振動が連成しているモードである 2 次モードと 3 次モードを対象とした振動対策をそれぞれ考える．

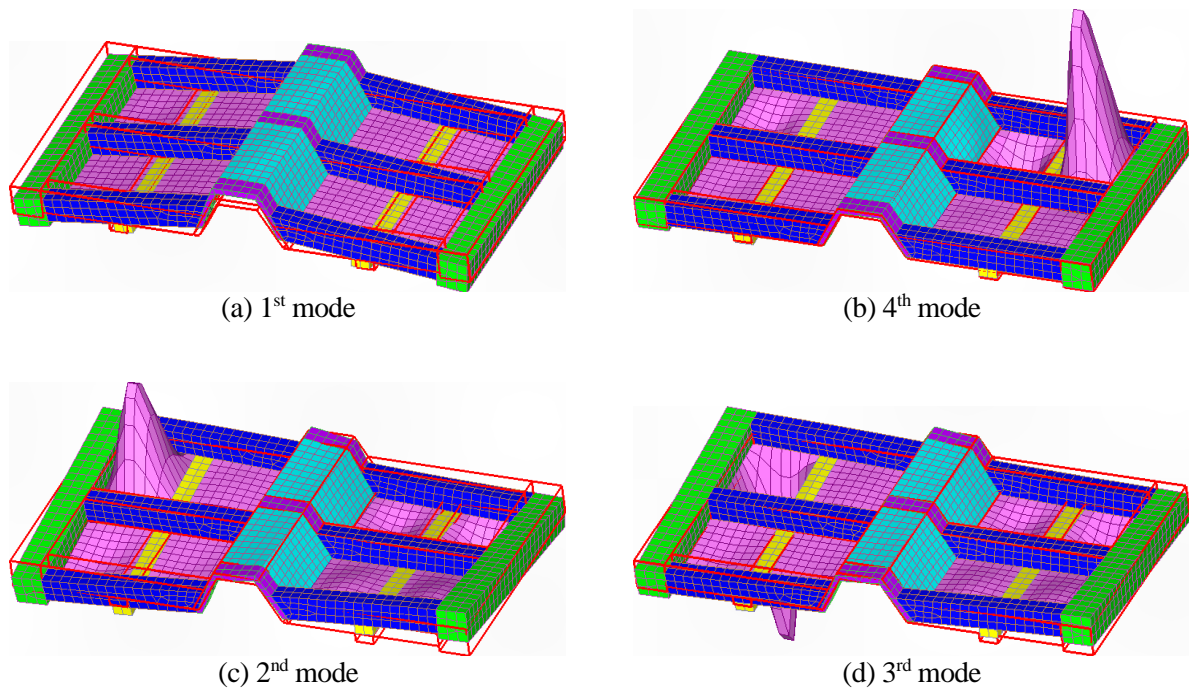


Fig. 2.7 Reinforce target modes for demonstration of vibration reduction treatment.

2.4.1 構造全体振動が支配的なモードに対する振動対策

最初に、図 2.7(a)に示す構造全体振動が支配的な1次固有モードの振動対策を考える。ここでは Simcenter Femap with NX Nastran の応力解析機能を利用し、1次固有モードの変形時のミーゼス応力の算出を行った。ミーゼス応力の分布をコンター図で表したものを図 2.8(a)に示す。図 2.8(a)より、モデルのトンネル部の角に応力が集中していることが確認できる。この結果から、図 2.8(b)の赤色で示すフレーム要素の剛性（ヤング率と横弾性係数）を2倍にする補強を行う。この補強による周波数応答の変化を図 2.8(c)に示す。図 2.8(c)において、黒線は未補強時の周波数応答、赤線は補強後の周波数応答を表す。補強前後の周波数応答を比較すると、振動ピークの低下が確認できた。このように構造全体振動が支配的なモードに対しては応力集中部位に補強を施すことで振動が低減できると考えられる。

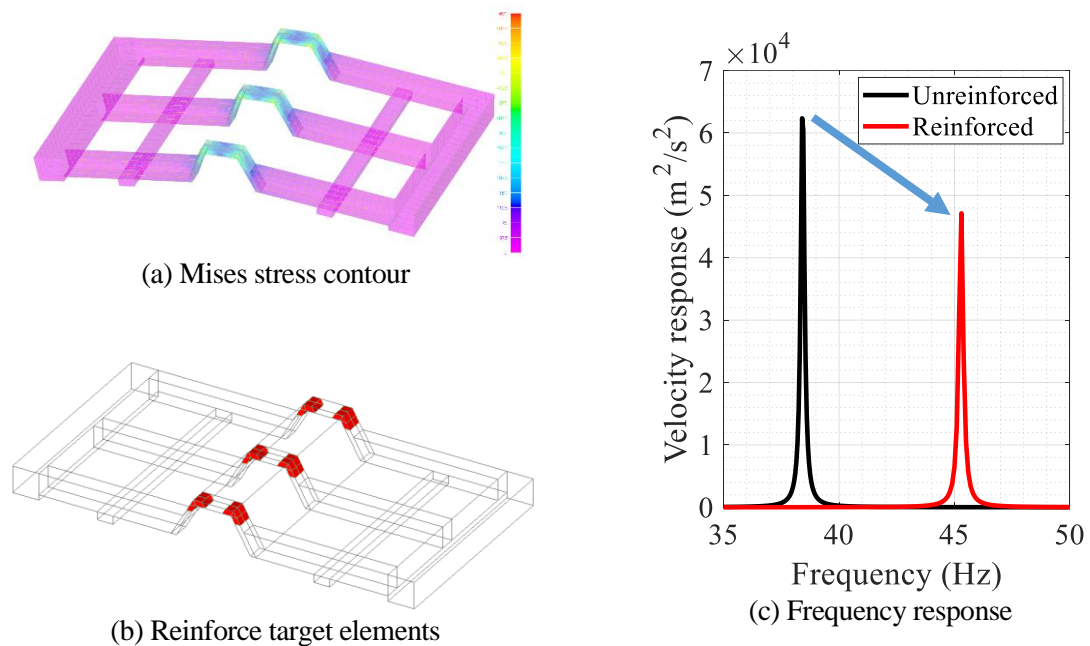


Fig. 2.8 Reinforcement for 1st mode. The response peak of 1st mode, where global deformation is dominant, is reduced by reinforcing stress-concentrated elements.

2.4.2 局部振動が支配的なモードに対する振動対策

次に、構造全体振動をほとんど有さず、局部振動が支配的な図 2.7(b)に示す4次固有モードに対する振動対策を考える。ここでは局部振動しているパネル P8 に対し、図 2.9(b)で黒色に示す“×”印の要素の剛性を2倍にする補強を行う。補強前後のモデルの周波数応答を図 2.9(c)に示

す。周波数応答を見ると、補強後にピークの低下が確認できた。したがって、パネルが局部振動するモードに対しては当該パネルに補強を施すことで振動低減が可能である。

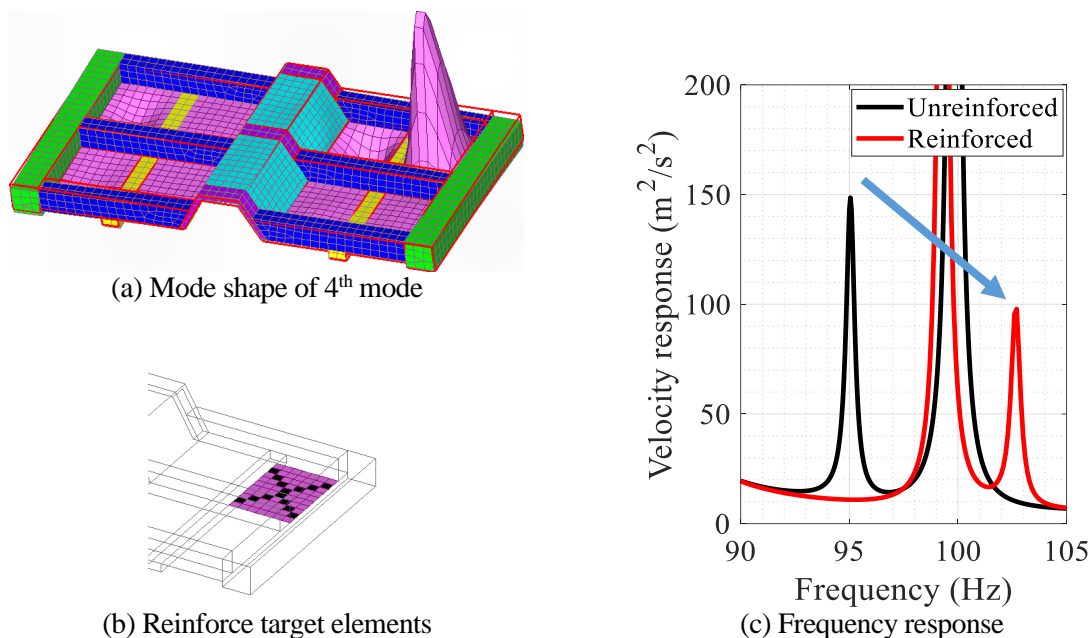


Fig. 2.9 Reinforcement for 4th mode. The response peak of 4th mode, where local deformation is dominant, is reduced by reinforcing vibrating panel.

2.4.3 構造全体振動と局部振動が連成するモードに対する振動対策

続いて構造全体振動と局部振動が連成している、図 2.7(c)および(d)に示す 2 次および 3 次固有モードに対する振動対策を考える。2 次および 3 次固有モードはフレームの 1 次ねじれによる構造全体振動とパネル P8 の局部振動が連成したモードであり、その違いは両振動の位相関係である。ここではまず構造全体振動部位への振動対策として、2.4.1 項と同様にミーゼス応力を参考とした補強を行う。応力解析の結果から、応力が集中する図 2.10(b)に赤色で示すフレーム要素の剛性を 2 倍にする補強を行う。図 2.10(c)に補強前後の周波数応答を示す。各モードの応答ピークを見ると、2 次モードは補強によってピークが低下したが、3 次モードでは逆にピークが増大した。つまり補強によって一方のモードではかえって振動が増大する結果となった。

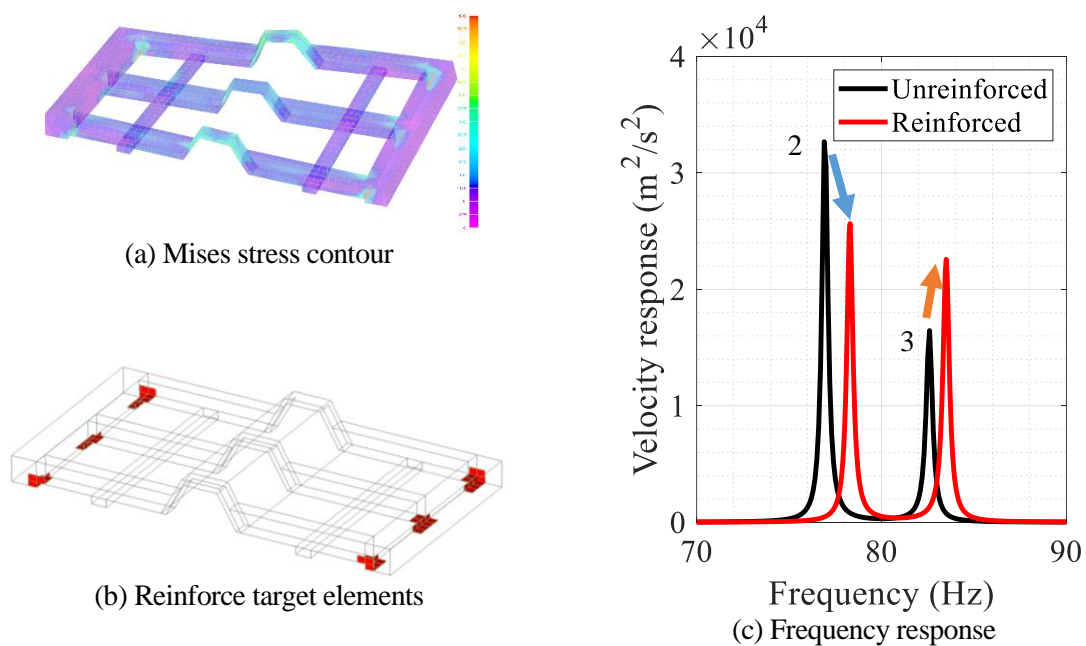


Fig. 2.10 Reinforcement for global deformation of 2nd and 3rd mode. One of the two peaks of coupled modes increases when only frame structure is reinforced.

次に、局部振動しているパネルに対する補強を考える。ここでは 2.4.2 項と同様に局部振動するパネル P8 に対して図 2.11(a)のように“×”印の要素の剛性を 2 倍にする補強を行った。この場合の周波数応答を図 2.11(b)に示す。ここでは 3 次モードのピークは低下したものの、2 次モードのピークはかえって増大し、構造全体振動に対して対策を行った場合と同様に一方のモードは振動低減されたものの、他方のモードでは振動が増大した。

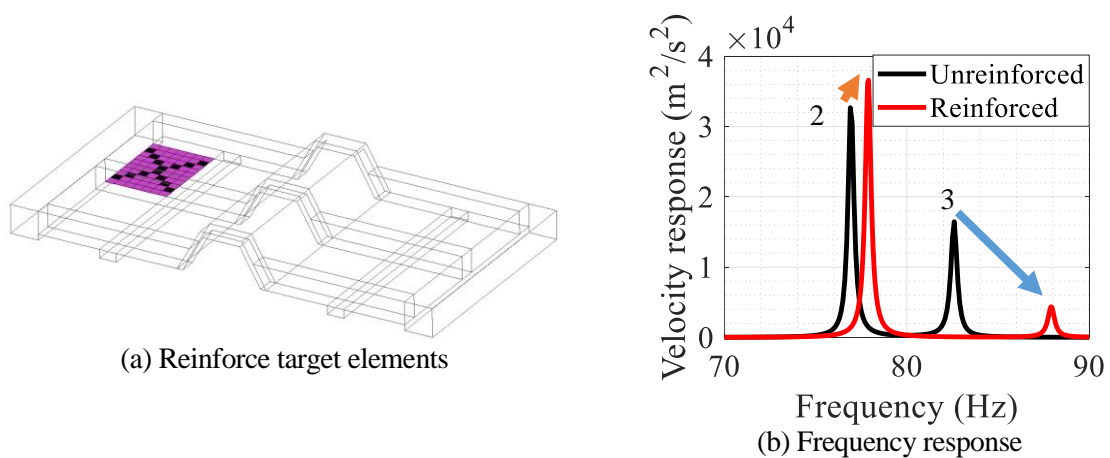


Fig. 2.11 Reinforcement for local deformation of 2nd and 3rd mode. One of the two peaks of coupled modes increases when only local component is reinforced.

以上より、連成振動モードに対して構造全体振動または局部振動のどちらか片方のみに対して補強を施しても、一方のモードで振動が増大する結果となった。これを踏まえ、前述した2種類の補強を同時に施す場合を考える。図 2.10(b)に示す構造全体振動に対するフレーム補強箇所と、図 2.11(a)に示す局部振動に対するパネル補強箇所の剛性をそれぞれ表 2.4 に示す2つのパターンにおける倍率の組み合わせで補強を施す。それにより補強を行った結果を図 2.12 に示す。

Table 2.4 Patterns of multiplying factor pairs for reinforcement.

Pattern	A	B
Multiplying factor of reinforcement for global deformation	1.8	1.4
Multiplying factor of reinforcement for local deformation	1.4	1.8

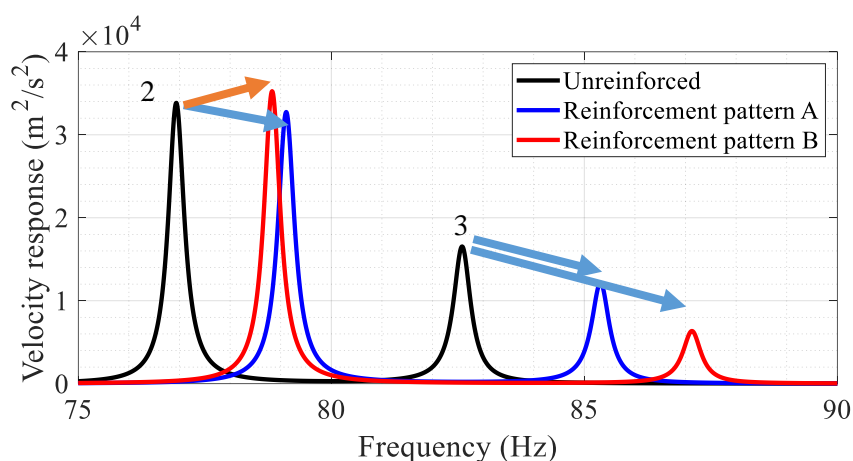


Fig. 2.12 Frequency response for each reinforcement pattern. Although reinforcement pattern A decreases both response peaks of the coupled modes, pattern B increases one of the peaks.

図 2.12 より、補強パターン A では両モードの振動ピークが低減できたのに対し、補強パターン B では2次モードのピークが増加する結果となった。

次に、連成振動モードの両ピークを低減させる適切な補強設定を以下の方法で調査する。表 2.4 に示した補強パターンの組み合わせのように、図 2.10(b)に示すフレーム部位の補強倍率と図 2.11(a)に示すパネル部位の補強倍率をそれぞれ1倍から2倍の範囲で0.01倍ずつ増加させる。各補強設定で2次および3次モードの応答を算出し、未補強時の応答からの変化量を求める。各補強設定における応答ピークの増減を調べた結果をそれぞれ図 2.13(a)と 2.13(b)に示す。図中の縦軸はフレーム部位の補強倍率、横軸はパネル部位の補強倍率を表す。図 2.13 の灰色の領域はそれぞれのモードにおいて補強によって応答ピーク値が減少し、振動が低減されたパターンであることを示す。図中の青点は表 2.4 におけるパターン A、赤点はパターン B の補強設定を表す。

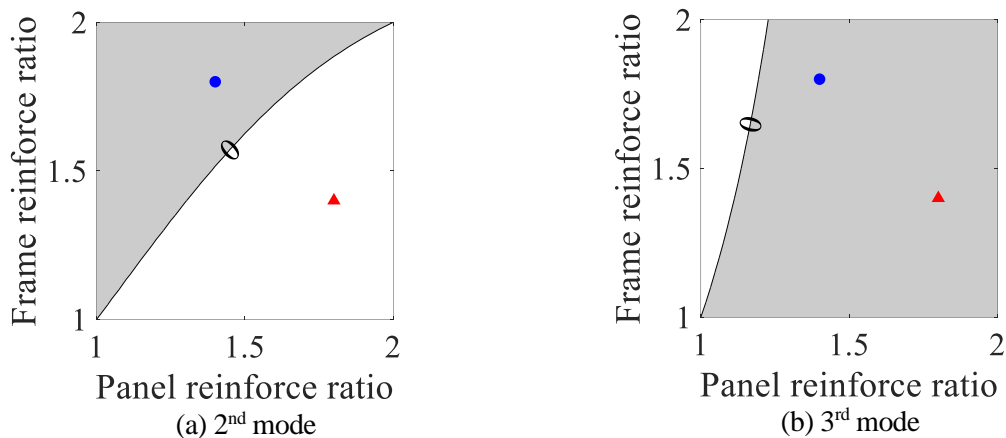


Fig. 2.13 Effective reinforcement patterns for reducing vibration of each coupled mode. In the 2nd mode the reinforcement pattern B is out of the effective reinforcement area.

図 2.13 に示した各モードの振動低減領域を重ね合わせると図 2.14 を得る。図 2.14 では図 2.13 と同様に縦軸はフレーム部位の補強倍率、横軸はパネル部位の補強倍率を表し、灰色の領域は両モードの振動が低減されたことを示す。図 2.14 の具体的なプロット方法は、補強設定ごとに各モードの応答ピークの変化量の積を取り、正の値の場合は両モードが振動低減され、負の場合は一方のモードの振動が増大したと判断している。これは図 2.13 からわかるとおり、両方のモードの振動が同時に増大する補強パターンがないため、変化量の積が正であれば両モードが振動低減されたといえるからである。図 2.14 より、2 次と 3 次の両モードの振動が低減可能な補強設定は限定的であるため、その補強には注意を要する。

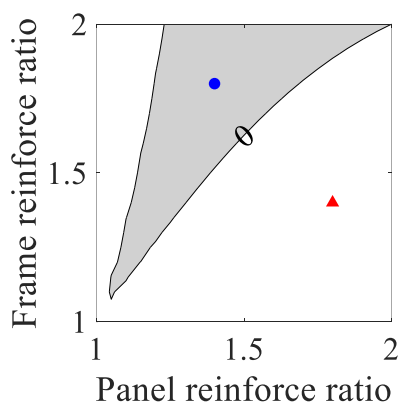


Fig. 2.14 Effective reinforcement patterns for reducing vibrations of both coupled mode. The figure shows that effective reinforcement patterns are limited for coupled modes.

以上より、連成振動モードの振動抑制には構造全体振動と局部振動の両方に対して適切なバランスで補強する必要があり、不適切な補強では本来の目的とは逆に振動が増大することがわかる。このことから、構造全体振動と局部振動が混在する構造物では、各固有モードに含まれるそれぞれの振動形状を把握することが重要である。

第3章 局部振動分離法

2章において、フレーム構造のようなリジッドな構造とそれを補助するパネルのようなフレキシブルな部材からなる構造物の振動対策において、各固有モードに含まれる両者の振動を把握することが振動対策の上で重要であることを述べた。このことから、効率的な振動対策を行う上で数ある固有モードを構造全体振動が支配的なモード、構造全体振動をほとんど有さず局部振動が支配的なモード、両者が連成振動するモードに分類することが有効である。これらは固有モードを一つずつ見ていけば分類ができるものの、より複雑で詳細なモデルになると固有モード密度が増大し、つぶさに見る作業は時間がかかる上、解析者の大きな負担となる。そこで、本研究ではこれらの固有モードを効率的に分類する手法として局部振動分離法を提案してきた。本章ではこの局部振動分離法と、局部振動分離法を用いた固有モード分類手法について説明する。本手法では各固有モードから構造全体振動と局部振動を分離し、分離した振動が固有モードにどの程度含まれるかをエネルギー的観点および形状相関から評価する。これにより、各固有モードにおいて構造全体振動が支配的かどうかを判別することで固有モードの分類を行う。その結果、構造全体振動をもたない、あるいは支配的でない固有モードを局部振動モードと定義する。一方、構造全体振動が支配的なモードのうち、局部振動と連成する固有モードを連成振動モードと定義し、局部振動と連成せず構造全体振動が単体で存在する固有モードを構造全体振動モードと定義する。

3.1 局部振動分離法について

局部振動分離法は力学的計算に基づいて固有モードから直接構造全体振動と局部振動を分離する計算手法である。従来、部分構造単体の振動形状を得るには部分構造合成法のように、有限要素モデルの質量行列や剛性行列をあらかじめ縮退してモード解析を行う方法が用いられていた(4)。しかし、モデルの部分構造単体の質量行列と剛性行列を取り出し、他の部分を無視して固有値解析を行うと、周囲の部材との相互関係ごと無視することになるため解析精度が悪くなる。そこで、解析対象とする部分構造以外の部分の質量行列と剛性行列を Guyan の静縮小 (付録A) (43)を用いて縮退し、部分構造の質量行列と剛性行列に付与したのちに固有値解析をすることで解析精度が向上することが知られている。この考えを応用し、局部振動分離法ではモデル全体の固有値解析で得られた固有モードから着目する部材の振動を取り出すのにこの縮退計算を利用する。

本手法の計算過程を説明する。有限要素モデルの質量行列を \mathbf{M} 、剛性行列を \mathbf{K} 、変位ベクトルを \mathbf{x} として不減衰自由振動の運動方程式を次式で表す。

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3-1)$$

解析対象とする部分構造 A を添字 a ，その他の部位 B を添字 b で表すことにする．このとき，式 (3-1) の運動方程式の各項を A と B に分けて表すと次の通りである．

$$\begin{bmatrix} M_a & M_{ab} \\ M_{ba} & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_a \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-2)$$

ここで，式 (3-2) の運動方程式における動的な部分である慣性項を省略すると，式 (3-2) は次のように変形できる． \mathbf{x}_{bs} は部分構造 A に引きずられる B の静変位（静的な弾性変形）を示す変位ベクトルである．

$$\begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_{bs} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-3)$$

式 (3-3) から， \mathbf{x}_{bs} は次のように表せる．

$$\mathbf{x}_{bs} = -K_b^{-1} K_{ba} \mathbf{x}_a \quad (3-4)$$

したがって，部分構造 A の変形と，それに引きずられる B の静変位をあわせて \mathbf{x}_g とすると， \mathbf{x}_g は次式で表される．

$$\mathbf{x}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_{bs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_b^{-1} K_{ba} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{x}_a \quad (3-5)$$

式 (3-5) で I は部分構造 A の自由度と同じ次元を有する単位行列であり， \mathbf{T}_{ab} を変換行列と呼ぶ．局部振動分離法は式 (3-5) の変換行列をモデル全系の固有モードに対して直接適用することで，低次および高次を問わず各固有モードから構造全体振動と局部振動を分離する．

具体的には，式 (3-5) の部分構造 A の変位ベクトル \mathbf{x}_a に，固有モードベクトルの部分構造 A に対応する成分を代入することで行う．例えば r 次モードの局部振動分離を行う場合， r 次の固有モードベクトル $\mathbf{X}(r)$ を部分構造 A とその他の部位 B に対応する成分に次のように分ける．

$$\mathbf{X}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a(r) \\ \mathbf{X}_b(r) \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

式 (3-5) の \mathbf{x}_a に代えて r 次モードベクトルの領域 A の成分 $\mathbf{X}_a(r)$ を代入し，次式によって構造全体振動を表すモードベクトル $\mathbf{X}_g(r)$ を求める．

$$\mathbf{X}_g(r) = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{X}_a(r) \quad (3-7)$$

固有モードベクトル $\mathbf{X}(r)$ から式 (3-7) で定義した構造全体振動 $\mathbf{X}_g(r)$ を差し引いた変位を局部振動 $\mathbf{X}_l(r)$ とし、次式で定義する。

$$\mathbf{X}_l(r) = \mathbf{X}(r) - \mathbf{X}_g(r) \quad (3-8)$$

式 (3-7) および式 (3-8) によって各固有モードベクトル $\mathbf{X}(r)$ から構造全体振動 $\mathbf{X}_g(r)$ と局部振動 $\mathbf{X}_l(r)$ を分離できる。

Guyan の静縮小では、式 (3-5) の変換行列 \mathbf{T}_{ab} を用いて式 (3-1) の運動方程式の各項を部分構造 A の自由度に縮退する。例えば図のフレーム構造を部分構造 A としてこの操作を行い、縮退した運動方程式に対してモード解析を行うことで構造全体振動を得られるが、この方法にはいくつか問題点が存在する。一つは、自由度を縮小した上でモード解析をする必要があり、二度手間となってしまう点である。二つ目は、Guyan の静縮小では運動方程式の動的な項を省略し、B の変形は静的変位のみであるという近似を行っているため、低次のモードを考慮する際には大きな問題とはならないが、高次のモードに適用すると、この縮小過程による誤差が大きくなる。本研究で提案した局部振動分離法はモデル全系の固有モードから直接構造全体振動と局部振動を分離するため、これらの問題を回避できる。

3.3 局部振動分離法を用いた構造全体振動と局部振動の分離

解析モデルに局部振動分離を適用し、その振動を構造全体振動と局部振動に分離する。解析モデルにおいて、計算を簡略化するため、図 3.1 に赤色で示す、フレーム構造とパネルの部材間接合部の並進自由度成分を部分構造 A に設定する。ここで、部分構造 A に部材間接合部の並進自由度のみを採用する理由は、回転変位を含めた全自由度を含めると高次のモードにおいて回転変位に由来する微小な局部振動が構造全体振動に残留してしまうためである。解析モデルに対する局部振動分離法の流れを、2 次固有モードを例に図 3.2 に示す。各固有モードにおいて、部分構造 A に設定したノードの並進変位成分を式 (3-6) の \mathbf{X}_a とし、その他の変位成分を \mathbf{X}_b とおく。それぞれの変位成分に対応する剛性行列の成分を式 (3-2) および式 (3-3) のように分けた上で、式 (3-7) を適用し、構造全体振動 \mathbf{X}_g と局部振動 \mathbf{X}_l を求める。

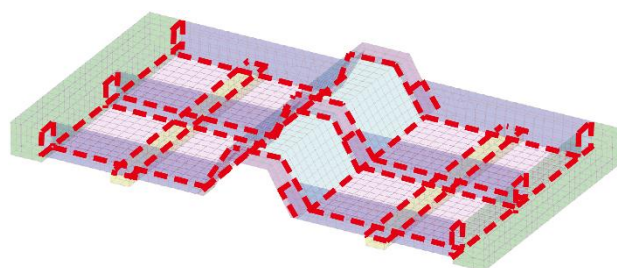


Fig. 3.1 Joint regions of components as component A.

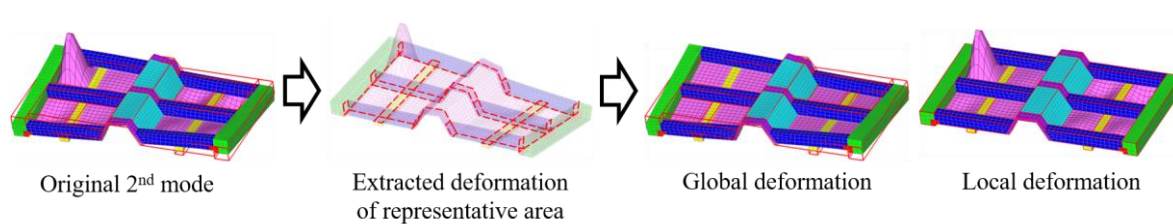
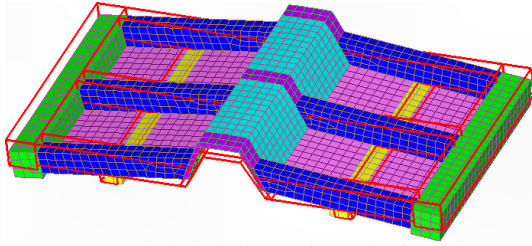
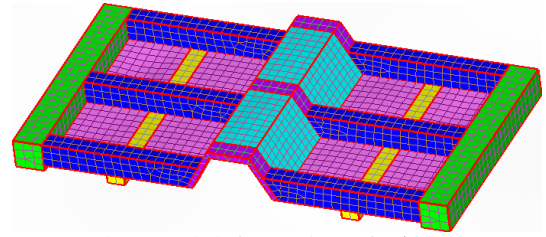


Fig. 3.2 Calculation flow of local vibration separation method.

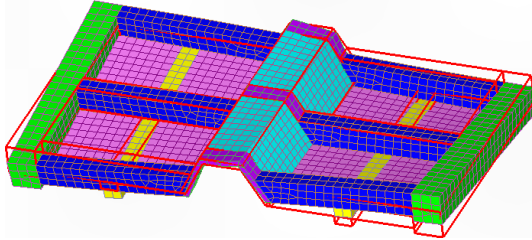
解析モデルの 1~18 次の固有モードに対して局部振動分離法を適用して分離した構造全体振動と局部振動の形状を図 3.3 に示す。図 3.3 では左列に構造全体振動，右列に局部振動を示している。



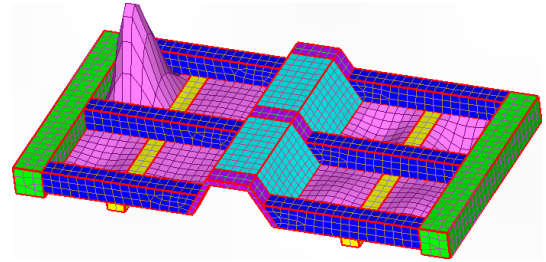
(1a) Global deformation of 1st mode



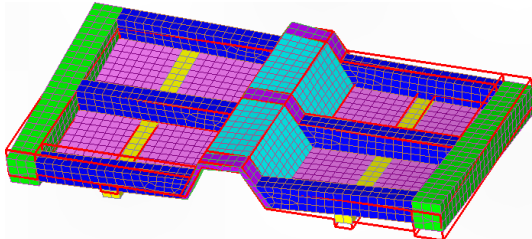
(1b) Local deformation of 1st mode



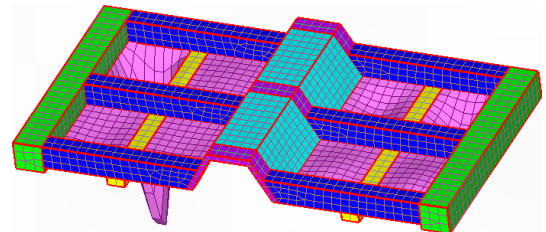
(2a) Global deformation of 2nd mode



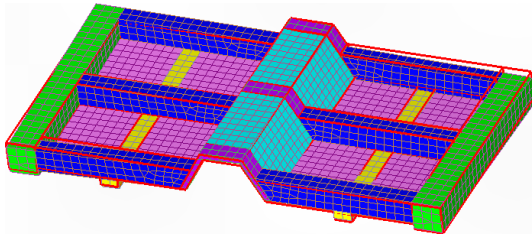
(2b) Local deformation of 2nd mode



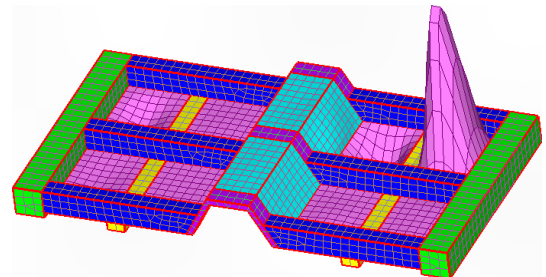
(3a) Global deformation of 3rd mode



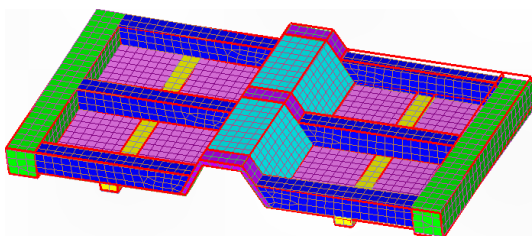
(3b) Local deformation of 3rd mode



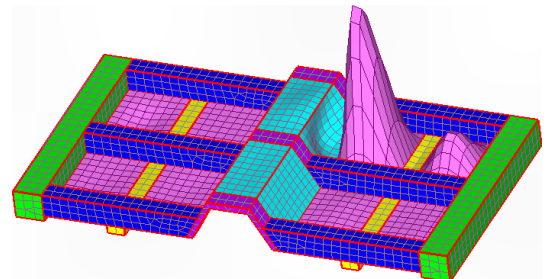
(4a) Global deformation of 4th mode



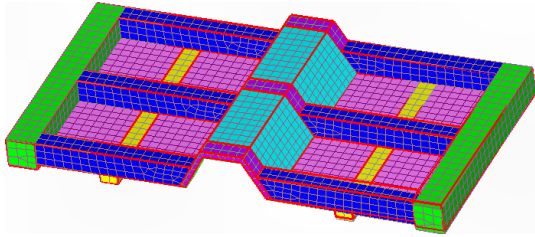
(4b) Local deformation of 4th mode



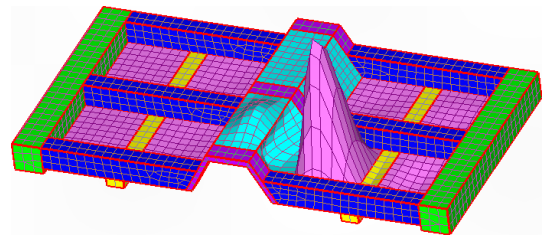
(5a) Global deformation of 5th mode



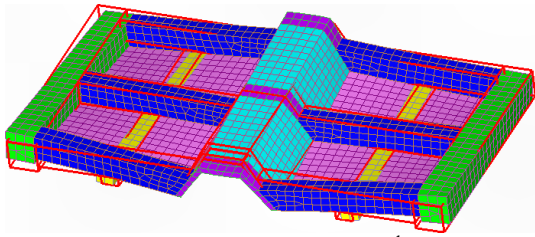
(5b) Local deformation of 5th mode



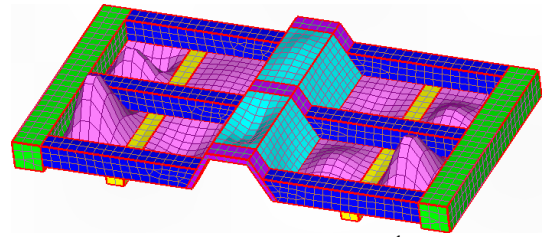
(6a) Global deformation of 6th mode



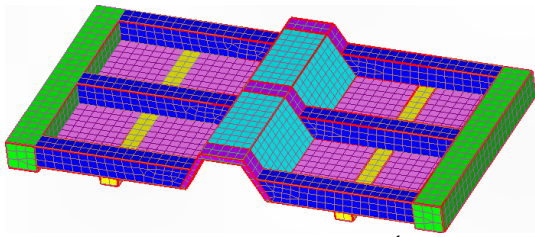
(6b) Local deformation of 6th mode



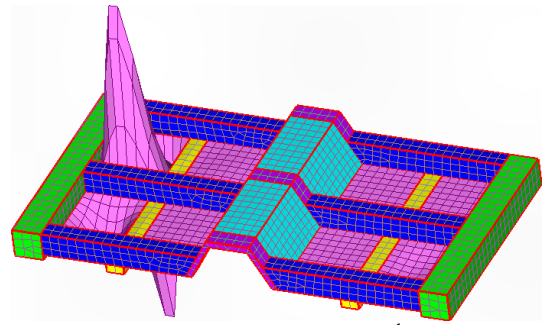
(7a) Global deformation of 7th mode



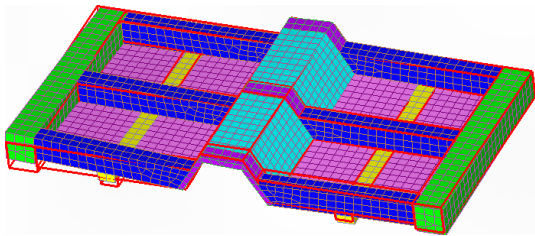
(7b) Local deformation of 7th mode



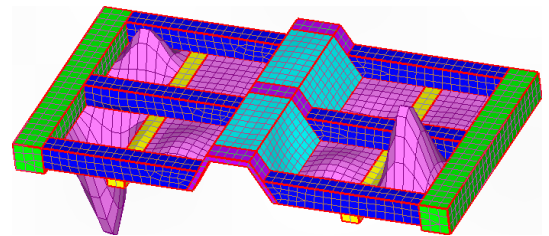
(8a) Global deformation of 8th mode



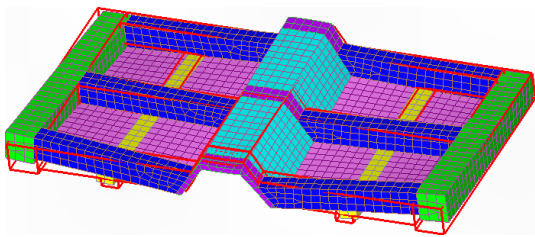
(8b) Local deformation of 8th mode



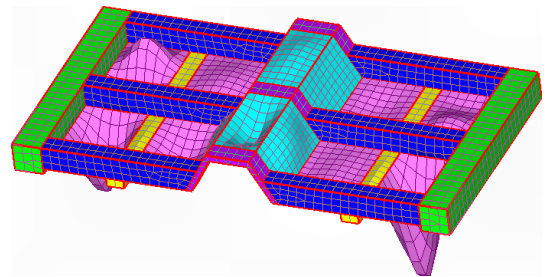
(9a) Global deformation of 9th mode



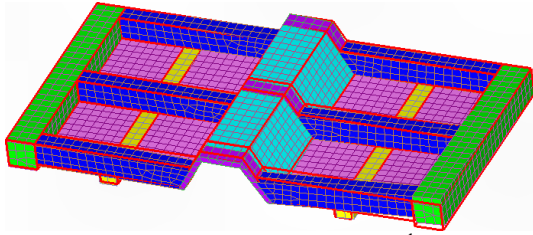
(9b) Local deformation of 9th mode



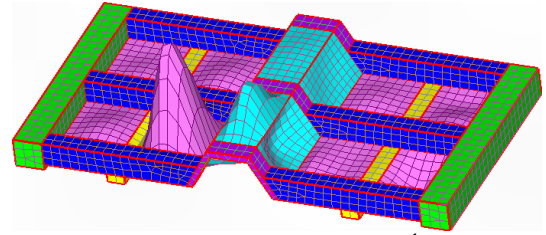
(10a) Global deformation of 10th mode



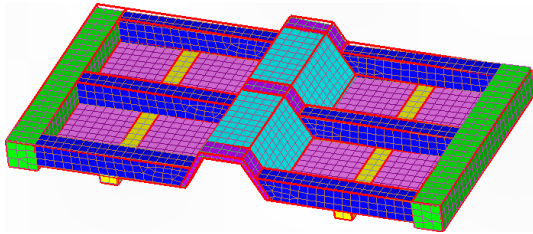
(10b) Local deformation of 10th mode



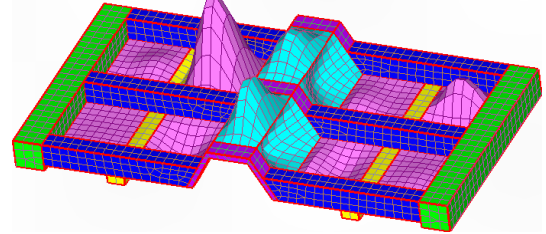
(11a) Global deformation of 11th mode



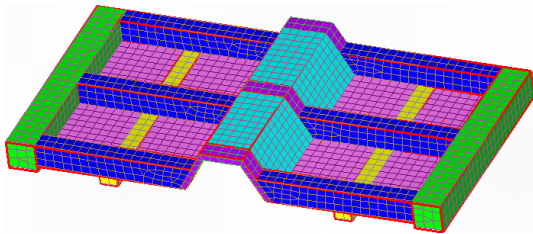
(11b) Local deformation of 11th mode



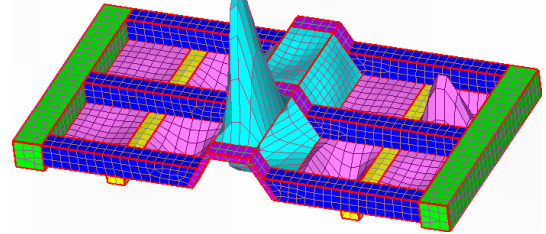
(12a) Global deformation of 12th mode



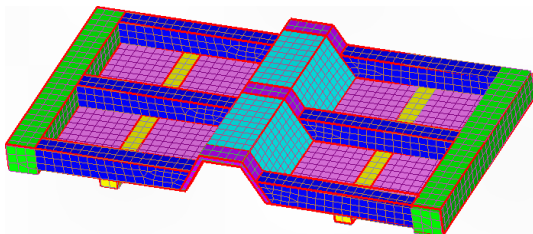
(12b) Local deformation of 12th mode



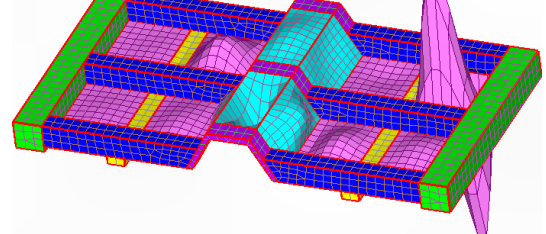
(13a) Global deformation of 13th mode



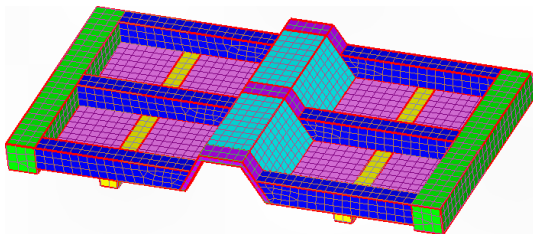
(13b) Local deformation of 13th mode



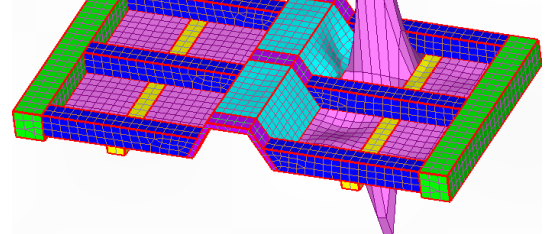
(14a) Global deformation of 14th mode



(14b) Local deformation of 14th mode



(15a) Global deformation of 15th mode



(15b) Local deformation of 15th mode

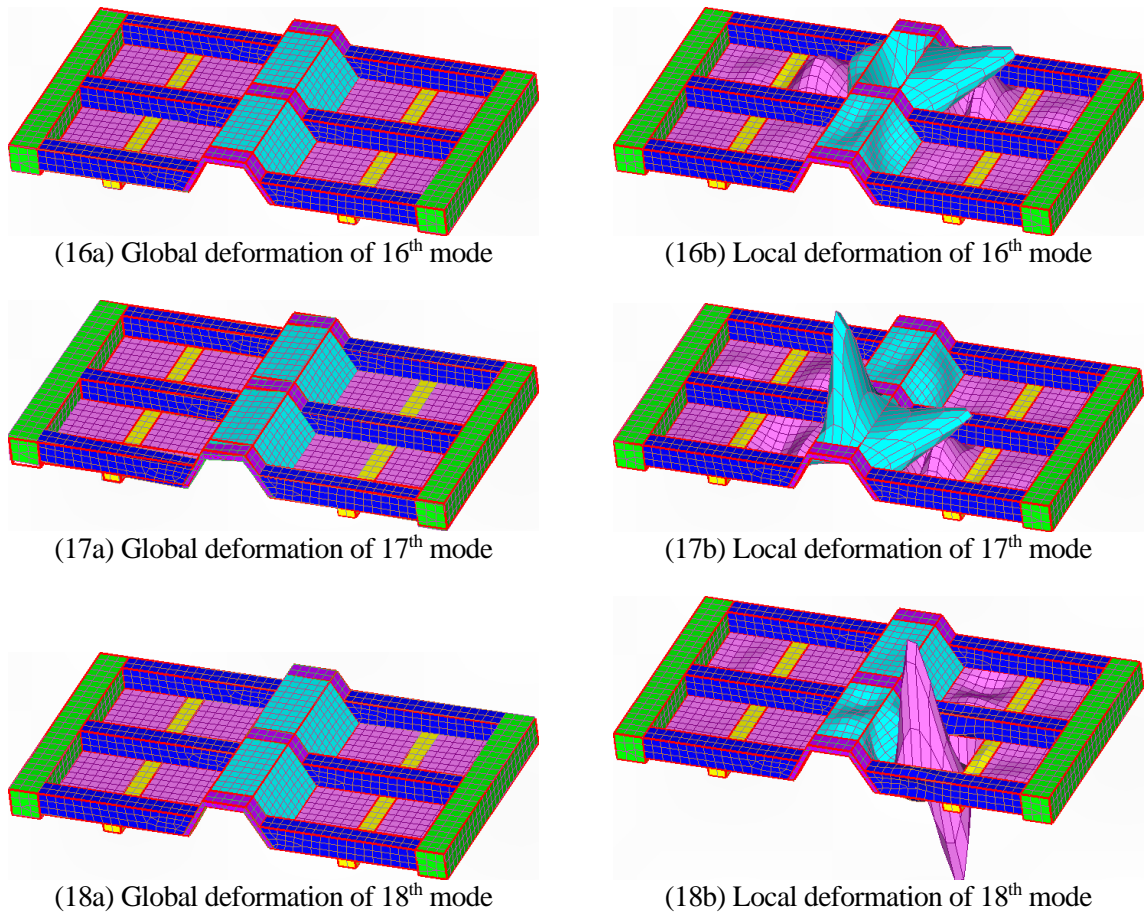


Fig. 3.3 Extracted global and local deformations of each characteristic mode.

3.4 分離した振動に着目した固有モードの分類

3.3 節において、主系と従系という観点から、モデルの振動形状を主系に起因する構造全体振動と従系に起因する局部振動に分離した。本節では3.3 節の分離結果を用いて各固有モードを主系が単体で振動するモード群と、主系と従系が連成振動するモード群に定量的に分類する。

まず、各固有モードから分離した構造全体振動の振幅の大きさを評価し、構造全体振動を有するモードと構造全体振動がほとんどないモードに大別する。ここでは次式を用いて構造全体振動の大きさを評価する。

$$E_g(r) = \mathbf{X}_g(r)^T \mathbf{M} \mathbf{X}_g(r) \quad (3-9)$$

式 (3-9) では r 次固有モードから分離した構造全体振動 $\mathbf{X}_g(r)$ の振幅の大きさをモデルの質量行列 \mathbf{M} を介した 2 次形式の形でエネルギー的に評価する。これにより、本来は単位の異なる並進変位と回転変位を同時に評価できる。各モードで式 (3-9) を計算した結果を図 3.4 に示す。図

2.10の結果に対してk-means法(79)によるクラスタリングを行い、構造全体振動を有すると自動的に判別されたモードを橙色で示している。クラスタリングはデータの集合をいくつかの部分集合(クラスタ)に分割する手法であり、k-means法は代表的な非階層的クラスタリング手法の一つである。k-means法は、各クラスタにおいてクラスタ内のデータとクラスタの重心(クラスタ内データの平均値)との距離の総和が最小となるような分割を行う(付録B)。k-means法の計算にはMATLABのkmeans関数を用いた。kmeans関数では初期値の選択について工夫を加えたk-means++法(80)を用いている。また、k-meansおよびk-means++法の初期値依存性を解消するためにモードの個数(18個)と同じ回数の反復を行い、最良の結果を採用している。また、データ間の距離にはデータ間の数値的な差の絶対値を用いた。この値の高低に基づいて18個のモードのうち、1次、2次、3次、7次、10次モードが構造全体振動を有すると自動的に判別できた。

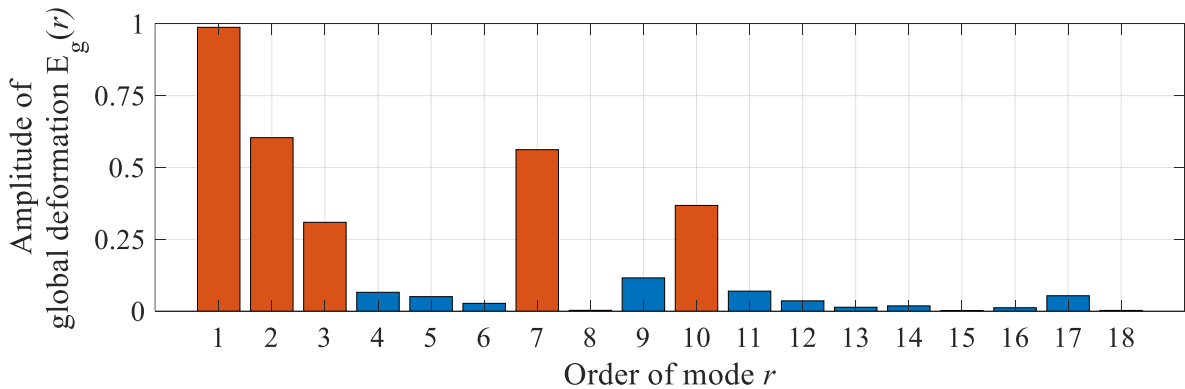


Fig. 3.4 Amplitude of global deformation derived from each characteristic modes by means of proposed local vibration separation method. In this figure, orange-colored modes which have large global deformation is automatically selected by means of k-means clustering.

続いて、図 3.4 において選別された 5 つのモードの構造全体振動の形状相関を次式で評価する。

$$rel_g(p, q) = \frac{|X_g(p)^T M X_g(q)|}{\sqrt{X_g(p)^T M X_g(p)} \sqrt{X_g(q)^T M X_g(q)}} \quad (3-10)$$

式(3-10)では p 次および q 次モードの構造全体振動を質量正規化して大きさを揃えて形状相関を評価する。2つの構造全体振動の形状が類似であれば $rel_g(p, q)$ は1に近い値をとり、一方で形状が異なれば0に近い値をとる。先述した5つのモードの構造全体振動に対して式(3-10)を計算した結果を表3.1に示す。表3.1では値が高いと赤色、低いと白色になるカースケールを用いている。

Table 3.1 Result of calculated relevance between 5 global deformations.

(p, q)	1	2	3	7	10
1	1	0.031919	0.100086	0.08595	0.107066
2	0.031919	1	0.947154	0.000384	0.026176
3	0.100086	0.947154	1	0.0223	0.088187
7	0.08595	0.000384	0.0223	1	0.893157
10	0.107066	0.026176	0.088187	0.893157	1

表 3.1 から、2 次と 3 次、7 次と 10 次の固有モードは類似する構造全体振動を有し、1 次モードが有する構造全体振動はどのモードの構造全体振動とも共通しないことがわかる。このことは、表 3.1 の結果に対して再び k-means 法によるクラスタリングを行うことで定量的に明らかにできる。ここで、1 次モードの有する構造全体振動が単独で存在し、他に類似する構造全体振動を持つモードが存在しない理由としては、1 次モードは主系であるフレーム構造が単独で振動しているモードだからである。一方で、2 次と 3 次、7 次と 10 次モードのように共通する構造全体振動が存在する理由としては、主系であるフレーム構造と、従系であるパネルが連成して振動するからである。このことは図 2.4 および図 3.3 から確認できる。

以上により、局部振動分離法で分離した振動形状に着目することにより、1~18 次の固有モードを構造全体振動が支配的なモード、局部振動が支配的なモード、そして構造全体振動と局部振動が連成するモードの 3 つのグループに定量的に分類でき、その結果は表 3.2 の通りである。

Table 3.2 Result of mode classification using local vibration extraction method.

Global mode	Coupled mode		Local mode
1	2, 3	7, 10	4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

ここで、局部振動分離法によって分離した構造全体振動および局部振動を振動数の観点で評価する。構造全体振動および局部振動の振動数を、レイリー商(12)を介して次式で求める。

$$ray_{g/l}(r) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{X}_{g/l}(r)^T \mathbf{K} \mathbf{X}_{g/l}(r)}{\mathbf{X}_{g/l}(r)^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{g/l}(r)}} \quad (3-11)$$

式 (3-11) で根号の中がレイリー商であり、 $\mathbf{X}_{g/l}(r)$ は r 次モードの構造全体振動 (下添え字 g) または局部振動 (下添え字 l) を表す。図 3.4 および表 3.2 の結果から、1 次、2 次、3 次、7 次、10 次の構造全体振動および 2 次~18 次の局部振動の振動数を求めた結果を、モデルの固有振動

数とあわせて表 3.3 および図 3.5 に示す. 図 3.5 の下段には固有振動数, 上段には構造全体振動, 中段には局部振動のレイリー商による振動数を示し, 横軸を周波数とした数直線上に並べている. 表 3.3 および図 3.5 から, 形状が類似している 2 次と 3 次, 7 次と 10 次の構造全体振動と局部振動は振動数が近く, これによって連成振動が生じていると考えられる.

Table 3.3 Natural frequency and calculated frequency of global and local deformations.

Characteristic mode		Global deformation		Local deformation	
Order	Frequency (Hz)	Order	Frequency (Hz)	Order	Frequency (Hz)
1	38.4217	1	38.5355		
2	76.9346	2	79.7708	2	82.4410
3	82.5878	3	78.1277	3	80.7930
4	95.0540			4	93.7358
5	99.8184			5	98.4946
6	114.4123			6	113.7828
7	128.9810	7	131.7312	7	132.9298
8	134.2530			8	134.2026
9	136.0309			9	132.6610
10	139.0160	10	128.8165	10	134.0153
11	143.2999			11	141.9433
12	155.8328			12	155.3557
13	156.0719			13	155.9034
14	156.8093			14	156.3661
15	168.6129			15	168.6744
16	175.9092			16	176.0332
17	186.68549			17	186.2926
18	198.7577			18	198.9461

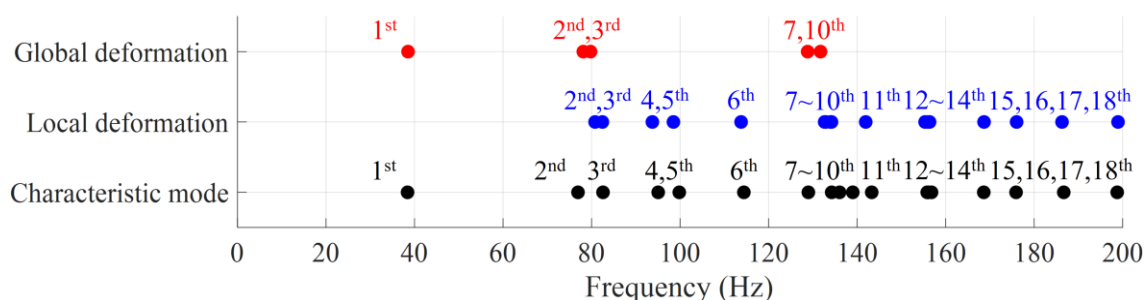


Fig. 3.5 Natural frequency and calculated frequency (as Rayleigh quotient) of global and local vibration. The figure shows that Rayleigh quotients of global and local deformations of 2nd and 3rd mode is close thus they consists coupled mode.

第4章 三次元離散ウェーブレット変換を用いた 振動分離手法

第3章では局部振動分離法を用いて構造全体振動と局部振動を分離する方法について述べた。しかし、局部振動分離法を行う上ではモデルのどの部位または自由度を残すか（どの部位を部分構造 A に設定するか）を解析者が事前に決めなければならないため、所望の結果を得るには解析者の知見を必要とする。そこで、本章ではこうした解析者の判断要素をできる限り排除することを目的に、ウェーブレット変換を用いて構造全体振動と局部振動を分離する方法を新たに提案する。

4.1 離散ウェーブレット変換の概要と三次元離散ウェーブレット変換への展開

ウェーブレット変換 (Wavelet transform) は空間 (または時間)、周波数的に局在する基底関数によって信号を空間領域と周波数領域に展開する信号処理手法であり、フーリエ変換では失われる空間領域の情報を保持できる。離散ウェーブレット変換 (Discrete wavelet transform; DWT) ではスケーリング関数とウェーブレットと呼ばれる二つの基底関数を用いて離散信号を展開する (46)。本研究では短いサポートと直交性を有し、比較的なめらかな形を持つ基底関数として、離散ウェーブレット変換で一般的に用いられる Daubechies 4 (付録 C) (81)(82)を用いる。こうしたスケーリング関数を $\phi(x)$ 、ウェーブレットを $\psi(x)$ とおくと、 $\phi(x)$ と $\psi(x)$ はスケーリングパラメータ j とトランスレートパラメータ k と呼ばれる二つの整数パラメータによって次式に示す正規直交基底を構成する。

$$\begin{cases} \phi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \phi(2^j x - k) \\ \psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k) \end{cases} \quad (4-1)$$

式 (4-1) から、スケーリングパラメータ j は関数をスケール (伸縮) し、トランスレートパラメータ k は関数を軸方向にトランスレート (平行移動) させる。一般に、離散ウェーブレット変換では式 (4-1) に示した二つの関数が正規直交基底となる基底関数を用いて以下の方法で信号を分解、展開する。まず自乗可積分関数 $f(x)$ で表される信号をスケーリング関数 $\phi(x)$ によって以下のように離散近似する。

$$f_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \phi_{j,k}(x) \rangle \phi_{j,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^{(j)} \phi_{j,k}(x) \quad (4-2)$$

式 (4-2) は信号 $f(x)$ を解像度 2^j で離散近似したことを表し, $f_j(x)$ をレベル j の近似信号と呼ぶ. 式 (4-2) の $s_k^{(j)}$ はレベル j , シフト k のスケーリング係数と呼ばれ, 記号 $\langle f(x), g(x) \rangle$ は二つの自乗可積分関数 $f(x), g(x)$ の内積を表す. レベルが下がり, j の値が小さくなるにつれて解像度が粗い近似となる. 一方, $f(x)$ のレベル j のウェーブレットへの射影は次式で表される.

$$g_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \psi_{j,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^{(j)} \psi_{j,k}(x) \quad (4-3)$$

式 (4-3) の $w_k^{(j)}$ はレベル j , シフト k のウェーブレット係数と呼ばれ, $g_j(x)$ はレベル j の詳細信号と呼ばれる. また, スケーリング関数とウェーブレットとのツースケール関係(73)(72)から, 式 (4-1) ~ (4-3) を用いて次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= f_j(x) + g_j(x) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^{(j+1)} \phi_{j+1,k}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^{(j)} \phi_{j,k}(x) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^{(j)} \psi_{j,k}(x) \end{aligned} \quad (4-4)$$

式 (4-4) から, レベル $j+1$ の離散信号 $f_{j+1}(x)$ は, 一段階粗い解像度 (解像度が半分) のレベル j の近似信号 $f_j(x)$ と詳細信号 $g_j(x)$ に分解でき, 逆に $f_j(x)$ と $g_j(x)$ から一段階高い解像度 (倍の解像度) の離散信号 $f_{j+1}(x)$ を一意に再構成できる. このような信号の展開が離散ウェーブレット変換である.

次に, サンプリングした信号をレベル $j=N$ の離散信号 $f_N(x)$ とおくと, $f_N(x)$ は式 (4-1) ~ (4-4) によってレベルが J ($J=1,2,\dots,N-1$) だけ解像度が下がった任意のレベル $j=N-J$ で次式および図 4.1 のように展開できる.

$$\begin{aligned} f_N(x) &= f_{N-J}(x) + \sum_{j=N-J}^{N-1} g_j(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^{(N-J)} \phi_{N-J,k}(x) + \sum_{j=N-J}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^{(j)} \psi_{j,k}(x) \end{aligned} \quad (4-5)$$

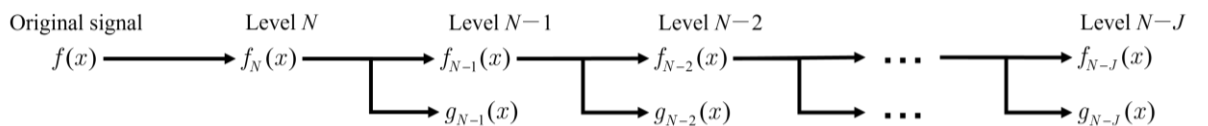


Fig. 4.1 Conceptual figure of multiresolution analysis. By means of discrete wavelet transform, a discrete signal is hierarchically decomposed into signals in arbitrary resolution.

このように、離散ウェーブレット変換によって信号を階層的に展開、再構成する手法を多重解像度解析と呼ぶ。多重解像度解析は、以下の性質を持つ多重解像度空間 \mathbf{V}_j の系列で表すこともできる(83).

$$\forall j \in \mathbb{Z}; \mathbf{V}_j \subset \mathbf{V}_{j+1} \quad (4-6)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \quad (4-7)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j = 0 \quad (4-8)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}; f(x) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(2x) \in \mathbf{V}_{j+1} \quad (4-9)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}; f(x) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) \in \mathbf{V}_j \quad (4-10)$$

ここで、 \mathbb{Z} は整数の集合、 \mathbb{R} は実数の集合、 $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ は自乗可積分関数の集合を表す。 \mathbf{V}_j は任意の $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ 関数を解像度 2^j で離散近似した関数の集合であり、 \mathbf{V}_{j+1} は \mathbf{V}_j の倍の解像度の集合で、 \mathbf{V}_j を含む。 \mathbf{V}_{j+1} における \mathbf{V}_j の直交補空間を \mathbf{W}_j とすると、 \mathbf{V}_{j+1} は \mathbf{V}_j と \mathbf{W}_j の直和として次式で表せる(84).

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j \quad (4-11)$$

ここで、 \mathbf{V}_j と \mathbf{W}_j それぞれの正規直交基底が式 (4-1) に示すスケーリング関数とウェーブレットである。

Mallat はこの概念を二次元に拡張し、二次元離散ウェーブレット変換を以下のように展開した(85).

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \quad (4-12)$$

ここで、 \mathbf{V}_j^x は $\phi(x)$ を基底とする関数の集合、 \mathbf{V}_j^y は $\phi(y)$ を基底とする関数の集合を指し、式 (4-12) は \mathbf{V}_j を \mathbf{V}_j^x と \mathbf{V}_j^y との直積 (テンソル積) で表している。式 (4-11) から、式 (4-12) は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+1} &= \mathbf{V}_{j+1}^x \otimes \mathbf{V}_{j+1}^y \\ &= \mathbf{V}_j^x \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^y \\ &= \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \\ &= \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j \end{aligned} \quad (4-13)$$

ここで、式 (4-13) の \mathbf{W}_j^x は \mathbf{V}_j^x の直交補空間で $\psi(x)$ を基底とし、 \mathbf{W}_j^y は \mathbf{V}_j^y の直交補空間で $\psi(y)$ を基底とする。また、 \mathbf{W}_j は次式で表される。

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \quad (4-14)$$

式 (4-14) から、二次元離散ウェーブレット変換において、 \mathbf{W}_j の正規直交基底は次の三つである。

$$\begin{aligned} \phi_{j,k_x}(x)\psi_{j,k_y}(y) &= 2^j \phi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y) \\ \psi_{j,k_x}(x)\phi_{j,k_y}(y) &= 2^j \psi(2^j x - k_x)\phi(2^j y - k_y) \\ \psi_{j,k_x}(x)\psi_{j,k_y}(y) &= 2^j \psi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y) \end{aligned} \quad (4-15)$$

以上より、二次元離散ウェーブレット変換および多重解像度解析は次式で表される。

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x, y) &= f_j(x, y) + g_j(x, y) \\ &= \sum_{k_x, k_y} s_{k_x, k_y}^{(j)} \phi_{j, k_x}(x) \phi_{j, k_y}(y) \\ &\quad + \sum_{k_x, k_y} \left[w_{k_x, k_y}^{(j),1} \phi_{j, k_x}(x) \psi_{j, k_y}(y) + w_{k_x, k_y}^{(j),2} \psi_{j, k_x}(x) \phi_{j, k_y}(y) + w_{k_x, k_y}^{(j),3} \psi_{j, k_x}(x) \psi_{j, k_y}(y) \right] \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned} f_N(x, y) &= f_{N-J}(x, y) + \sum_{j=N-J}^{N-1} g_j(x, y) \\ &= \sum_{k_x, k_y} s_{k_x, k_y}^{(N-J)} \phi_{N-J, k_x}(x) \phi_{N-J, k_y}(y) \\ &\quad + \sum_{j=N-J}^{N-1} \sum_{k_x, k_y} \left[w_{k_x, k_y}^{(j),1} \phi_{j, k_x}(x) \psi_{j, k_y}(y) + w_{k_x, k_y}^{(j),2} \psi_{j, k_x}(x) \phi_{j, k_y}(y) + w_{k_x, k_y}^{(j),3} \psi_{j, k_x}(x) \psi_{j, k_y}(y) \right] \end{aligned} \quad (4-17)$$

式 (4-16) および式 (4-17) から、図 4.2 のように二次元離散ウェーブレット変換 (2D-DWT) によって、データはサイズが $1/2^2$ の 4 つの要素に逐次分解される。

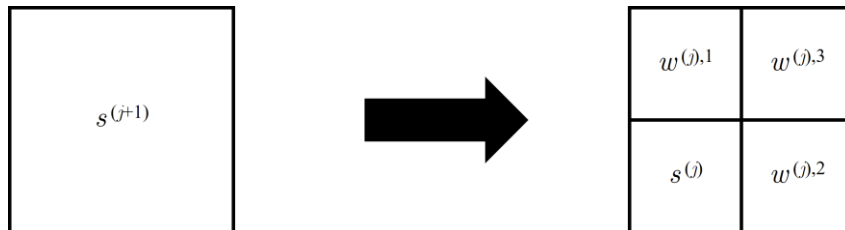


Fig. 4.2 Conceptual image of two dimensional wavelet transform. A discrete two dimensional data is decomposed into 4 level components which have $1/2^2$ size of former level.

この概念から、村木(60)と Weeks(61)は三次元離散ウェーブレット変換 (3D-DWT) を以下のよ
うに展開した.

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \quad (4-18)$$

式 (4-18) で \mathbf{V}_j^x は $\phi(x)$ を基底とする関数の空間, \mathbf{V}_j^y は $\phi(y)$ を基底とする関数の空間, \mathbf{V}_j^z は
 $\phi(z)$ を基底とする関数の空間を指す. 式 (4-13) と同様に, 式 (4-18) は次式で展開できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+1} &= \mathbf{V}_{j+1}^x \otimes \mathbf{V}_{j+1}^y \otimes \mathbf{V}_{j+1}^z \\ &= \mathbf{V}_j^x \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \oplus \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^z \\ &= \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \\ &\quad \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \\ &\quad \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \\ &= \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j \end{aligned} \quad (4-19)$$

また, 式 (4-14) と同様に式 (4-19) の \mathbf{W}_j は次式で表される.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j &= \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{V}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \\ &\quad \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{V}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{V}_j^z \\ &\quad \oplus \mathbf{W}_j^x \otimes \mathbf{W}_j^y \otimes \mathbf{W}_j^z \end{aligned} \quad (4-20)$$

式 (4-20) から, 三次元離散ウェーブレット変換における \mathbf{W}_j の正規直交基底は次の 7 つであ
る.

$$\begin{aligned} \phi_{j,kx}(x)\phi_{j,ky}(y)\psi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \phi(2^j x - k_x)\phi(2^j y - k_y)\psi(2^j z - k_z) \\ \phi_{j,kx}(x)\psi_{j,ky}(y)\phi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \phi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y)\phi(2^j z - k_z) \\ \phi_{j,kx}(x)\psi_{j,ky}(y)\psi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \phi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y)\psi(2^j z - k_z) \\ \psi_{j,kx}(x)\phi_{j,ky}(y)\phi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \psi(2^j x - k_x)\phi(2^j y - k_y)\phi(2^j z - k_z) \\ \psi_{j,kx}(x)\phi_{j,ky}(y)\psi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \psi(2^j x - k_x)\phi(2^j y - k_y)\psi(2^j z - k_z) \\ \psi_{j,kx}(x)\psi_{j,ky}(y)\phi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \psi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y)\phi(2^j z - k_z) \\ \psi_{j,kx}(x)\psi_{j,ky}(y)\psi_{j,kz}(z) &= 2\sqrt{2}^j \psi(2^j x - k_x)\psi(2^j y - k_y)\psi(2^j z - k_z) \end{aligned} \quad (4-21)$$

以上から、三次元離散ウェーブレット変換は次式で表される。

$$\begin{aligned}
f_{j+1}(x, y, z) &= f_j(x, y, z) + g_j(x, y, z) \\
&= \sum_{kx, ky, kz} s_{kx, ky, kz}^{(j)} \phi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + \sum_{kx, ky, kz} \left[w_{kx, ky, kz}^{(j),1} \phi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \right. \\
&\quad + w_{kx, ky, kz}^{(j),2} \phi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),3} \phi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \\
&\quad + w_{kx, ky, kz}^{(j),4} \psi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),5} \psi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \\
&\quad \left. + w_{kx, ky, kz}^{(j),6} \psi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),7} \psi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \right]
\end{aligned} \tag{4-22}$$

式 (4-22) の三次元離散ウェーブレット変換の概念図を図 4.3 に示す。三次元離散ウェーブレット変換によって、ボリュームデータはサイズが $1/2^3$ の 8 つの要素に分解される。

また、三次元離散ウェーブレット変換による多重解像度解析は次式および図 4.4 で表される。

$$\begin{aligned}
f_N(x, y, z) &= f_{N-J}(x, y, z) + \sum_{j=N-J}^{N-1} g_j(x, y, z) \\
&= \sum_{kx, ky, kz} s_{kx, ky, kz}^{(N-J)} \phi_{N-J, kx}(x) \phi_{N-J, ky}(y) \phi_{N-J, kz}(z) + \sum_{j=N-J}^{N-1} \sum_{kx, ky, kz} \left[w_{kx, ky, kz}^{(j),1} \phi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \right. \\
&\quad + w_{kx, ky, kz}^{(j),2} \phi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),3} \phi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \\
&\quad + w_{kx, ky, kz}^{(j),4} \psi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),5} \psi_{j, kx}(x) \phi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \\
&\quad \left. + w_{kx, ky, kz}^{(j),6} \psi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \phi_{j, kz}(z) + w_{kx, ky, kz}^{(j),7} \psi_{j, kx}(x) \psi_{j, ky}(y) \psi_{j, kz}(z) \right]
\end{aligned} \tag{4-23}$$

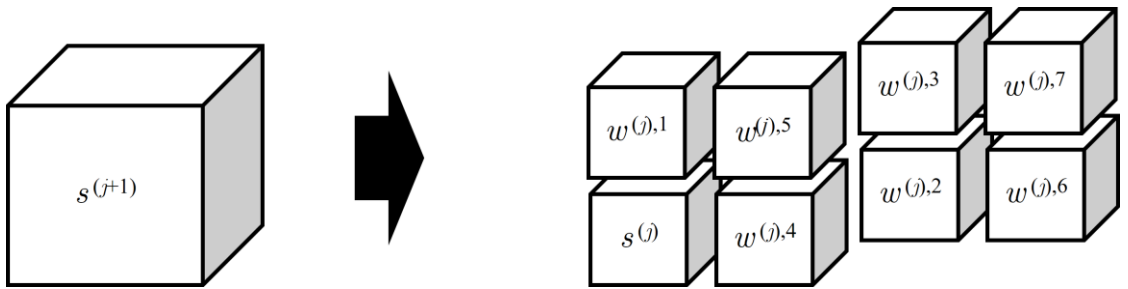


Fig. 4.3 Conceptual diagram of 3D discrete wavelet transform. A volume data at level $j+1$ is divided into 8 elements.

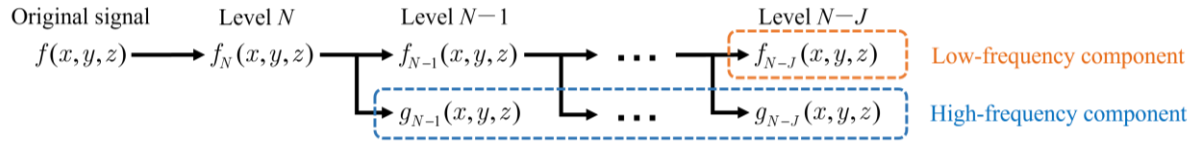


Fig. 4.4 Conceptual figure of multiresolution analysis using three-dimensional discrete wavelet transform. Orange area indicates low-frequency component and blue area indicates high-frequency component at level $N-J$.

式 (4-23) 右辺第一項の近似信号 $f_{N-J}(x, y, z)$ を図 4.4 に橙色で示し、これを本研究ではレベル $N-J$ の低周波数成分と呼ぶ。一方、第二項の詳細信号の総和 $\sum g_j(x, y, z)$ を図 4.4 に青色で示し、これをレベル $N-J$ の高周波数成分と呼ぶ。

4.2 三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法

提案する三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法について説明する。本手法の概略フローを図 4.5 に示す。三次元離散ウェーブレット変換は固有モードには直接適用できないため、まず固有モードを三次元離散信号に変換する。これは、モデルの各ノードが持つ変位成分を空間内に離散化することで行う。この過程でモデルの物性等の情報は一旦無視される。

ここでは、有限要素モデルの各ノード座標と p 次 ($p=1\sim 18$) 固有モード $\mathbf{X}(p)$ を基に三次元配列 (ボリュームデータ) を作成する。この操作の概念図を図 4.6 に示す。

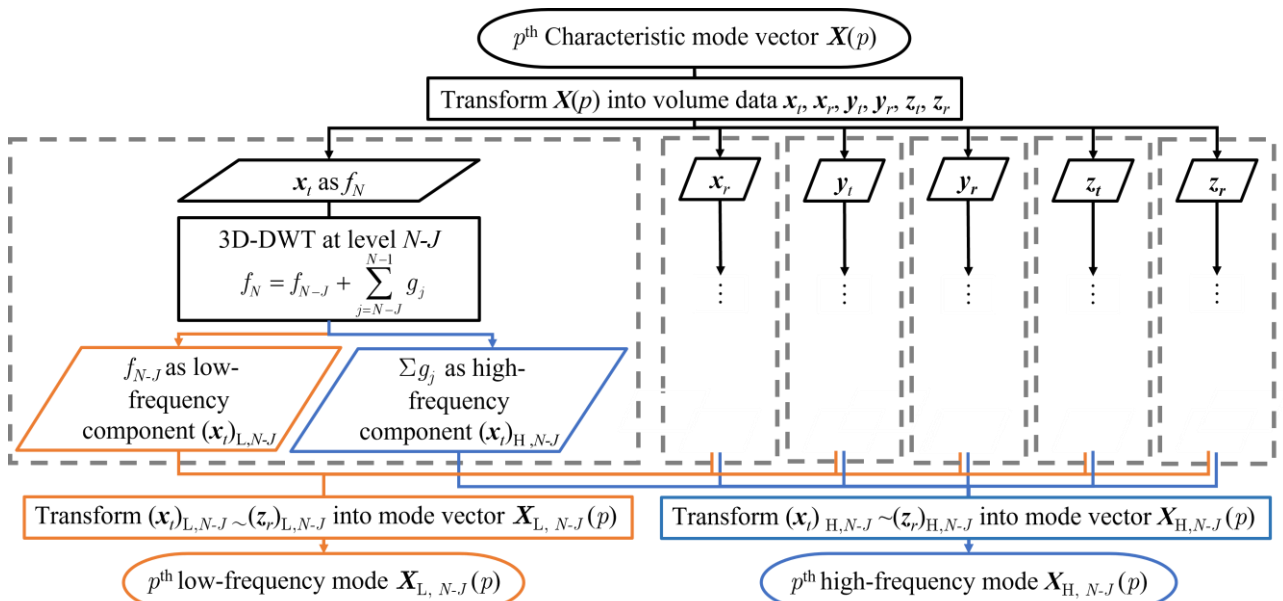


Fig. 4.5 Conceptual flow diagram of proposed vibration extraction method using three dimensional discrete wavelet transform.

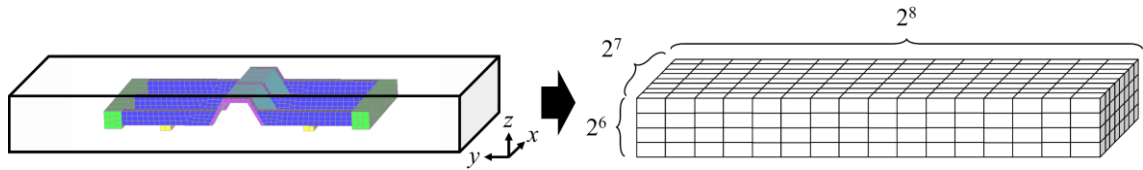


Fig. 4.6 Conceptual flow of creating volume data. A volume is first created to cover whole FEM model and then divided into voxels.

まず、モデルを完全に覆う空間（ボリューム）を設定し、その空間を x, y, z 軸の各方向に分割して得られる各三次元セル（ボクセル）に値を格納することでボリュームデータを作成する。ここで、モデル端部で値が急激に変化するのを避けるために、モデルの各軸方向に対して寸法の 2 倍の長さでボリュームを作成し、その中心にモデルを配置した。次に離散ウェーブレット変換の適用を考慮し、ボリュームを 2 のべき乗で分割する。ボクセル内にノードが重複しないよう、ボリュームを x 軸方向に 2^7 分割、 y 軸方向に 2^8 分割、 z 軸方向に 2^6 分割して $2^7 \times 2^8 \times 2^6$ 個のボクセルに分割した。各ボクセルでは、モデルのノードを包含する場合はそのノードが有する変位または角変位の値を挿入し、ノードを包含しない場合は既に値が格納されているボクセルの値を基に最近傍内挿を行う。モデルの変位は x, y, z 軸の並進と回転で 6 自由度の成分をもつため、成分ごとにボリュームデータ ($\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_r$) を作成する。ここで、下添え字 t は並進、 r は回転を表し、例えば \mathbf{x}_t はモデルの x 軸方向の並進変位からなるボリュームデータを表す。作成した 6 個のボリュームデータに対し、それぞれ図 4.5 の灰色ブロック内の処理として、各ボリュームデータを式 (8) における離散信号 f_N とみなして三次元離散ウェーブレット変換 (3D-DWT) を適用する。分解レベル $N - J$ を適切に決定して三次元離散ウェーブレット変換を行うことで、空間周波数が低い構造全体振動を低周波数成分 ($\mathbf{x}_t)_{L, N - J} \sim (\mathbf{z}_r)_{L, N - J}$ に、空間周波数が高い局部振動を高周波数成分 ($\mathbf{x}_t)_{H, N - J} \sim (\mathbf{z}_r)_{H, N - J}$ に分離する。各成分の下添え字 L は低周波数、 H は高周波数を表し、以降同様である。そしてボリュームデータを作成した逆の手順により、低周波数成分から構造全体振動を含む低周波数モード $\mathbf{X}_{L, N - J}(p)$ を、高周波数成分から局部振動を含む高周波数モード $\mathbf{X}_{H, N - J}(p)$ を得る。

ここで、構造全体振動と局部振動を分離するのに適切な三次元離散ウェーブレット変換の分解レベル $N - J$ を以下の方法で決定する。まず、本論文で用いるボリュームの分割数は $2^7 \times 2^8 \times 2^6$ であるため、最小の分割数 2^6 を基準として、この解像度を最大レベル $N = 6$ とする。次に、最も低い解像度 ($2^1 \times 2^2 \times 2^0$) をレベル 0 として、 J を 1 から 6 まで変化させ、レベル $N - J = 5 \sim 0$ で調査する。三次元離散ウェーブレット変換の結果、固有モードの構造全体振動と局部振動がそれ

ぞれ低周波数モードと高周波数モードに分離されていれば、低周波数モードはモデル全体で変形し、高周波数モードは局所的に大きく変形する。この観点から、シャノンエントロピー(86)を用いて両モードの形状を評価する。シャノンエントロピーは情報エントロピーの一つであり、配列内要素の値が同等であれば大きな値をとり、配列内要素に外れ値が存在する場合は低い値をとるという特徴を持つ。シャノンエントロピーを用いた分解レベル決定法の手順を以下に具体的に述べる。まず、低周波数モードの各ノードが持つ変位の大きさを次式でエネルギー的に評価する。

$$e_{i,L}(r, N-J) = \mathbf{X}_{i,L}(r, N-J)^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{i,L}(r, N-J) \quad (4-24)$$

式(4-24)の $\mathbf{X}_{i,L}(r, N-J)$ は r 次固有モード($r=1\sim 18$)から得られるレベル $N-J$ ($N-J=0\sim 5$)の低周波数モード $\mathbf{X}_L(r, N-J)$ のうち、モデルの i 番目ノードの持つ6自由度分の変位のみを残し、他のノードの持つ変位を0としたベクトルであり、 $e_{i,L}(r, N-J)$ は $\mathbf{X}_{i,L}(r, N-J)$ とモデルの質量行列 \mathbf{M} の二次形式の値である。モデルの全てのノード($i=1\sim 3095$)で $e_{i,L}(r, N-J)$ を求め、 $e_{i,L}(r, N-J)$ を並べた配列(ベクトル)を $\mathbf{e}_L(r, N-J)$ とおく。次に、各固有モードにおいて $\mathbf{e}_L(r, N-J)$ のシャノンエントロピー $H(\mathbf{e}_L(r, N-J))$ を次式で求める(87)。

$$H(\mathbf{e}_L(r, N-J)) = -\sum_i P_i \log_2 P_i \quad (4-25)$$

ただし、 $P_i = |e_{i,L}(r, N-J)|^2 / \|\mathbf{e}_L(r, N-J)\|^2$ とする。式(4-25)から、シャノンエントロピーは配列内要素の値がほぼ同じであれば高い値をとり、配列内要素に外れ値があれば低い値をとることから、局部振動が残留している低周波数モードではシャノンエントロピーは低い値をとり、局部振動が除去されていれば高い値をとると考えられる。したがって、式(4-25)で求めた $H(\mathbf{e}_L(r, N-J))$ が最大となる分解レベルをそのモードにおける最適な三次元離散ウェーブレット変換の分解レベルとする。 $r=1\sim 18$ 次の各モードにおいて、分解レベルを変化させたときの式(4-25)で算出したシャノンエントロピーの値をグラフにしたものを図4.7に示す。図4.7中の各グラフ上の点は各モードから得られるシャノンエントロピーの最大値を示しており、この最大値をとるレベルで三次元離散ウェーブレット変換を行う。以上の方法で求めた最適な三次元離散ウェーブレット変換の分解レベルを表4.1に示し、表4.1に示す分解レベルで振動分離を行った結果を図4.8に示す。図4.8の左列には低周波数モード、右列には高周波数モードを示している。

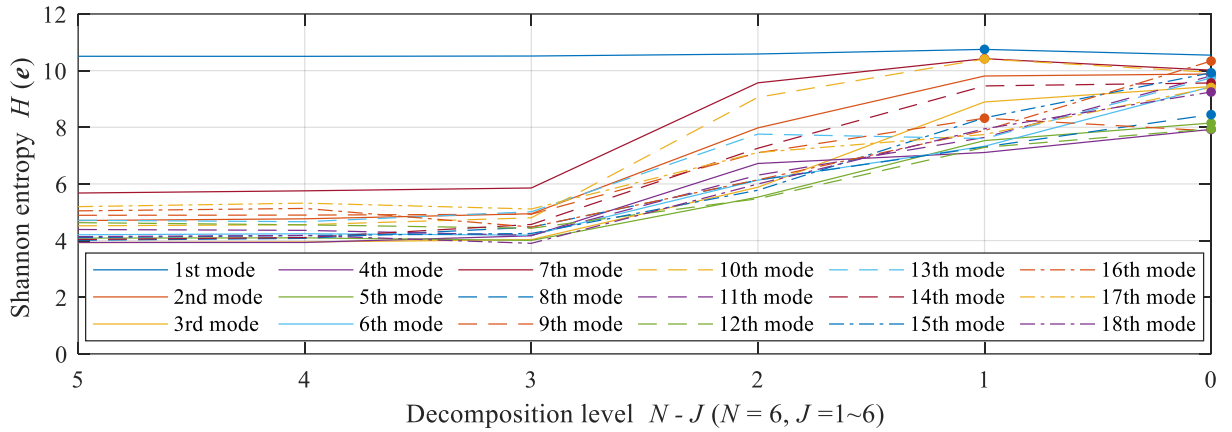
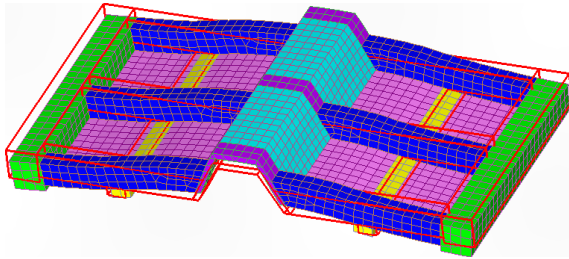


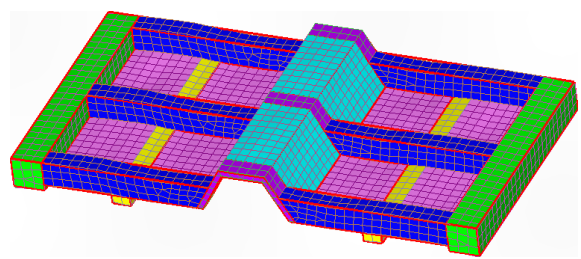
Fig. 4.7 Shannon entropy value in each low spatial frequency mode and decomposition level of 3D-DWT. The highest value in each mode is marked in the figure which also represents the optimal decomposition level for vibration separation.

Table 4.1 Decomposition level of each mode determined by Shannon entropy.

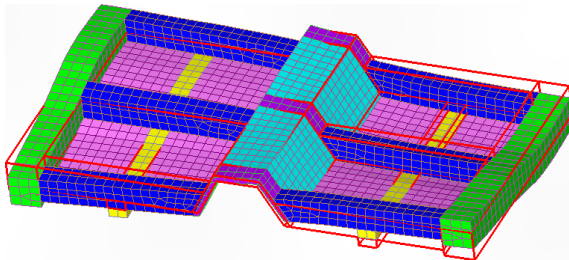
1 st	Lv.1	7 th	Lv.1	13 th	Lv.0
2 nd	Lv.0	8 th	Lv.0	14 th	Lv.0
3 rd	Lv.0	9 th	Lv.1	15 th	Lv.0
4 th	Lv.0	10 th	Lv.1	16 th	Lv.0
5 th	Lv.0	11 th	Lv.0	17 th	Lv.0
6 th	Lv.0	12 th	Lv.0	18 th	Lv.0



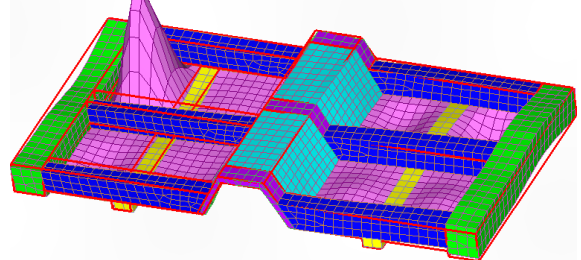
1st low spatial frequency mode (Lv. 1)



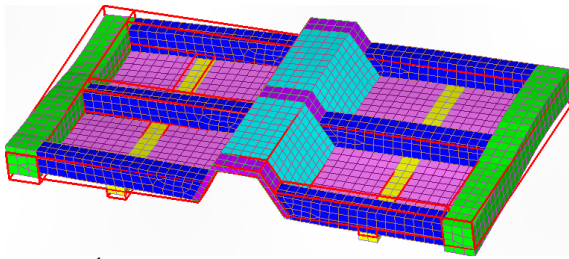
1st high spatial frequency mode (Lv. 1)



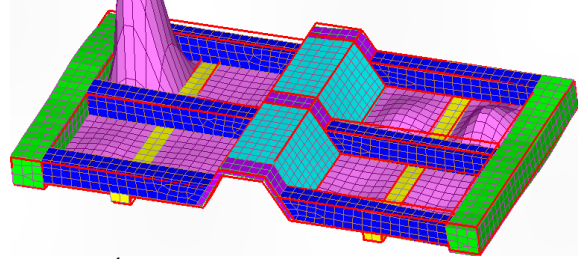
2nd low spatial frequency mode (Lv. 0)



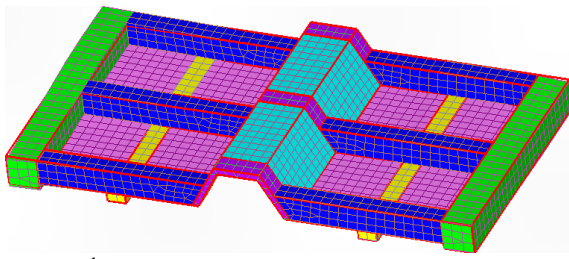
2nd high spatial frequency mode (Lv. 0)



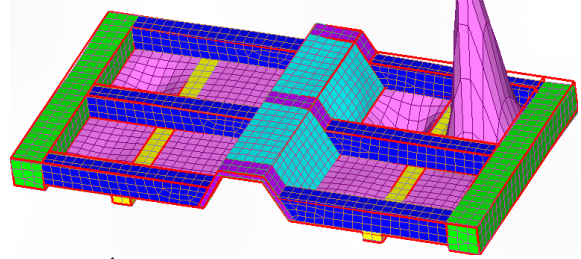
3rd low spatial frequency mode (Lv. 0)



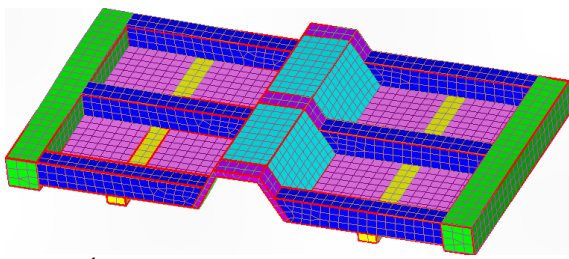
3rd high spatial frequency mode (Lv. 0)



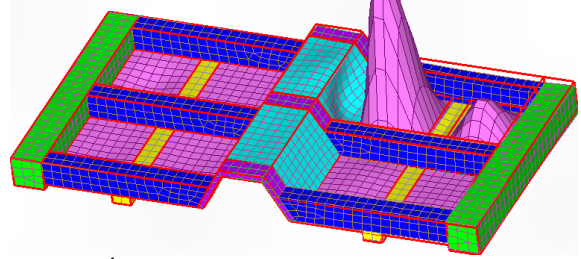
4th low spatial frequency mode (Lv. 0)



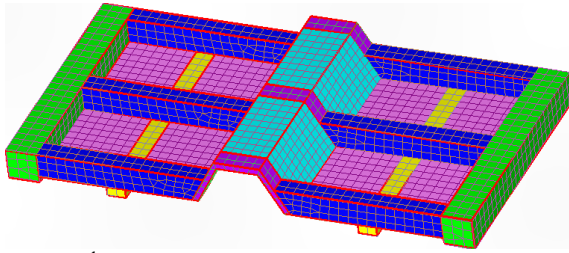
4th high spatial frequency mode (Lv. 0)



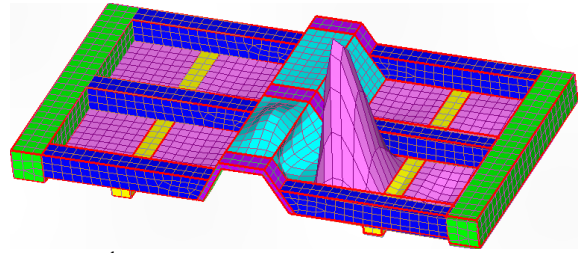
5th low spatial frequency mode (Lv. 0)



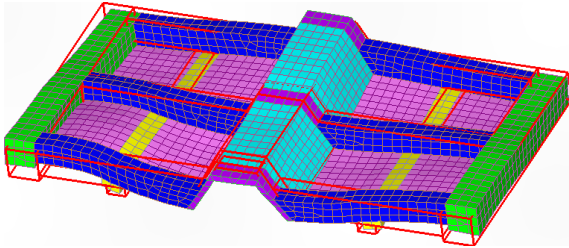
5th high spatial frequency mode (Lv. 0)



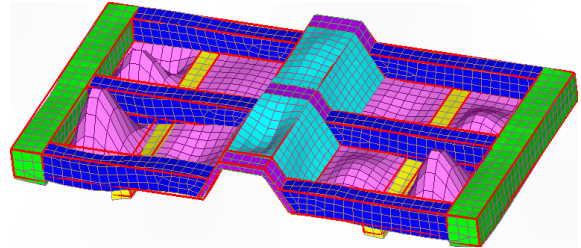
6th low spatial frequency mode (Lv. 0)



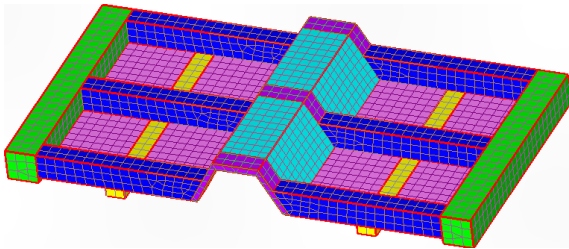
6th high spatial frequency mode (Lv. 0)



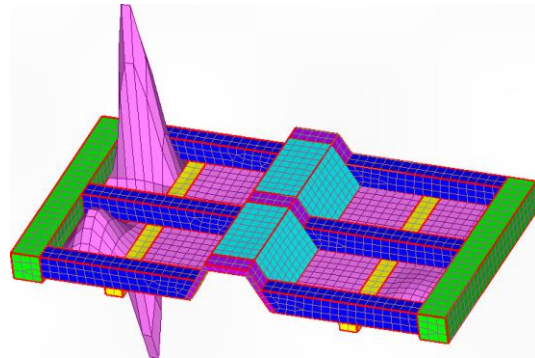
7th low spatial frequency mode (Lv. 1)



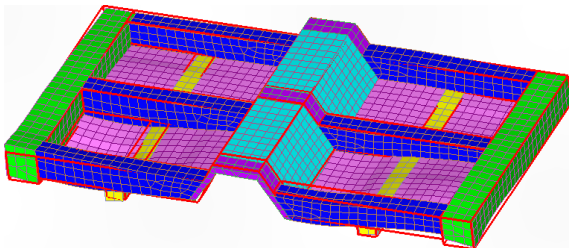
7th high spatial frequency mode (Lv. 1)



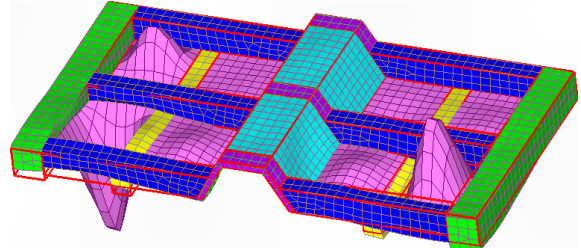
8th low spatial frequency mode (Lv. 0)



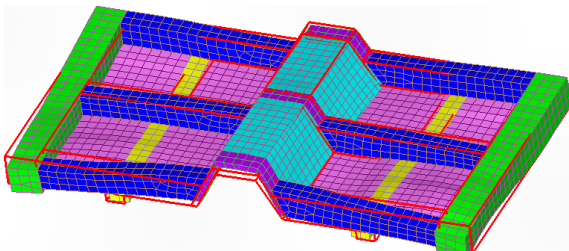
8th high spatial frequency mode (Lv. 0)



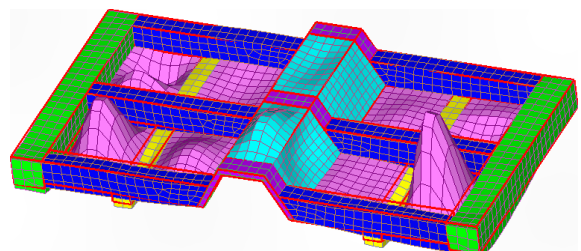
9th low spatial frequency mode (Lv. 1)



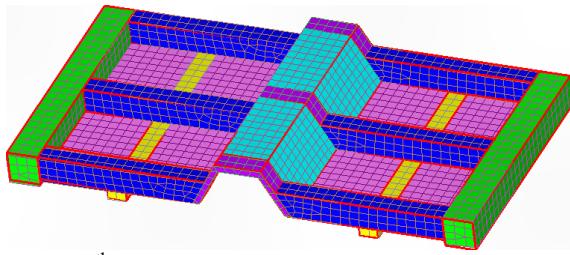
9th high spatial frequency mode (Lv. 1)



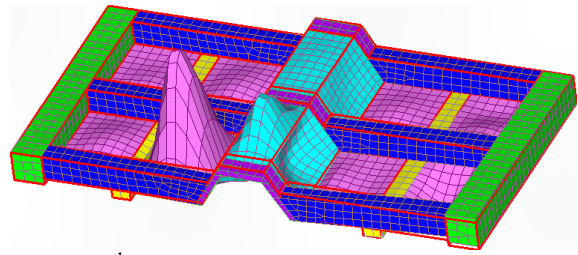
10th low spatial frequency mode (Lv. 1)



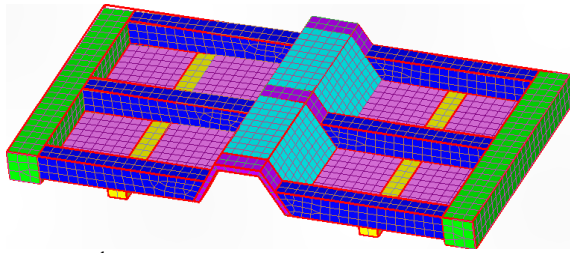
10th high spatial frequency mode (Lv. 1)



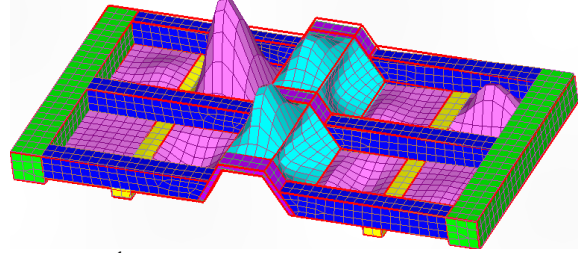
11th low spatial frequency mode (Lv. 0)



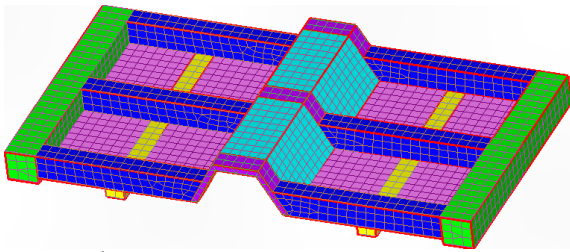
11th high spatial frequency mode (Lv. 0)



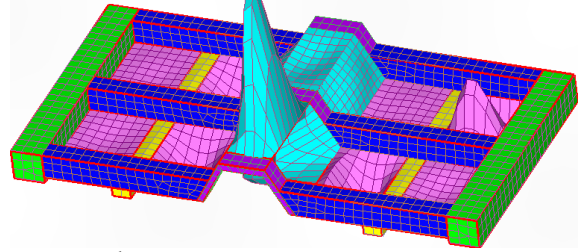
12th low spatial frequency mode (Lv. 0)



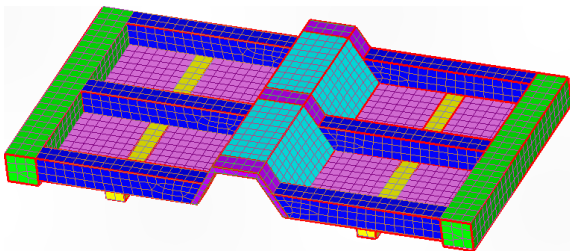
12th high spatial frequency mode (Lv. 0)



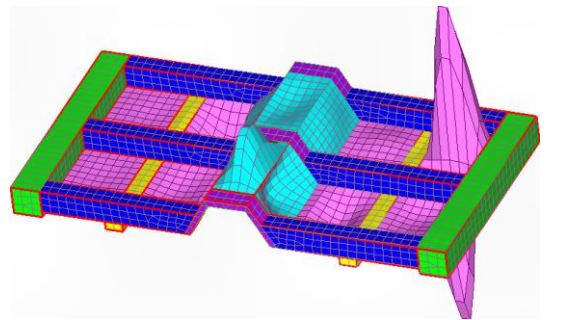
13th low spatial frequency mode (Lv. 0)



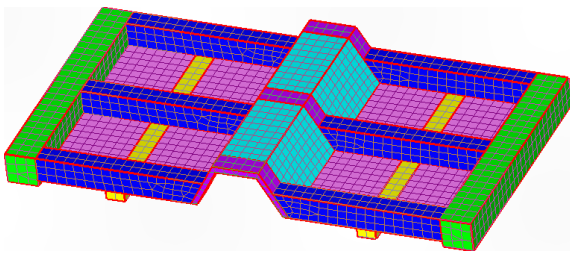
13th high spatial frequency mode (Lv. 0)



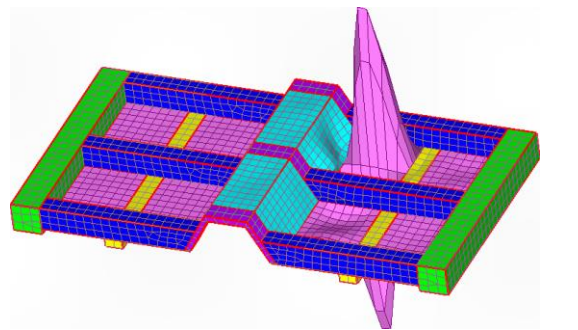
14th low spatial frequency mode (Lv. 0)



14th high spatial frequency mode (Lv. 0)



15th low spatial frequency mode (Lv. 0)



15th high spatial frequency mode (Lv. 0)

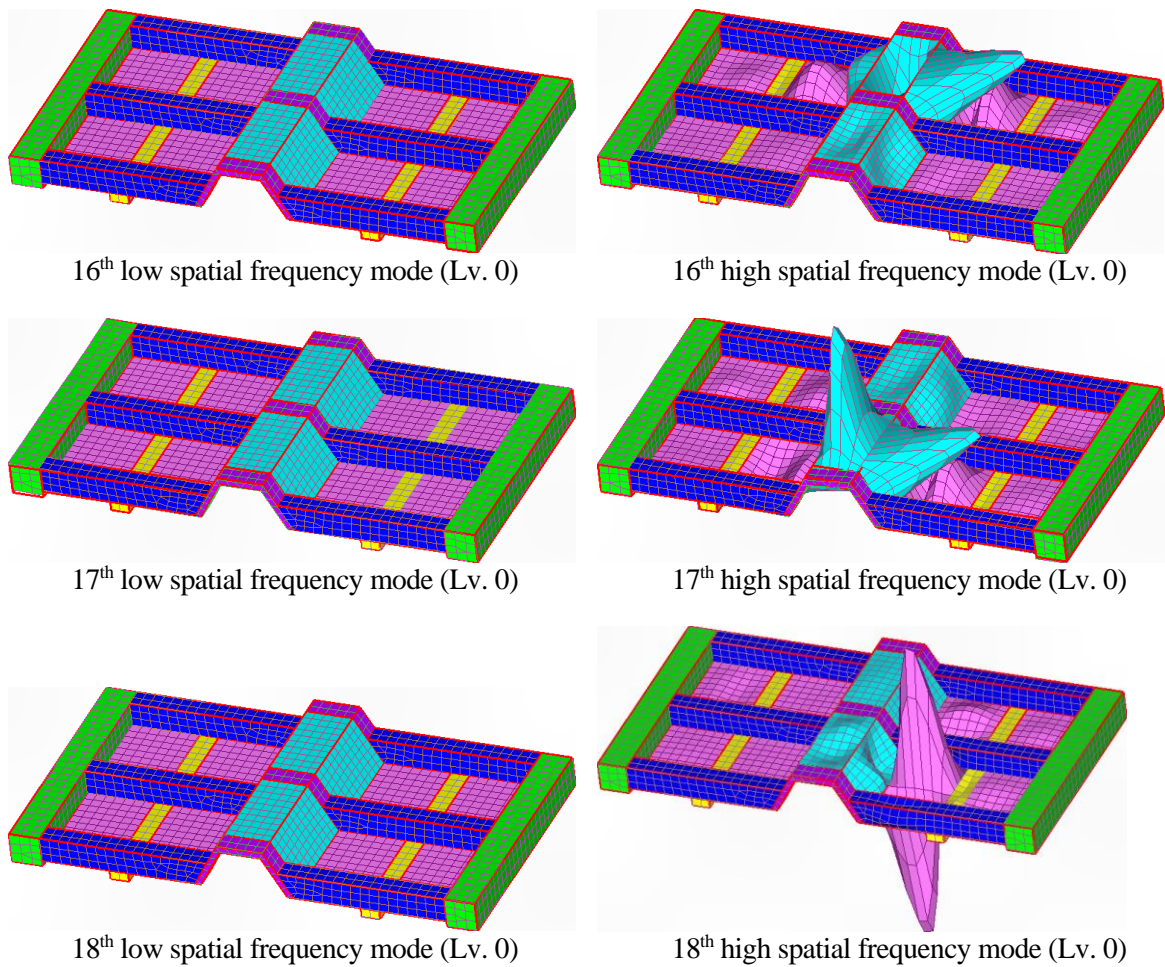


Fig. 4.8 Low spatial frequency mode shapes and high spatial frequency mode shapes derived by proposed mode separation method using 3D-DWT.

図 4.8 から、本手法によって低周波数モードに構造全体振動を、高周波数モードに局部振動を分離できた。また、図 4.7 および表 4.1 から、 J が大きく $N - J$ が小さい、すなわち解像度が粗い分解レベルで局部振動と構造全体振動が分離されていることが確認できる。

第5章 直交変換を用いた構成要素モード分解と固有モードにおける連成度評価

第4章で各固有モードから分離した低周波数モードおよび高周波数モードは構成要素単位の振動として整理されていない。そこで本章では低周波数モードおよび高周波数モードからモデルの主系および従系単体の主要な振動モードである主系モードと従系モードに分解する方法について述べる。本研究では主系モードと従系モードを合わせて構成要素モードと呼び、これらを導出する過程を構成要素モード分解と呼ぶ。構成要素モード分解は主系モードの抽出と従系モードの抽出の2段階プロセスで行う。また、構成要素モード分解のプロセスを基に、各固有モードにおいて各構成要素モードがどの程度含まれるのかを簡便に分析する方法について述べる。

5.1 主系モードの抽出

本節では、各固有モードから分離した低周波数モード同士で適切な重み付けをした加減算によって類似の振動形状を集約し、主要な振動形状を抽出する方法について述べる。

まず、図5.1に示す2次低周波数モードと3次低周波数モードを用いて本手法の概要を説明する。なお、図5.1の2次低周波数モードおよび3次低周波数モードは図4.8のものと同じである。図5.1から、2次低周波数モードと3次低周波数モードはどちらも類似の構造全体振動形状を有している。このことから、この二つの低周波数モードを足し合わせることでこの類似の構造全体振動を大きくし、逆に一方からもう一方を差し引くことで構造全体振動を小さくすることができる。この二つの計算を直交変換によって一度に行う。直交変換の式は次のように表される。

$$[\mathbf{X}'_L(p) \ \mathbf{X}'_L(q)] = [\mathbf{X}_L(p) \ \mathbf{X}_L(q)] \begin{bmatrix} \alpha & -\sqrt{1-\alpha^2} \\ \sqrt{1-\alpha^2} & \alpha \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

式(5-1)では p 次と q 次の低周波数モードからなる行列 $[\mathbf{X}_L(p) \ \mathbf{X}_L(q)]$ に対して α ($-1 < \alpha < 1$)をパラメータとする直交行列を右から乗じて新たなモード $\mathbf{X}'_L(p), \mathbf{X}'_L(q)$ を定義する。適切な直交変換を行うことで、直交変換後のモードの一方に構造全体振動を集約し、もう一方から排除する。例として、図5.1の二つの低周波数モードに対して式(5-1)で $\alpha = 0.5$ として直交変換を行った結果得られたモードを図5.2に示す。このように、類似の振動形状を持つ二つのモードに対して適切なパラメータを用いて直交変換を行うことで、類似の振動形状を集約、排除したモードを得ることができる。

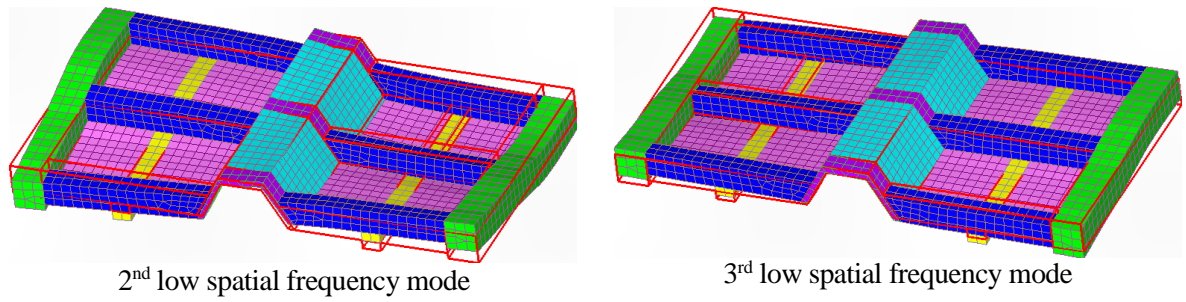


Fig. 5.1 2nd and 3rd low spatial frequency mode shapes for demonstration example of decomposing to main component mode.

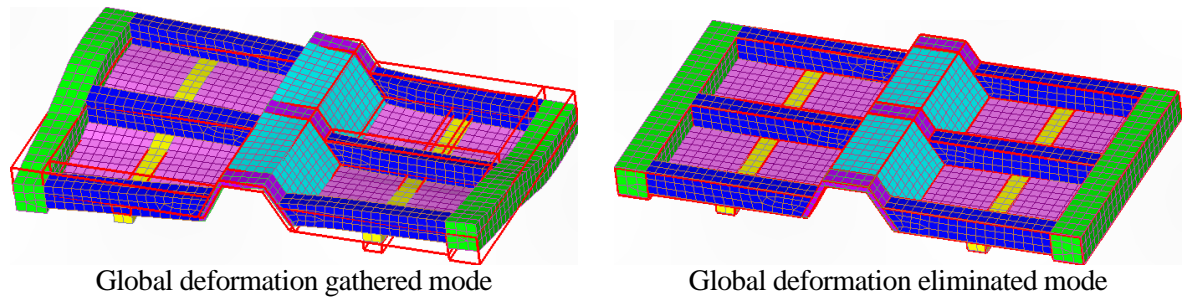


Fig. 5.2 New mode shapes derived by orthogonal transform of 2nd and 3rd low spatial frequency modes, with their global deformation gathered and eliminated at the same time.

各低周波数モードに対して、以下の方法で直交変換を行う。

まず、全ての低周波数モード同士に対して以下に示す指標を用いて形状相関を評価する。

$$rel_L(p, q) = |\mathbf{X}_L(p)^T \mathbf{M} \mathbf{X}_L(q)| \quad (5-2)$$

式 (5-2) は p 次および q 次低周波数モード同士の相関を表す。式 (5-2) では分解レベル $N - J$ の表記は省略しており、以降同様である。式 (5-2) の相関値は二つの低周波数モードの振幅が大きく、かつ振動形状が類似の場合のみ高くなるのに対し、どちらか一方の振幅が小さい、あるいは形状が類似でない場合は低くなる。そこで、適当な閾値を設定し、式 (5-2) の相関値が高い組み合わせを選別する。選別されたペアに対して直交変換による重み付き加減算を行い、一方のモードに振動を集約し、もう一方から排除する。この直交変換に用いるパラメータ α を次のように決定する。

適切な直交変換後のモードでは、一方は構造全体振動が存在し、もう一方では振幅が 0 になるのが理想的である。このことから、式 (5-1) における直交変換後のモード $\mathbf{X}'_L(p), \mathbf{X}'_L(q)$ の形状相関が 0 となるパラメータ α を次式から求める。

$$\mathbf{X}'_L(p)^T \mathbf{M} \mathbf{X}'_L(q) = \alpha \sqrt{1-\alpha^2} (rel_L(q,q) - rel_L(p,p)) - (1-2\alpha^2) rel_L(p,q) = 0 \quad (5-3)$$

式 (5-3) を α について解くと, $p \neq q$ で α は二つの実解を得るが, どちらを採用しても式 (5-1) の $\mathbf{X}'_L(p), \mathbf{X}'_L(q)$ が入れ替わるだけで分離結果は変わらない. これを以下に示す. まず, 式 (5-3) の方程式は次のように変形できる.

$$\alpha \sqrt{1-\alpha^2} (rel_L(q,q) - rel_L(p,p)) = (1-2\alpha^2) rel_L(p,q) \quad (5-4)$$

式 (5-4) で, 例えば $(rel_L(q,q) - rel_L(p,p)) rel_L(p,q) > 0$ のとき ($rel_L(q,q) - rel_L(p,p)$ と $rel_L(p,q)$ が同符号のとき), α は以下の二つの実解を得る.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(rel_L(p,p) - rel_L(q,q))^2}{(rel_L(p,p) - rel_L(q,q))^2 + rel_L(p,q)^2}}} \\ \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(rel_L(p,p) - rel_L(q,q))^2}{(rel_L(p,p) - rel_L(q,q))^2 + rel_L(p,q)^2}}} \end{cases} \quad (5-5)$$

式 (5-5) の α_1 と α_2 の間には $\alpha_2 = -\sqrt{1-\alpha_1^2}$ が成り立つため, 式 (5-1) の直交行列に着目すると次の関係が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\sqrt{1-\alpha_2^2} \\ \sqrt{1-\alpha_2^2} & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\alpha_1^2} & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & -\sqrt{1-\alpha_1^2} \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

式 (5-6) 右辺の直交行列 (α_1 の直交行列) と式 (5-1) の直交行列を比較すると, 1 行目と 2 行目が入れ替わり, 入れ替わった後の 2 行目の符号が逆転しているだけであるため, 直交変換後の形状は α_1 と α_2 のどちらのパラメータを採用しても分離結果は変形の向きが逆転するだけで, 実質的に変わらないことがわかる. これは $(rel_L(q,q) - rel_L(p,p)) rel_L(p,q) < 0$ のとき ($rel_L(q,q) - rel_L(p,p)$ と $rel_L(p,q)$ が異符号のとき) も同様である.

全ての低周波数モードにおいて式 (5-2) で一定の値以上の相関を持つ組み合わせに対して式 (5-4) を解いて求めたパラメータで直交変換を行い, 変換前のモード $\mathbf{X}_L(p), \mathbf{X}_L(q)$ を変換後のモード $\mathbf{X}'_L(p), \mathbf{X}'_L(q)$ に置き換えて再び全ての低周波数モードの組み合わせで式 (5-2) の相関値を求める. すべての低周波数モードの組み合わせで式 (5-2) の相関値が閾値以下になるまでこの操作を繰り返すことで, 形状が類似する構造全体振動を集約する. この操作を終えた後の低周波数

モードを集めた行列を \mathbf{X}'_L とおき, \mathbf{X}'_L の $p=1\sim 18$ 次各低周波数モードの大きさを次式に示す, モデルの質量行列 \mathbf{M} を介した二次形式 $E_L(p)$ を指標としてエネルギー的に評価する.

$$E_L(p) = \mathbf{X}'_L(p)^T \mathbf{M} \mathbf{X}'_L(p) \quad (5-7)$$

式(5-7)から求まる $E_L(1)\sim E_L(18)$ に対してクラスタリングを行い, 主要な構造全体振動を有し, 振幅が大きいモード群と, 構造全体振動をほとんど持たず, 振幅が 0 に近いモード群の二つのクラスタに分類する. これにより, 主要な構造全体振動を有するモードを主系モードとして選別する. 本研究では式(5-2)の相関値の閾値を 0.1 として直交変換を行い, 直交変換後の $E_L(1)\sim E_L(18)$ に対して k-means++法によるクラスタリングを行った. その結果を図 5.3 に示す. 図 5.3 ではクラスタ数を 2 としてクラスタリングを行った結果, 振幅が大きいと自動的に判別されたモードを橙色, 振幅が小さいと判別されたモードを青色で示している. 図 5.3 から, 18 個の低周波数モードから振幅が 0 に近い 15 個のモードが除かれ, 主要な構造全体振動を有する 3 個の主系モードが定量的に選別された. 得られた主系モードを低次から順に図 5.4 に示す.

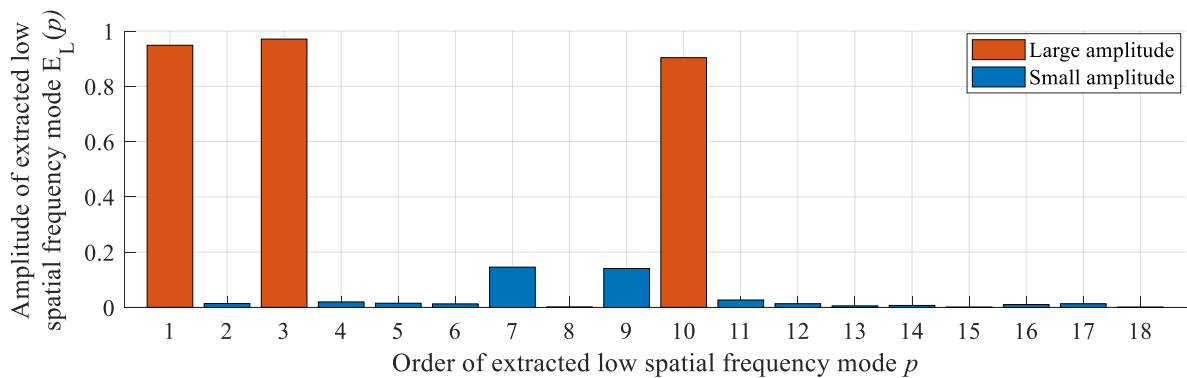


Fig. 5.3 Modal kinetic energy of orthogonalized low spatial frequency modes. Orange bars show the modes which global deformations are gathered, whereas blue bars show the modes which global deformations are eliminated by orthogonal transform.

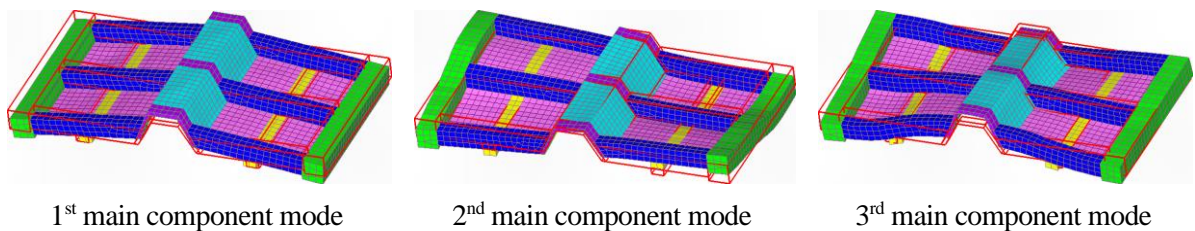


Fig. 5.4 Main component modes. Main component modes represent primal global deformations.

5.2 従系モードの抽出

本節では主系モードの抽出と同様に、直交変換によって各高周波数モードから個別の部材の局部振動を抽出する。本手法でははじめに局部振動が存在する領域（以下、局部振動領域）を特定し、次に特定した領域ごとに全ての高周波数モードで相関を取り、直交変換を行う。本節では二通りの方法で局部振動領域の特定を行う。5.2.1 項では k-means 法を用いた方法、5.2.2 項では DBSCAN（Density-based spatial clustering of application with noise）と呼ばれるクラスタリング手法を用いた方法について説明する。また、それぞれの方法で特定した局部振動領域を基にした従系モードの抽出について 5.2.3 項で述べる。

5.2.1 k-means 法を用いた局部振動領域の特定

局部振動領域を特定するにあたり、まず $p=1\sim 18$ 次の各高周波数モードにおいてモデルの各ノードが持つ変位の大きさを次式に示す質量行列 M を介した二次形式で求める。

$$e_i(p) = \mathbf{X}_{i,H}(p)^T M \mathbf{X}_{i,H}(p) \quad (5-8)$$

式 (5-8) の $\mathbf{X}_{i,H}(p)$ は p 次の高周波数モード $\mathbf{X}_H(p)$ のうち、モデルの i 番目ノードの 6 自由度分の変位のみを残し、他のノードの変位を $\mathbf{0}$ としたベクトルであり、 $e_i(p)$ はモデルの i 番目ノードが持つ変位の大きさをエネルギー的に表したものである。モデルの全てのノードで $e_i(p)$ を求め、 $e_i(p)$ を並べた配列を $\mathbf{e}(p)$ とおく。

ここで、局部振動領域を特定する前に、1 次高周波数モード（図 4.7）のように局部振動がほとんど存在しないモードを先に排除する。これには式 (4-25) に示したシャノンエントロピー H を指標に用いる。

式 (4-25) で、配列 $\mathbf{e}(p)$ のシャノンエントロピー $H(\mathbf{e}(p))$ は、 $\mathbf{e}(p)$ 内に外れ値が存在する場合に低い値を取り、逆に配列内要素が全て同程度の値であれば高い値を取る。したがって、局部振動を持つ高周波数モードでは値が低くなり、局部振動を持たない高周波数モードでは値が高くなるため、k-means 法によるクラスタリングによって局部振動を持たない高周波数モードを自動的に排除できる。各高周波数モードで $H(\mathbf{e}(p))$ を計算した結果を図 5.5 に示す。k-means 法によって $H(\mathbf{e}(p))$ が大きいと判別されたモードは図 5.5 に橙色で示した 1 次モードのみが該当した。この結果から、1 次の高周波数モードには局部振動がほとんどないと自動的に判別されたため、以降の検討ではこのモードを排除する。

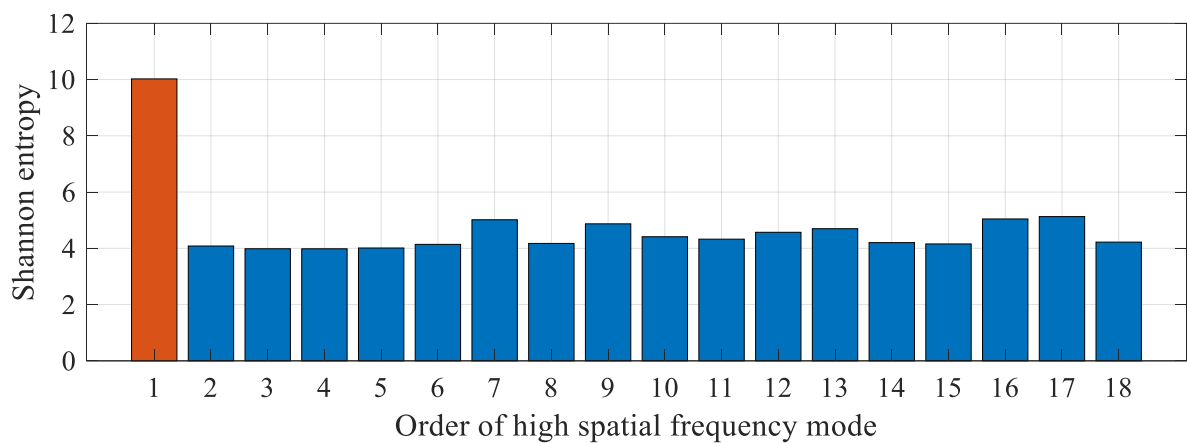


Fig. 5.5 Shannon entropy of each high spatial frequency mode. It is assumed that 1st mode does not have local vibration due to its higher value.

局所振動を持つと判別された 2~18 次モードの各高周波数モードを対象に、先に求めた配列 $e(p)$ の要素に対して **k-means** 法によるクラスタリングを行い、振幅が大きいノードを特定する。各高周波数モードにおいて振幅が大きいと判別されたノードを図 5.6 に示す。

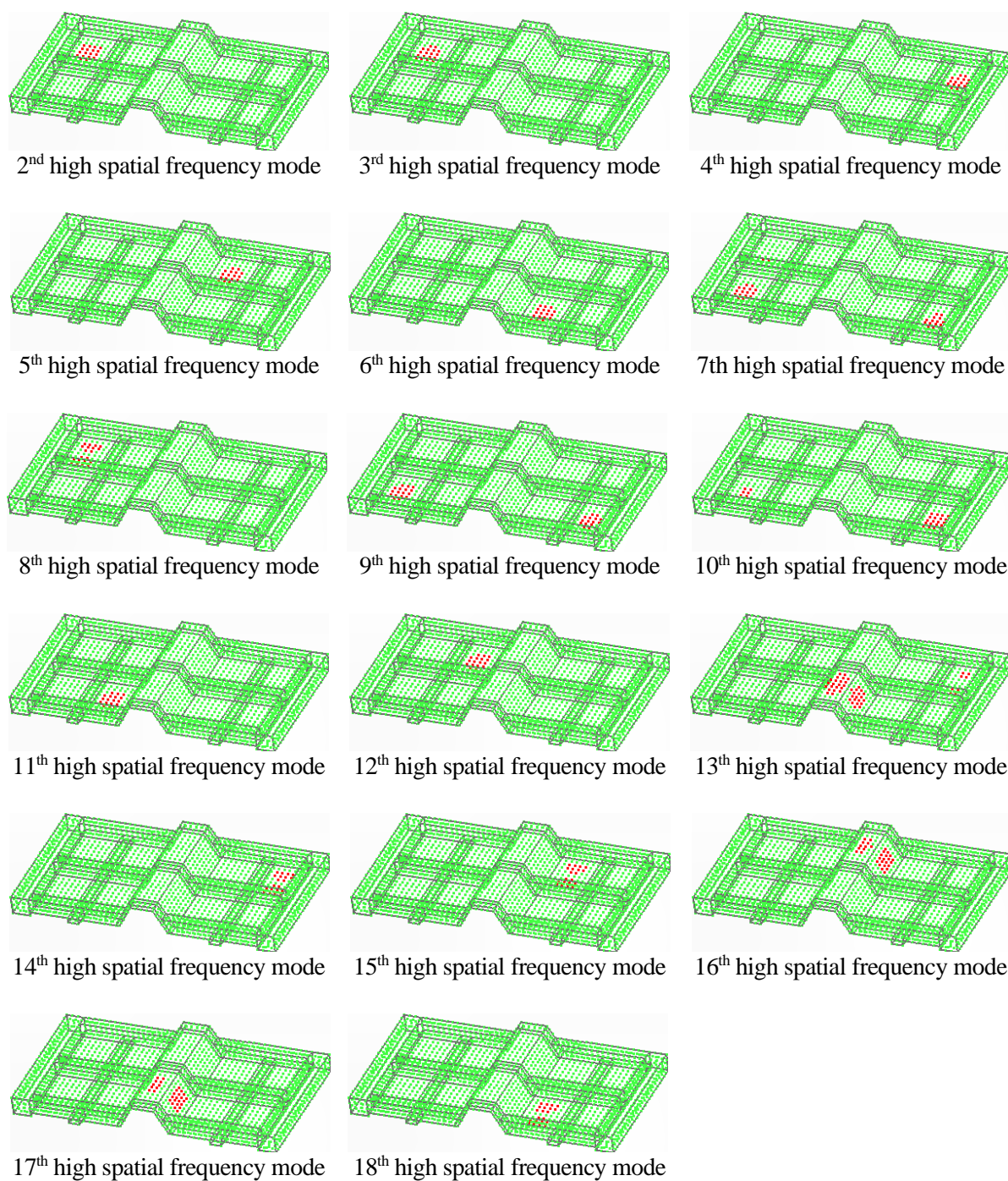


Fig. 5.6 Result of applying k-means clustering to array e of each high spatial frequency mode.

次に、各高周波数モードで特定したノードを合算し、モデル上でエレメントを介して隣接するノード同士を自動的にまとめてグループ化する。これにより得られた 13 個の各グループを局部振動が存在する局部振動領域とし、図 5.7 に赤色で示す。

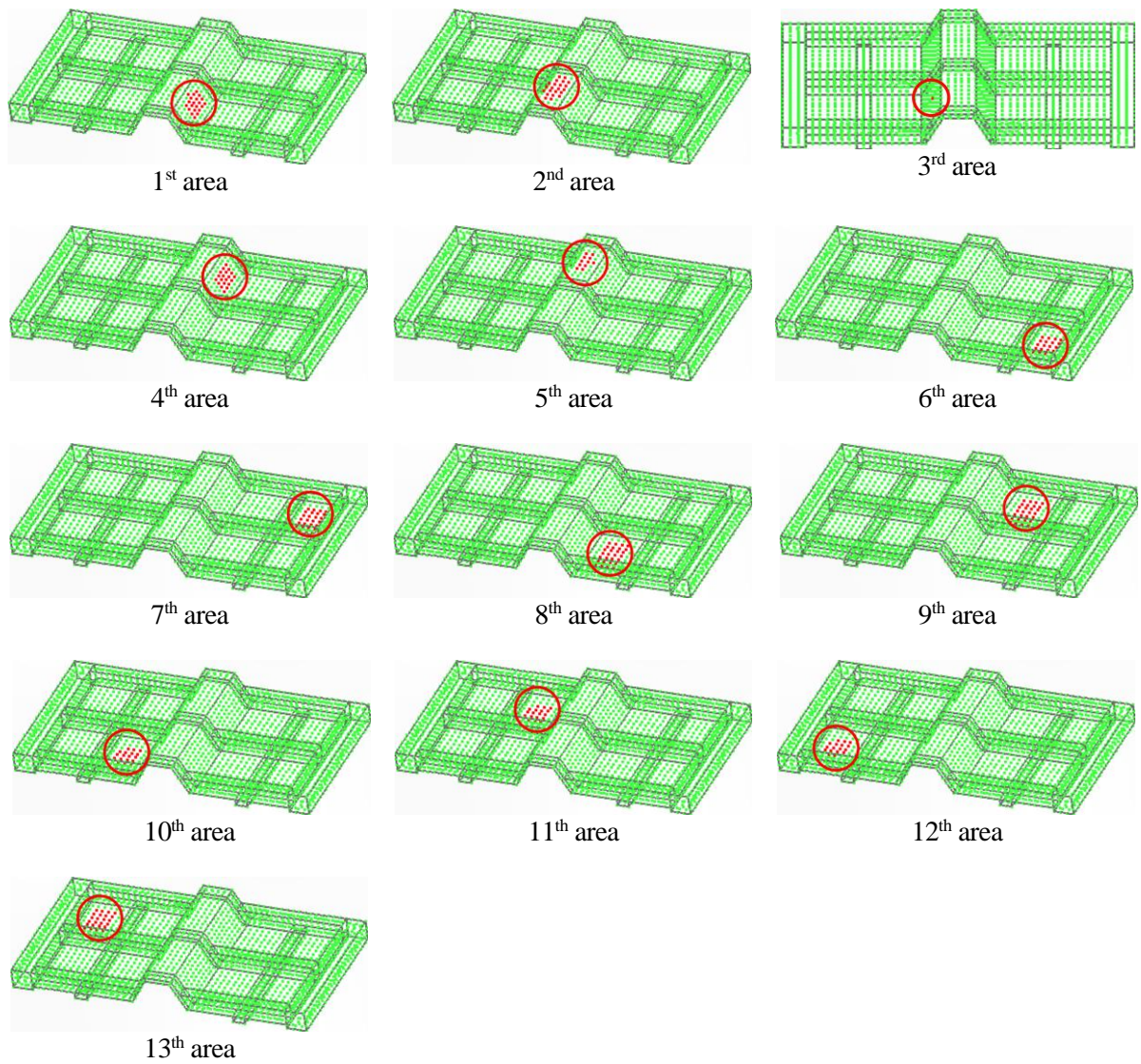


Fig. 5.7 Local vibration areas. These areas are determined by grouping nodes which have large amplitude, evaluated in energetic point of view.

5.2.2 DBSCAN を用いた局部振動領域の特定

前項では、局部振動領域を特定するにあたり、局部振動を持たない1次高周波数モードをあらかじめ省くプロセスを導入していた。これは、k-means 法によるクラスタリングではあらかじめ決められたクラスタ数に分類するため、局部振動を持たない高周波数モードに適用すると無理やり2つのクラスタに分類し、本来ないはずの局部振動領域を作り出してしまふからである。そこで、5.2.1 項の式 (5-8) を用いて各高周波数モードから得られる配列 $e(p)$ に対し、本項では DBSCAN (付録 E) (85) によるクラスタリングを行い、振幅が大きいノードの集合を局部振動領域として特定する。DBSCAN とは密度準拠のクラスタリング手法であり、k-means 法のようにあらかじめクラスタ数を設定する必要がなく、データに応じてクラスタ数が増える。例えば図の1次高周波数モードのように、局部振動を持たず振幅が一様に小さいモードの $e(p)$ では単一のクラスタのみが形成され、他の局部振動を有する高周波数モードでは複数のクラスタが形成されることから、本手法を用いて局部振動を有するか否かの判別と、局部振動を有する場合は振幅の大きいノードの特定を同時に行うことができる。

式 (5-8) で求めた $e(p)$ に対して DBSCAN によるクラスタリングを行う。ここで、DBSCAN はクラスタリングにあたり、距離の閾値 (Eps) と対象数の閾値 ($MinPts$) の二つの閾値を必要とする。本研究では Eps は配列 $e(p)$ の標準偏差とし、 $MinPts$ は Ester らが用いた数値である 4 とした。 $p=1\sim 18$ 次高周波数モードの配列 $e(p)$ に DBSCAN を適用した結果、最大で6つのクラスタとノイズが作成された。DBSCAN によるクラスタリング結果を図 5.8 に示す。図 5.8 では、 $e(p)$ 内で値が最も小さいノード群が分類されるクラスタ 1 を緑色、クラスタ 2 を水色、クラスタ 3 を青色、クラスタ 4 を紫色、クラスタ 5 を赤色、クラスタ 6 を濃い赤色、ノイズを黒色で示している。

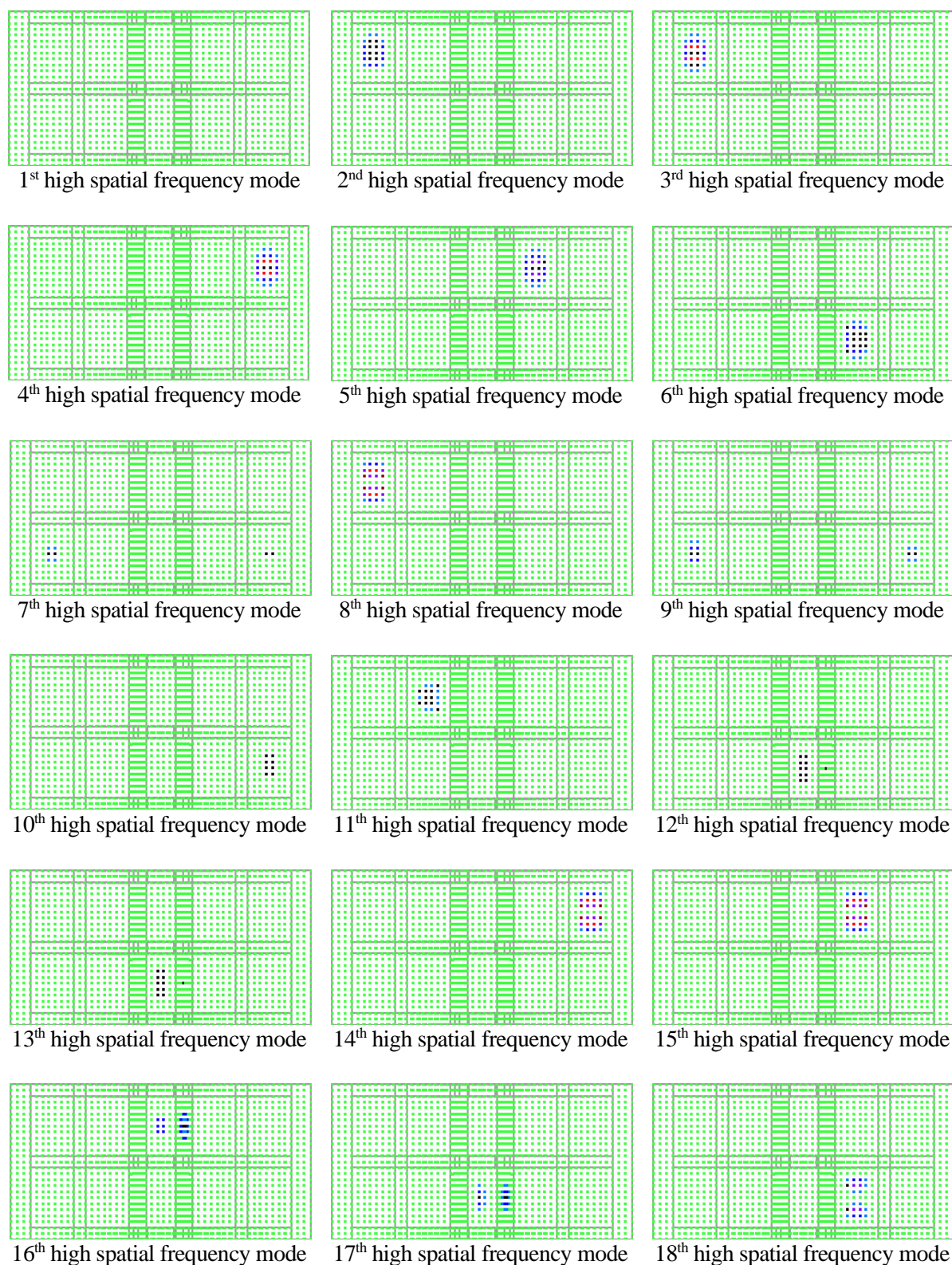


Fig. 5.8 Result of applying DBSCAN clustering to array e of each high spatial frequency mode (Green: cluster 1, light blue: cluster 2, blue: cluster 3, purple: cluster 4, red: cluster 5, dark red: cluster 6, black: noise).

図 5.8 から、局部振動を持たない 1 次高周波数モードでは全てのノードがクラスタ 1 に分類され、その他の局部振動を持つ高周波数モードでは局部振動の現れる部位のノードがクラスタ 2 以上あるいはノイズに分類された。以上の結果から、クラスタ 1 以外のクラスタまたはノイズに分類されたノードを局部振動領域に含まれるノードとして選択する。このとき、1 次高周波数モードのように全てのノードがクラスタ 1 に分類される場合は局部振動がないとみなす。図 5.7 と同様に、各高周波数モードで局部振動領域に含まれる全てのノードを合算し、モデル上でエレメントを介して隣接するノード同士を自動的にまとめてグループ化する。これにより得られた 12 個の各グループを局部振動が存在する局部振動領域とし、図 5.9 に赤色で示す。

ここで、図 5.7 の k-means 法による結果と図 5.9 の DBSCAN による結果を比較すると、図 5.7 の 3 番目の領域が図 5.9 では得られなかったため、局部振動領域の個数が異なっている。

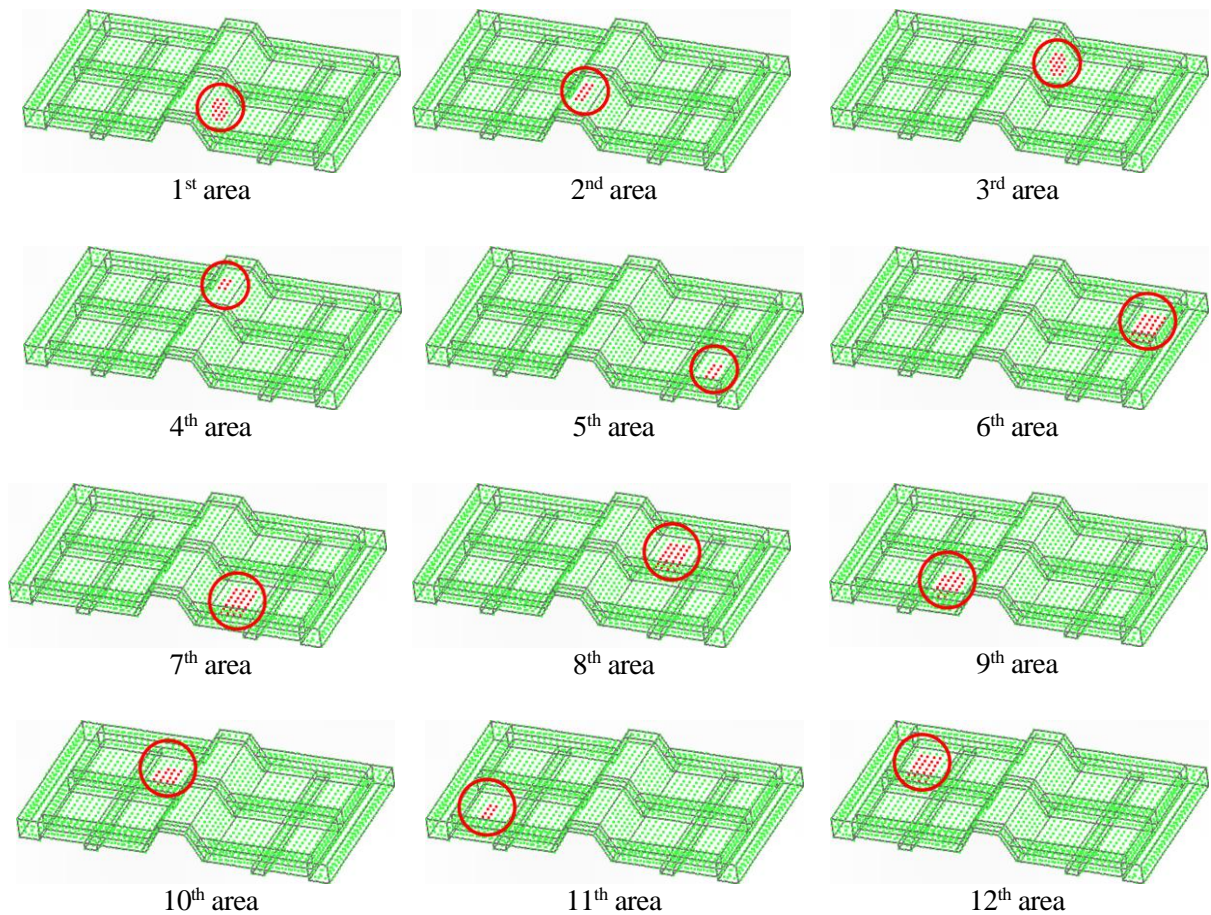


Fig. 5.9 Local vibration areas determined by DBSCAN.

5.2.3 特定した局部振動領域に基づく従系モードの抽出

5.2.1 項の図 5.7 および 5.2.2 項の図 5.9 に示す各局部振動領域における高周波数モード同士の形状相関を次式に示す指標を用いて評価する。

$$rel_{c,H}(p,q) = |\mathbf{X}_{c,H}(p)^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{c,H}(q)| \quad (5-9)$$

式 (5-9) の下添え字 c は図 5.7 および図 5.9 に示した各局部振動領域を表し、 $\mathbf{X}_{c,H}(p)$ は p 次の高周波数モードで c 番目の領域に対応する変位のみを残し、それ以外の変位を 0 としたベクトルである。5.1 節と同様に、式 (5-9) の相関値は c 番目の領域において二つの高周波数モードの振幅が大きく、かつ形状が類似する場合のみ大きな値を取る。各領域で p をそれぞれ 2~18 次まで逐次変化させ、相関値が閾値以上のモードのペアに対して 5.1 節と同様に直交変換を行い、類似の振動形状を一方のモードに集約する。この操作をペアが選択されなくなるまで全ての局部振動領域および高周波数モードで行う。その結果、類似の振動形状が集約、排除された直交変換後の高周波数モード行列 \mathbf{X}'_H を得る。 \mathbf{X}'_H に対し、式 (5-7) による主系モードの選別と同様に振幅の大きさをエネルギー的に評価し、k-means 法によって主要な局部振動を有する従系モードを選別する。図 5.7 の局部振動領域において、相関値の閾値を 0.15 として直交変換を行った後の高周波数モードにおける振幅の大きさをエネルギー的に表したものを図 5.10 に示す。図 5.10 中の棒グラフでは k-means 法によって重心の値が高いクラスタに分類されたものを橙色、重心の値が低いクラスタに分類されたものを青色で示している。この結果、18 個の高周波数モードから 15 個の従系モードが得られた。得られた従系モードを低次から順に図 5.11 に示す。

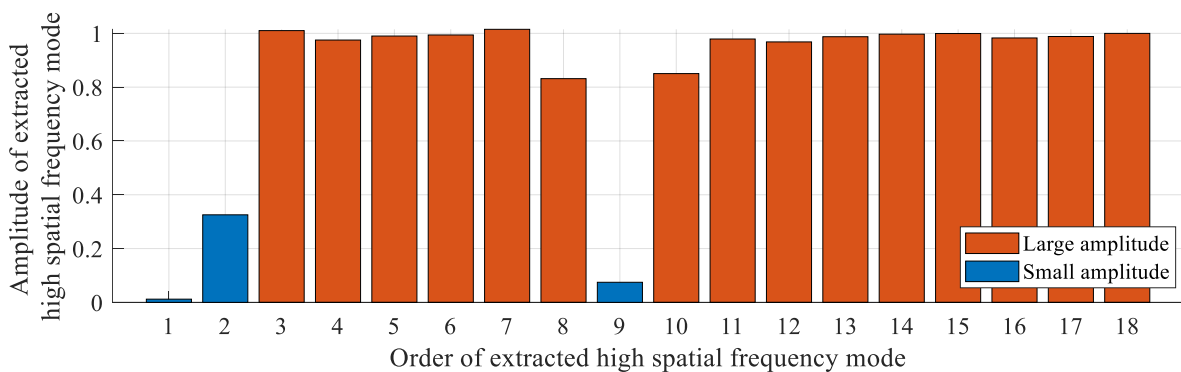


Fig. 5.10 Amplitude of each orthogonalized high spatial frequency modes evaluated energetically. Orange graph shows the modes which is automatically grouped as high-amplitude modes by means of k-means clustering, blue group as vice versa.

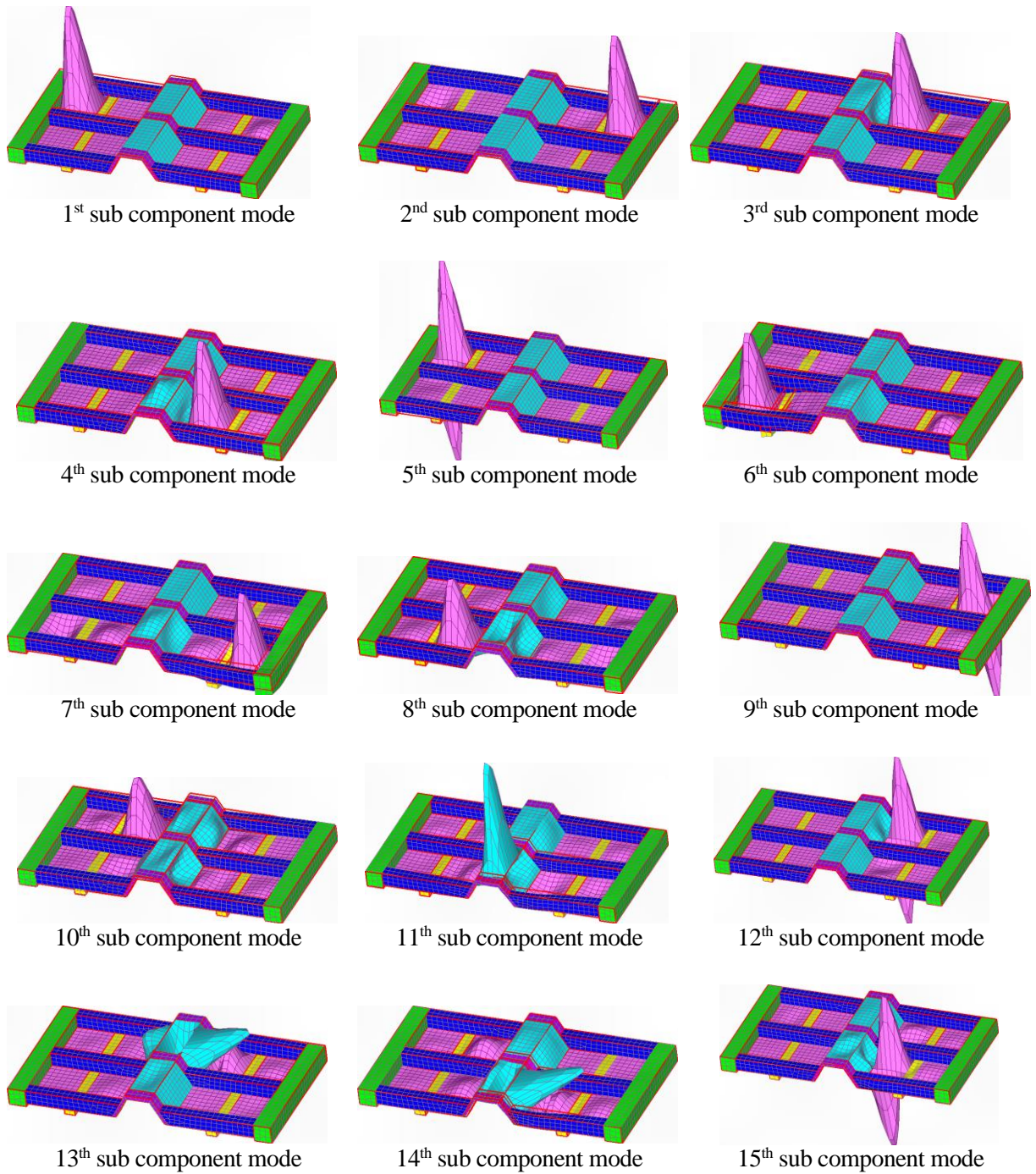


Fig. 5.11 Sub component modes derived from high spatial frequency modes by means of proposed mode decomposition method using k-means clustering.

次に、図 5.9 の局部振動領域において、相関値の閾値を 0.07 として直交変換を行った後の高周波数モードにおける振幅の大きさをエネルギー的に表したものを図 5.12 に示す。図 5.12 中の棒グラフでは図 5.10 と同様に k-means 法によって重心の値が高いクラスタに分類されたものを橙色、重心の値が低いクラスタに分類されたものを青色で示している。この結果、図 5.9 の局部振動領域の結果と同様に 18 個の高周波数モードから 15 個の従系モードが得られた。得られた従系モードを低次から順に図 5.13 に示す。図 5.10 と図 5.12 でグラフ形状に若干の差異はあるものの、図 5.11 および図 5.13 を見ると結果として 5.2.1 項と 5.2.2 項のどちらの局部振動領域を用いても同様な形をした従系モードが得られた。以降は 5.2.1 項の方法、すなわち図 5.11 に示す従系モードを用いて本論文を進める。

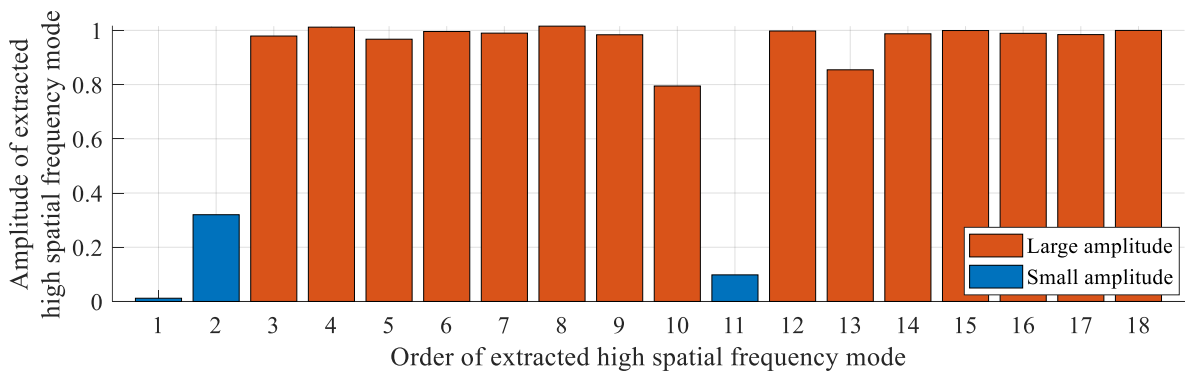


Fig. 5.12 Amplitude of each orthogonalized high spatial frequency modes evaluated energetically. Same as Fig. 5.9, Orange graph shows the modes which is automatically grouped as high-amplitude modes by means of k-means clustering, blue group as vice versa.

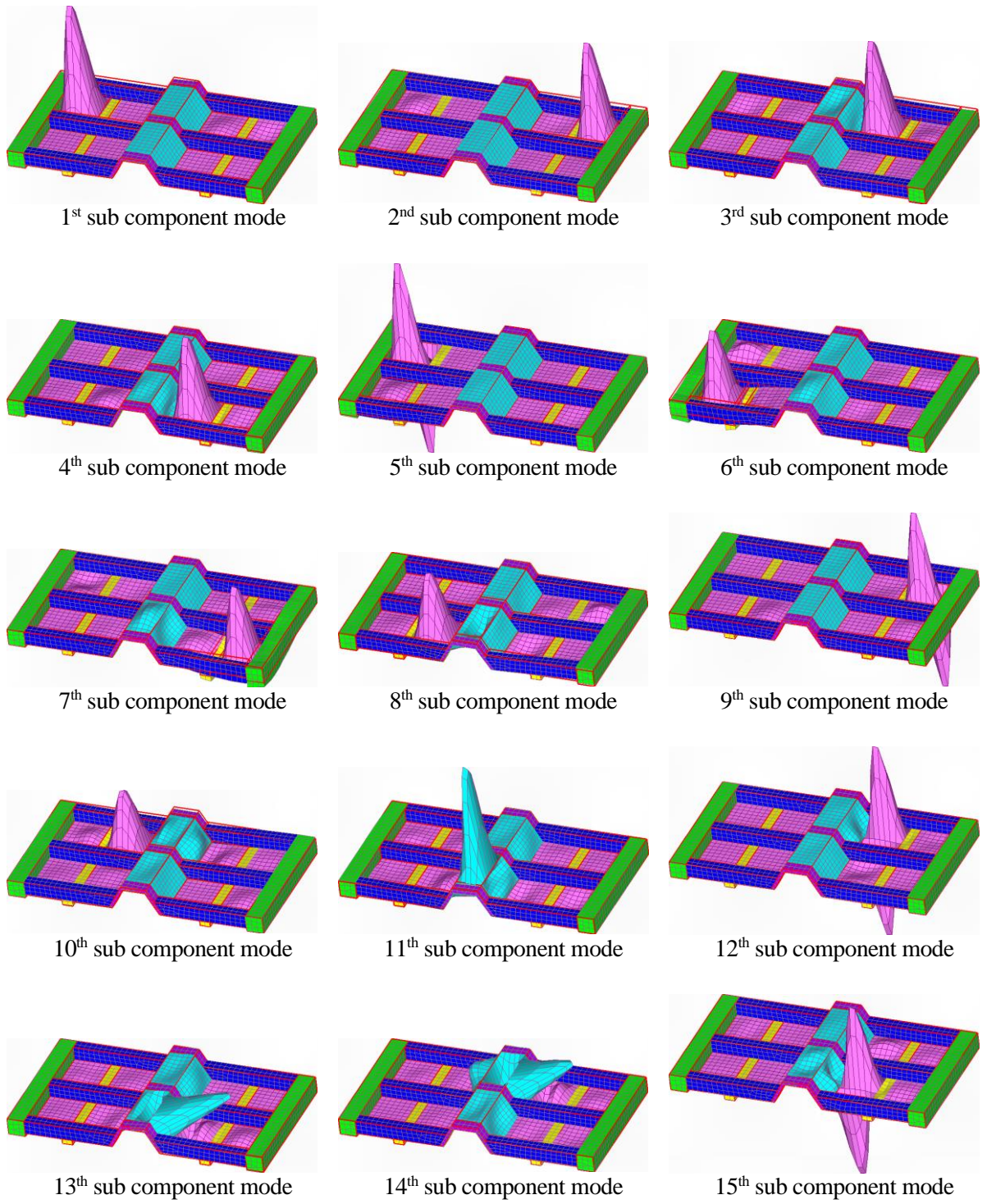


Fig. 5.13 Sub component modes derived from high spatial frequency modes by means of proposed mode decomposition method using DBSCAN.

5.3 固有モードの連成度評価

4章および5.1節, 5.2節によって, 固有モードから主系及び従系の各構成要素モードを分解, 抽出した. 本節ではこれらの結果およびプロセスを用いて, 各固有モードにおいてどの構成要素モードがどの程度含まれるのかを効率的に分析する方法を述べる. まず, 三次元離散ウェーブレット変換を用いて固有モード行列 \mathbf{X} を低周波数モード行列と高周波数モード \mathbf{X}_H に分離した. これを次式で表す.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}_L + \mathbf{X}_H \\ (\mathbf{X} &= [\mathbf{X}(1) \cdots \mathbf{X}(18)], \quad \mathbf{X}_L = [\mathbf{X}_L(1) \cdots \mathbf{X}_L(18)], \quad \mathbf{X}_H = [\mathbf{X}_H(1) \cdots \mathbf{X}_H(18)]) \end{aligned} \quad (5-10)$$

5・1節および5・2節から, \mathbf{X}_L および \mathbf{X}_H と, $[\mathbf{X}_L \quad \mathbf{X}_H]$ の直交変換によって構造全体振動および局部振動が集約, 排除されたモード行列 $[\mathbf{X}'_L \quad \mathbf{X}'_H]$ との間には次式の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_L = \mathbf{X}_L \mathbf{A}_L & \Leftrightarrow \mathbf{X}_L = \mathbf{X}'_L \mathbf{A}_L^T \\ \mathbf{X}'_H = \mathbf{X}_H \mathbf{A}_H & \Leftrightarrow \mathbf{X}_H = \mathbf{X}'_H \mathbf{A}_H^T \end{cases} \quad (5-11)$$

ここで, 式 (5-11) の行列 $\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_H$ は変換行列であり, \mathbf{X}_L と \mathbf{X}_H の直交変換で用いた直交行列をもとに算出している. 具体的には, まず式 (5-1) の 2×2 の直交行列を 18×18 に拡張する. 例として p 次と q 次モードペアの直交変換を行う直交行列を拡張する場合, 18×18 の単位行列の (p, p) 要素を α , (p, q) 要素を $-\sqrt{1-\alpha^2}$, (q, p) 要素を $\sqrt{1-\alpha^2}$, (q, q) 要素を α とすることで 18×18 のサイズに拡張する. 次に拡張した直交行列を直交変換が行われた順に右から乗じることで, 複数の直交行列を一つにまとめた変換行列 $\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_H$ を算出する. ここで, $\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_H$ はともに直交行列であるため, 式 (5-11) の右側のように変形できる. 式 (5-11) で $\mathbf{X}'_L, \mathbf{X}'_H$ は \mathbf{X}_L と \mathbf{X}_H にそれぞれ直交行列 $\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_H$ を右から乗じた形で表され, 同様に $\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_H$ の転置行列 $\mathbf{A}_L^T, \mathbf{A}_H^T$ によって \mathbf{X}_L と \mathbf{X}_H は $\mathbf{X}'_L, \mathbf{X}'_H$ の直交変換の形で表される. ここで, $\mathbf{X}'_L, \mathbf{X}'_H$ のうち振幅が 0 に近いモードを排除し, 主要な振動形状を有する主系モードおよび従系モードのみを抽出して並べた行列をそれぞれ $\mathbf{X}_{\text{main}}, \mathbf{X}_{\text{sub}}$ とおき, $\mathbf{A}_L^T, \mathbf{A}_H^T$ 内の $\mathbf{X}_{\text{main}}, \mathbf{X}_{\text{sub}}$ に関する要素のみからなる行列を $\mathbf{A}_{\text{main}}^T, \mathbf{A}_{\text{sub}}^T$ とおく. $\mathbf{X}'_L, \mathbf{X}'_H$ のうち, $\mathbf{X}_{\text{main}}, \mathbf{X}_{\text{sub}}$ 以外のモードは主要な振動形状をほとんど有していないとみなし, $\mathbf{X}_{\text{main}}, \mathbf{X}_{\text{sub}}$ を用いて \mathbf{X}_L と \mathbf{X}_H を次式で近似する.

$$\begin{cases} \mathbf{X}_L = \mathbf{X}'_L \mathbf{A}_L^T \approx \mathbf{X}_{\text{main}} \mathbf{A}_{\text{main}}^T \\ \mathbf{X}_H = \mathbf{X}'_H \mathbf{A}_H^T \approx \mathbf{X}_{\text{sub}} \mathbf{A}_{\text{sub}}^T \end{cases} \quad (5-12)$$

式 (5-10) および式 (5-12) から, 固有モード行列 \mathbf{X} は次式で近似できる.

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{X}_{\text{main}} \mathbf{A}_{\text{main}}^T + \mathbf{X}_{\text{sub}} \mathbf{A}_{\text{sub}}^T = [\mathbf{X}_{\text{main}} \quad \mathbf{X}_{\text{sub}}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{main}}^T \\ \mathbf{A}_{\text{sub}}^T \end{bmatrix} = [\mathbf{X}_{\text{main}} \quad \mathbf{X}_{\text{sub}}] \mathbf{A} \quad (5-13)$$

式 (5-13) は固有モードを主系モードと従系モードの線形結合で表しており、 \mathbf{A} はその係数行列である。すなわち、この \mathbf{A} の要素に着目することで各固有モードに各主系モードと従系モードがどの程度の割合で含まれるかを定量的に把握できる。 \mathbf{A} の各要素の絶対値をカラーマップで表したものを図 5.14 に示す。図 5.14 の横軸は固有モードの次数に対応し、縦軸は上から 1~3 次主系モード (m1~m3)、1~15 次従系モード (s1~s15) に対応する。したがって、行列 \mathbf{A} を列ごとに見れば、各固有モードがどの構成要素振動をどの程度保有するか評価できる。例として行列 \mathbf{A} の 2 列目に着目すると、2 次固有モードは主に 2 次主系モードと 1 次従系モードの振動成分を保有していることがわかる。同様に、10 列目の 10 次固有モードは 3 次主系モードと 6、7 次従系モードが連成していることがわかる。このように、固有モードの形状をつぶさに精査せずとも、本手法によって固有モードにおける各構成要素振動の保有割合を簡便かつ定量的に評価できる。

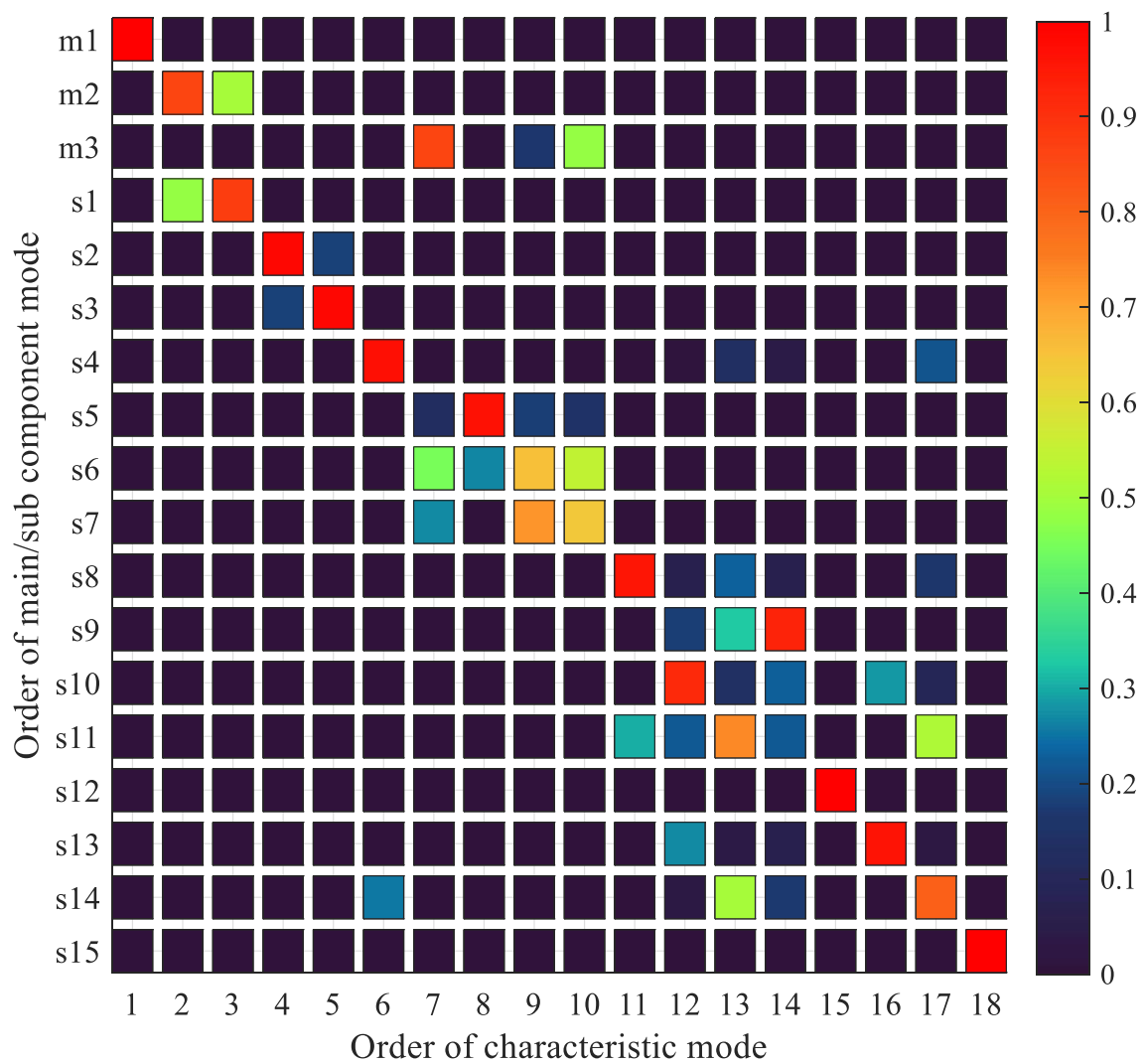


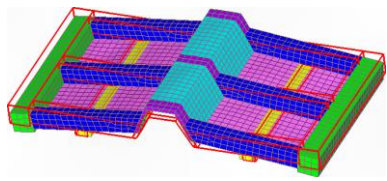
Fig. 5.14 Absolute values of each element in A matrix. Each value indicates how much the main/sub deformation is included in each characteristic mode. It is visually and quantitatively shown that 2nd main component mode is coupled with 1st sub component mode, and 3rd main component mode is coupled with 6th & 7th sub component modes as well.

5.4 構成要素モードの平滑化による振動数評価

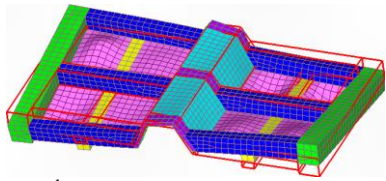
本節では主系モードと従系モードの連成について、レイリー商を用いて振動数の面から評価する。図 5.4 および図 5.13 の主系モードおよび従系モードは三次元離散ウェーブレット変換を経て分離されたため、モデル端部に三次元離散ウェーブレット変換に由来する歪みがわずかに生じている。この歪みによってレイリー商による振動数は各構成要素モードが本来持つ振動数よりも高く算出されるため、この歪みを平滑化し、離散ウェーブレット変換によるモード形状への影響を補正した上で主系モードと従系モードの振動数を評価する。具体的には、式 (5-13) の両辺に右から \mathbf{A} の逆行列 \mathbf{A}^{-1} を乗じた形で次のように固有モードの線形結合で構成要素モードを近似し、振動数が高くなる原因となる歪みを平滑化する。

$$[\mathbf{X}_{\text{main}} \quad \mathbf{X}_{\text{sub}}] \approx \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \quad (5-14)$$

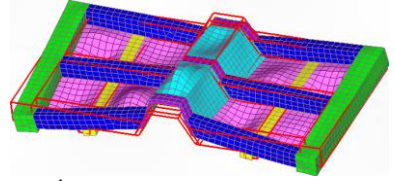
式 (5-14) で近似した構成要素モードの形状を図 5.15 に示し、レイリー商による振動数を計算した結果を表 5.1 に示す。また、固有振動数と構成要素モードの振動数を数直線上に並べたものを図 5.16 に示す。図 5.13, 図 5.16 および表 5.1 から、振動数の近い 2 次主系モードと 1 次従系モードが連成して 2 次および 3 次固有モードを構成し、同様に振動数の近い 3 次主系モードと 5 次, 6 次, 7 次従系モードが連成して 7 次~10 次固有モードを構成していることが確認できる。



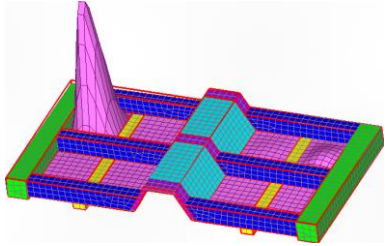
1st smoothed main comp. mode



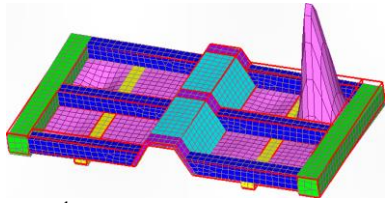
2nd smoothed main comp. mode



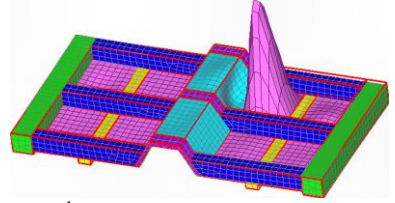
3rd smoothed main comp. mode



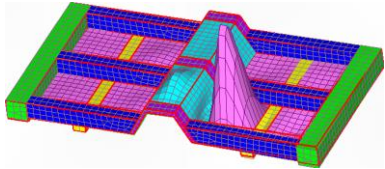
1st smoothed sub comp. mode



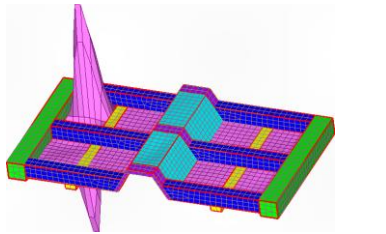
2nd smoothed sub comp. mode



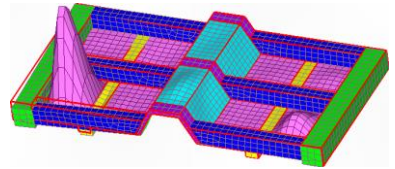
3rd smoothed sub comp. mode



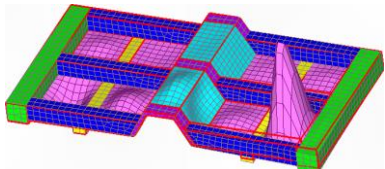
4th smoothed sub comp. mode



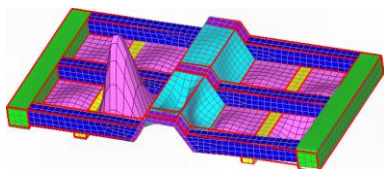
5th smoothed sub comp. mode



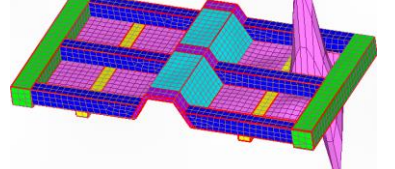
6th smoothed sub comp. mode



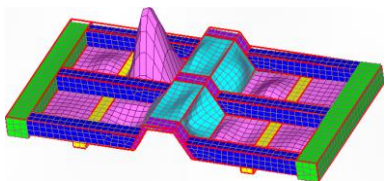
7th smoothed sub comp. mode



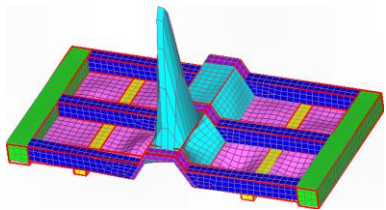
8th smoothed sub comp. mode



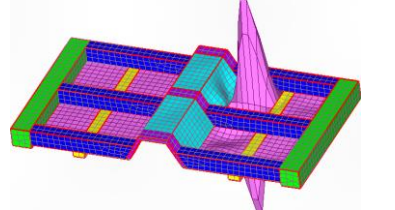
9th smoothed sub comp. mode



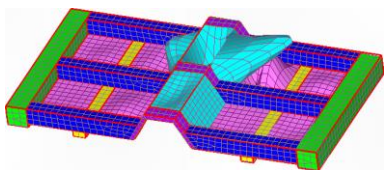
10th smoothed sub comp. mode



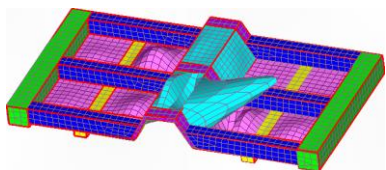
11th smoothed sub comp. mode



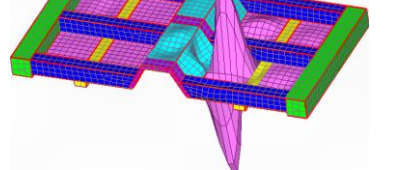
12th smoothed sub comp. mode



13th smoothed sub comp. mode



14th smoothed sub comp. mode



15th smoothed sub comp. mode

Fig. 5.15 Smoothed component modes derived by orthogonal transform of original characteristic modes.

Table 5.1 Frequencies of main and sub component modes approximated by characteristic modes.

Order of mode	Frequency	Order of mode	Frequency
1 st main comp. mode (m1)	38.4 Hz	7 th sub comp. mode (s7)	137.0 Hz
2 nd main comp. mode (m2)	78.3 Hz	8 th sub comp. mode (s8)	145.5 Hz
3 rd main comp. mode (m3)	131.9 Hz	9 th sub comp. mode (s9)	156.7 Hz
1 st sub comp. mode (s1)	81.2 Hz	10 th sub comp. mode (s10)	157.9 Hz
2 nd sub comp. mode (s2)	95.2 Hz	11 th sub comp. mode (s11)	163.8 Hz
3 rd sub comp. mode (s3)	99.7 Hz	12 th sub comp. mode (s12)	168.6 Hz
4 th sub comp. mode (s4)	119.6 Hz	13 th sub comp. mode (s13)	174.4 Hz
5 th sub comp. mode (s5)	134.4 Hz	14 th sub comp. mode (s14)	174.5 Hz
6 th sub comp. mode (s6)	135.5 Hz	15 th sub comp. mode (s15)	198.8 Hz

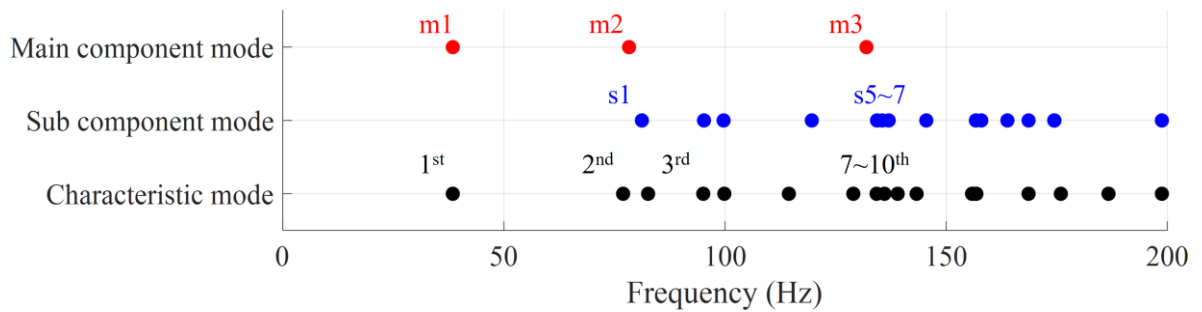


Fig. 5.16 Rayleigh quotient of smoothed component modes and natural frequencies. The bottom column indicates natural frequency of the characteristic mode, as top and middle columns indicate Rayleigh quotient of main and sub component mode respectively. The figure shows that 1st mode consists of 1st main component mode (m1), as 2nd and 3rd mode consists of 2nd main component mode (m2) and 1st sub component mode (s1).

第6章 結 言

本研究では自動車構造を対象として、効率的な振動分析を支援する計算手法の構築を目指した。本論文では自動車構造の振動対策において、車体のリジッドな構造に起因する構造全体の振動と、フレキシブルな部材に起因する局部振動に着目し、それぞれの振動形状で対策アプローチが異なることを述べた。さらに、両振動が連成する場合において、振動を低減する対策方法が限定的であり、不適切な対策ではかえって振動が増大するケースについて述べた。この問題を踏まえて、自動車ボディの固有モードに両者の振動がどの程度含まれるのかを簡便かつ定量的に評価することを試みた。まず、自動車ボディのようにフレームとパネルからなる有限要素モデルにおいて、リジッドな構造を主系、フレキシブルな部材を従系とあらかじめ定義することで、局部振動分離法によって各固有モードから構造全体振動と局部振動を高精度に分離する方法を提案した。また、この結果から構造全体振動が支配的なモード、局部振動が支配的なモード、両者が連成振動するモードに定量的かつ自動的に分類する方法を紹介した。続いて、構造物の主系と従系となる部位がわからなくても、構造全体振動と局部振動を自動的に分離できる方法として、三次元離散ウェーブレット変換を用いた振動分離手法を提案した。この手法では三次元有限要素モデルの固有モードをボリュームデータに変換し、三次元離散信号として扱うことで、三次元に拡張した離散ウェーブレット変換によって構造全体振動を空間周波数の低い低周波数モード、局部振動を空間周波数の高い高周波数モードとして分離した。さらに、低周波数モードおよび高周波数モードに対して直交変換を逐次適用することにより、各構成要素単体の振動である構成要素モードに分離する構成要素モード分解を提案した。また、構成要素モード分解によって各固有モードに各構成要素モードがどの程度含まれるのかを簡便に評価できることを示した。

以下に各章のまとめと今後の課題を述べる。

第1章では、はじめに自動車のNVHと呼ばれる振動や騒音要素への対策必要性、振動騒音の予測および対策方法の歴史について述べた。また、振動騒音の効率的な予測と対策立案に貢献している有限要素法やモード解析を用いたコンピュータシミュレーションについての先行研究について紹介するとともに、それらの課題を説明した。これらを踏まえて、本研究の目的と位置づけを述べた。

第2章では本論文で用いる、自動車のアンダーボディを模した解析モデルについて説明した。この解析モデルはリジッドなフレーム構造とそれに取り付けられたフレキシブルなパネルで構成され、固有モードには構造全体振動と局部振動が混在している。解析モデルの固有モードのう

ち、構造全体振動のみからなるモード、局部振動からなるモード、および構造全体振動と局部振動が連成するモードの例を示し、これらに対する振動低減のための対策方法の違いを述べた。この結果から、構造全体振動と局部振動が連成するモードでは振動を低減するための適切な対策が限定的であり、不適切な対策ではかえって振動が増大することを示した。

第3章では第2章の結果を踏まえて、各固有モードから構造全体振動と局部振動を分離する局部振動分離法を提案した。局部振動分離法はモデルのリジッドな構造を主系、フレキシブルな部材を従系としてあらかじめ定義することで、主系に起因する構造全体振動と従系に起因する局部振動を分離する。さらに、この分離結果を用いて固有モードを構造全体振動が支配的なモード、局部振動が支配的なモード、両者が連成振動するモードの3グループに定量的に分類した。

第4章では、局部振動分離法ではモデルの主系と従系を解析者があらかじめ設定する必要があるのであるため、所望の結果を得るには解析者の知識や経験が必要となることから、こうした知見を必要としない、新たな振動分離手法を提案した。本手法では構造全体振動は空間周波数が低く、局部振動は空間周波数が高いことから、空間周波数の高低で信号を分解できる離散ウェーブレット変換に着目した。まず離散ウェーブレット変換および離散ウェーブレット変換による多重解像度解析について述べ、これを三次元配列に適用できる三次元離散ウェーブレット変換に拡張した。三次元有限要素モデルの固有モードを三次元グリッドに格納されたボリュームデータ状の三次元離散信号に変換することで、この三次元離散ウェーブレット変換を用いて振動分離を行った。この結果、モデルの物性値等の情報やモデルの主系及び従系を担う箇所が不明な場合でも自動的に構造全体振動を低周波数モードに、局部振動を高周波数モードに分離できることを示した。

第5章では、第4章の結果からさらに主系および従系単体のモードである構成要素モードに分解する構成要素モード分解を提案した。構成要素モード分解は低周波数モード同士、および高周波数モード同士の形状相関を基に、直交変換によって主系や従系といった構成要素単体のモードに分解する手法である。さらに、この直交変換の過程で用いる直交行列を用いて、固有モードを主系モードと従系モードの線形結合で表すことで各固有モードに各構成要素の振動がどの程度含まれるのかを自動的にかつ定量的に評価することができることを示した。

今後の課題は、本論文で提案した手法の適用対象の拡張、そして各手法の計算過程の効率化である。本論文で提案した離散ウェーブレット変換による振動分離手法は振動形状の空間周波数のみに着目した手法であるため、構造物の形状や物性等の特性に左右されないと考える。ただし、本解析モデルは従系のサイズ(寸法)がモデル全体に対して比較的小さいため、従系単体の振動の空間周波数は自然と高くなり、構造全体の空間周波数が低い変形と区別できているとも考えら

れる．一方，例えば単一の従系の寸法が構造物全体に対して大きい割合を占める場合に，その従系単体の振動が空間周波数の低い変形として判別され，構造物全体の変形と混在する可能性がある．本論文で用いた有限要素モデルは自動車のアンダーボディのみを模したものであったため，今後は自動車のホワイトボディモデルを目標として，ドアパネルやルーフといった大きなパネル部材を持つ構造など，さらに大規模で緻密なモデルに対して本手法の適用を試みる．また，本論文の三次元離散ウェーブレット変換による振動分離において，分離後の振動にウェーブレット変換に由来する変形が残留してしまっていた．そこで，離散ウェーブレット変換の適用に際し，所望の振動形状を分離できる基底関数の選択や，ボリュームデータのフレキシブルな分割についても検討する．さらに，本論文では三次元離散ウェーブレット変換を用いて振動分離を行ったが，同様に空間周波数に着目する三次元フーリエ変換を用いた方法についても検討している．三次元離散フーリエ変換は三次元離散ウェーブレット変換よりもローパス，ハイパスフィルタを細かく設定できるという利点を持つため，より効果的な分析に役立ち，本手法の適用可能性が広がると考える．

謝 辞

本論文を結ぶにあたり、これまでご助力いただいた皆様に心より御礼申し上げます。

指導教員の井上卓見教授には本研究を実施する機会を与えていただき、学部4年生の研究室配属から現在に至るまで親切で熱心なご指導とご鞭撻を賜りました。心より感謝申し上げます。

副査を務めていただいた雫本信哉教授、川邊武俊教授には本論文をご審査いただき、貴重なご意見を賜りました。深く感謝申し上げます。

機械力学研究室の森博輝准教授、宗和伸行助教、大村和久技術職員には日々の研究活動において様々な面でサポートしていただきました。また、長野高専の門脇廉講師には九州大学の助教であった間も、九州大学を離れた後も随時相談に乗っていただき、公私ともにお世話になりました。そして機械力学研究室および構造動力学研究室の先輩、同期、後輩の皆様には研究活動のみならず研究室内外にてご支援いただき、多くことを学ばせていただきました。特に後輩の高橋秀徳君にはこの3年間、本研究の遂行にあたり多大なる尽力をいただきました。ここに厚くお礼申し上げます。

なお、本研究の一部は日本学術振興会特別研究員 DC2 に対する特別研究員奨励費として、JSPS 科研費 JP22J10662 の助成を受けて行われたことを記し、関係各位に感謝の意を表します。

最後に、今まで励まし支え続けてくれた家族と、応援してくれた友人達に深く感謝いたします。

付録 A Guyan の静縮小

多自由度系の運動方程式の特性行列の自由度を縮小する方法の1つに Guyan の静縮小 (Guyan's Static Reduction) がある(43)(44). この方法は, 系を2つの領域に分け, 運動方程式のうち一方の領域の自由度を消去してもう一方の領域の自由度のみに縮小する方法である. ここでは自由度の残存する領域が消去する領域に与える影響のうち, 動的な部分を見捨てる, 準静的影響だけを考慮するという近似に基づいて自由度の縮小を行っている. 例として, ある多自由度系の運動方程式を次式に示す.

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A-1})$$

式 (A-1) を, 自由度を残す領域 a と自由度を消去する領域 b に分け, 領域 b には加振力が作用しないと考慮して次式のように表現する.

$$\begin{bmatrix} M_a & M_{ab} \\ M_{ba} & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_a \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & C_{ab} \\ C_{ba} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

式 (A-2) において, 動的な部分である慣性項と減衰項を省略すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

式 (A-3) は以下の二式に展開できる.

$$K_a \mathbf{x}_a + K_{ab} \mathbf{x}_b = \mathbf{f}_a \quad (\text{A-4})$$

$$K_{ba} \mathbf{x}_a + K_b \mathbf{x}_b = \mathbf{0} \quad (\text{A-5})$$

式 (A-5) を \mathbf{x}_b について解くと次式となる.

$$\mathbf{x}_b = -K_b^{-1} K_{ba} \mathbf{x}_a \quad (\text{A-6})$$

式 (A-6) を用いて, 全系の変位ベクトル \mathbf{x} は次式で表せる.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ -K_b^{-1} K_{ba} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{x}_a \quad (\text{A-7})$$

ここで I_a は領域 a の自由度の次元を有する単位行列であり, T_{ab} を変換行列と呼ぶ. 式 (A-7) を式 (A-1) に代入し, さらに各項の左から変換行列を乗じると, 次のように領域 a の自由度のみに縮小された運動方程式が得られる.

$$\bar{M}\ddot{x}_a + \bar{C}\dot{x}_a + \bar{K}x_a = \bar{f} \quad (\text{A-8})$$

ここで, 式 (A-8) の質量行列, 減衰行列, 剛性行列, 外力ベクトルは次式で表される.

$$\bar{M} = T_{ab}^T M T_{ab} = \begin{bmatrix} I_a & -K_{ba}^T K_b^{-1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a & M_{ab} \\ M_{ba} & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -K_b^{-1} K_{ba} \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

$$= M_a - K_{ba}^T K_b^{-1T} M_{ba} - M_{ab} K_b^{-1} K_{ba} + K_{ba}^T K_b^{-1T} M_b K_b^{-1} K_{ba}$$

$$\bar{C} = T_{ab}^T C T_{ab} = \begin{bmatrix} I_a & -K_{ba}^T K_b^{-1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_a & C_{ab} \\ C_{ba} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -K_b^{-1} K_{ba} \end{bmatrix} \quad (\text{A-10})$$

$$= C_a - K_{ba}^T K_b^{-1T} C_{ba} - C_{ab} K_b^{-1} K_{ba} + K_{ba}^T K_b^{-1T} C_b K_b^{-1} K_{ba}$$

$$\bar{K} = T_{ab}^T K T_{ab} = \begin{bmatrix} I_a & -K_{ba}^T K_b^{-1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_a & K_{ab} \\ K_{ba} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ -K_b^{-1} K_{ba} \end{bmatrix} \quad (\text{A-11})$$

$$= K_a - K_{ba}^T K_b^{-1T} K_{ba} - K_{ab} K_b^{-1} K_{ba} + K_{ba}^T K_b^{-1T} K_b K_b^{-1} K_{ba}$$

$$\bar{f} = T_{ab}^T f = f_a \quad (\text{A-12})$$

以上のように, 元の式 (A-1) の形式を崩すことなく運動方程式を縮小することができ, 質量行列 M , 減衰行列 C , 剛性行列 K , 外力ベクトル f も式 (A-9) ~ (A-12) のように縮小することができる.

以上を踏まえて, Guyan の静縮小では運動方程式 (A-2) のうち動的な項を省略している. ここで, 式 (A-6) を式 (A-4) に代入すると次の関係が成り立つ.

$$K_a x_a - K_{ab} K_b^{-1} K_{ba} x_a = [K_a - K_{ba}^T K_b^{-1} K_{ba}] x_a = f_a \quad (\text{A-13})$$

式 (A-13) および式 (A-6) から, Guyan の静縮小は領域 b の応答は静的な変位のみであるという近似を行ったことになる. 低次の固有モードを考える上ではこの省略過程を近似として用いることができる場合が多いものの, 高次モードが関与する問題に適用すると, この縮小過程に起因する誤差が大きくなることに留意する必要がある.

付録 B k-means 法および k-means++法

k-means 法は、非階層型クラスタリングのアルゴリズムの一種であり、データ解析において広く使われているクラスタリング手法の一つである(79)。この手法には大きく分けて5つのステップが存在する。

- ① n 個のデータの中から k 個 ($k < n$) の個体を適当に取り出す。
- ② 取り出した k 個の点の位置を k 個のクラスタの中心とする。
- ③ n 個のデータを、最も近いクラスタ中心のグループに収容する。
- ④ 各クラスタにおいて、属しているデータの位置の重心を計算し、新しいクラスタ中心とする。
- ⑤ 手順③、④を繰り返す。クラスタへの割り当てが1つ前の割り当てと等しい場合 (= 収束した場合) に終了する。

この繰り返し計算により、 n 個のデータ群を k 個のクラスタに分類することができる。しかしながら、この k-means 法はステップ①のランダム選ばれた初期値によってクラスタリング結果が変わってしまう。そこで、この初期値依存性を解消するために考案されたのが k-means++法である(80)。k-means++法では初期値設定に以下のフローを提案している。

- I. n 個のデータ (x_1, x_2, \dots, x_n) からなるデータセットの中から1つ目のクラスタ中心 c_1 をランダムに選ぶ。
- II. 各データとクラスタ中心 c_1 との距離を求める。 c_j ($j=1, 2, \dots, k$) とデータ x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 間の距離を $D(x_i, c_j)$ とおく。
- III. 次の重心 c_2 を次の確率でデータセットからランダムに選択する。

$$\frac{D^2(x_i, c_1)}{\sum_{i=1}^n D^2(x_i, c_1)} \quad (\text{B-1})$$

- IV. 以下の方法で中心 c_j を選択する。
 - i. 各データから各重心までの距離を求め、各データを最も近い重心に割り当てる。
 - ii. $i=1, 2, \dots, n$ および $j=1, 2, \dots, k-1$ について、重心を次の確率でデータセットからランダムに選択する。

$$\frac{D^2(x_i, c_j)}{\sum_{\{h: x_h \in C_j\}} D^2(x_h, c_j)} \quad (\text{B-2})$$

ここで、 C_j は重心 c_j に最も近い全てのデータの集合を指し、 x_i は C_j に属する。つまり、すでに選択されたクラスタ中心のうち、最も近い中心との距離に比例する確率で次の中心を選択する。

V. k 個のクラスタ中心が選択されるまでステップIVを繰り返す。

式 (B-2) から、クラスタ中心からより離れているデータほど次のクラスタ中心に選ばれる可能性が高くなる。このため、クラスタ中心同士の距離を離すことができ、k-means法の初期値依存性の解消に有効であることが知られている。

付録 C Daubechies wavelet

本付録では、離散ウェーブレット変換のトウスケール関係、分解・再構成アルゴリズムおよび離散直交ウェーブレットについて説明し、本論文で用いた Daubechies 4 の詳細を述べる。

C.1 トウスケール関係

本節では離散ウェーブレット変換の基底関数を持つ基本的な性質であるトウスケール関係 (45) について述べる。スケーリング関数 $\phi(x)$ は次式に示すように任意の関数 $f(x)$ を $\phi(x)$ の線形結合で近似する。次式において j はレベル j の近似であることを示し、 $s_k^{(j)}$ はスケーリング係数、 k はトランスレートパラメータである。

$$f_j(x) = \sum_k s_k^{(j)} \phi(2^j x - k) \quad (\text{C-1})$$

また、 $\phi(x)$ は任意の関数を表すことができるため、次式のようにスケーリング関数自身も表現できる。

$$\phi(x) = \sum_k s_k^{(j)} \phi(2^j x - k) \quad (\text{C-2})$$

式 (C-2) において、 $j=1$ のときのスケーリング係数 $s_k^{(1)}$ を p_k と置き換えると次式のようになる。

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad (\text{C-3})$$

式 (C-3) はスケーリング関数 $\phi(x)$ が倍の解像度のスケーリング関数 $\phi(2x)$ の線形結合によって表されることを示しており、この関係をトウスケール関係と呼ぶ。この関係は全てのスケーリング関数で厳密に成立する。また、式 (C-3) の係数 p_k はトウスケール数列と呼ばれる。

この関係はウェーブレット $\psi(x)$ についても同様である。ウェーブレット $\psi(x)$ はウェーブレット成分 $g_j(x)$ を次式のように表す。次式において $w_k^{(j)}$ はウェーブレット係数である。

$$g_j(x) = \sum_k w_k^{(j)} \psi(2^j x - k) \quad (\text{C-4})$$

ウェーブレット $\psi(x)$ も同様に以下のようなトウスケール関係で表される。 q_k はウェーブレットに関するトウスケール数列である。

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k) \quad (\text{C-5})$$

C.2 トゥースケール関係による分解アルゴリズム

本節ではトゥースケール関係による分解アルゴリズムについて述べる. 離散ウェーブレット変換における隣り合うレベルでの近似関数 $f(x)$ とウェーブレット成分 $g(x)$ の関係は次式で表される. 次式はレベル j の解像度の近似関数 $f_j(x)$ が一つ解像度の粗い近似関数 $f_{j-1}(x)$ とウェーブレット成分 $g_{j-1}(x)$ の和で表されることを示している.

$$f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \quad (\text{C-6})$$

式 (C-6) のようにレベル j の関数をレベル $j-1$ の関数の和に分解するには, レベル j のスケーリング係数 $s_k^{(j)}$ からレベル $j-1$ のスケーリング係数 $s_k^{(j-1)}$ とウェーブレット係数 $w_k^{(j-1)}$ を求める分解アルゴリズムが用いられる. $f_{j-1}(x)$ および $g_{j-1}(x)$ は係数 $s_k^{(j-1)}$, $w_k^{(j-1)}$ を用いて以下のように表される.

$$\begin{cases} f_{j-1}(x) = \sum_k s_k^{(j-1)} \phi(2^{j-1}x - k) \\ g_{j-1}(x) = \sum_k w_k^{(j-1)} \psi(2^{j-1}x - k) \end{cases} \quad (\text{C-7})$$

ここで式 (C-1) において近似レベルを $j=1$, 係数は $s_l^{(1)}$ のみ 1 として ($l \in \mathbb{Z}$) 他の $s_k^{(1)}$ を 0 とした場合 ($s_k^{(1)} = \delta_{k,l}$), $f_1(x)$ は次式のようになる.

$$f_1(x) = \phi(2x - l) \quad (\text{C-8})$$

式 (C-8) を式 (C-6) に代入し $j=1$ とすると, 右辺の $f_0(x)$ および $g_0(x)$ は式 (C-7) より $\phi(x)$ および $\psi(x)$ の線形結合で表され, このときの係数を特別に a_{l-2k}, b_{l-2k} とおくと次式のようになる.

$$\phi(2x - l) = \sum_k [a_{l-2k} \phi(x - k) + b_{l-2k} \psi(x - k)] \quad (\text{C-9})$$

式 (C-9) を用いて $f_j(x)$ を $f_{j-1}(x)$ と $g_{j-1}(x)$ に分ける分解アルゴリズムを示す. 式 (C-9) において $x \rightarrow 2^{j-1}x$ と書き換え, 式 (C-1) の右辺に代入すると次式のようになる.

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_k s_k^{(j)} \phi(2^j x - k) = \sum_l s_l^{(j)} \phi(2^j x - l) \\ &= \sum_l s_l^{(j)} \sum_k [a_{l-2k} \phi(2^{j-1}x - k) + b_{l-2k} \psi(2^{j-1}x - k)] \\ &= \sum_k \left[\sum_l s_l^{(j)} a_{l-2k} \phi(2^{j-1}x - k) + \sum_l s_l^{(j)} b_{l-2k} \psi(2^{j-1}x - k) \right] \end{aligned} \quad (\text{C-10})$$

また、式 (C-6) の関係から、式 (C-2) および (C-4) より、

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \\ &= \sum_k \left[s_k^{(j-1)} \phi(2^{j-1}x - k) + w_k^{(j-1)} \psi(2^{j-1}x - k) \right] \end{aligned} \quad (\text{C-11})$$

式 (C-10) および (C-11) の ϕ と ψ の係数を比較すると、次式のような関係となる。

$$\begin{cases} s_k^{(j-1)} = \sum_l a_{l-2k} s_l^{(j)} \\ w_k^{(j-1)} = \sum_l b_{l-2k} s_l^{(j)} \end{cases} \quad (\text{C-12})$$

式 (C-12) より、レベル j のスケーリング係数 $s_k^{(j)}$ をもとにレベル $j-1$ のスケーリング係数 $s_k^{(j-1)}$ およびウェーブレット係数 $w_k^{(j-1)}$ を求めることができる。これが離散ウェーブレット変換の分解アルゴリズムである。 a_{l-2k}, b_{l-2k} は分解数列と呼ばれ、 ψ が直交ウェーブレットの場合はトウスケール数列 p_k, q_k から直接的に求められる。このことは C・4 節で述べる。

C.3 トウスケール関係による再構成アルゴリズム

本節ではトウスケール関係による再構成アルゴリズムについて述べる。式 (C-6) の右辺から左辺を求める再構成アルゴリズムは、レベル $j-1$ のスケーリング係数 $s_k^{(j-1)}$ およびウェーブレット係数 $w_k^{(j-1)}$ からレベル j のスケーリング係数 $s_k^{(j)}$ を求めることに相当する。ここで式 (C-6) の各項を式 (C-1) および (C-4) の形で表し、トウスケール関係の式 (C-3) および (C-5) を適用すると次式となる。

$$\begin{aligned} \sum_k s_k^{(j)} \phi(2^j x - k) &= \sum_l s_l^{(j-1)} \phi(2^j x - l) + \sum_l w_l^{(j-1)} \psi(2^j x - l) \\ &= \sum_l \sum_k \left[s_l^{(j-1)} p_k + w_l^{(j-1)} q_k \right] \phi(2(2^{j-1}x - l) - k) \\ &= \sum_l \sum_k \left[s_l^{(j-1)} p_k + w_l^{(j-1)} q_k \right] \phi(2^j x - (k + 2l)) \\ &= \sum_k \sum_l \left[p_{k-2l} s_l^{(j-1)} + q_{k-2l} w_l^{(j-1)} \right] \phi(2^j x - k) \end{aligned} \quad (\text{C-13})$$

ϕ の係数を比較すると次式が導かれる。

$$s_k^{(j)} = \sum_l \left[p_{k-2l} s_l^{(j-1)} + q_{k-2l} w_l^{(j-1)} \right] \quad (\text{C-14})$$

式 (C-14) が離散ウェーブレット変換の再構成アルゴリズムである。

C.4 離散直交ウェーブレット

任意の関数 $f(x)$ をスケーリング関数 $\phi(x)$ の線形結合で近似するためには、 $\phi(x)$ が基底関数系を形成する必要がある。本節ではスケーリング関数とウェーブレットの直交性について述べ、この直交性を利用して分解数列 a_{l-2k}, b_{l-2k} がトースケール数列 p_k, q_k から直接的に求められることを示す。

離散ウェーブレット変換では、式 (C-1) に示すようにスケーリング関数 $\phi(x)$ をスケールおよびトランスレートした $\phi(2^j x - k)$ の線形結合で関数 $f(x)$ を近似する。このときレベル j での近似関数 $f_j(x)$ が一意に決定されるためには、 $\phi(x)$ がトランスレートパラメータ k について直交しなければならない。すなわち、

$$\langle \phi(x-k), \phi(x-l) \rangle = \delta_{k,l} \|\phi\|^2 \quad (\text{C-15})$$

ここで $\langle f, g \rangle$ は関数 f と g の内積を表し、 $\|\phi\|$ は ϕ のノルムを表す。式 (C-15) を満たすスケーリング関数を直交スケーリング関数と呼ぶ。また、式 (C-6) のレベル j から $j-1$ への分解が一意に決まるためには、 $f_{j-1}(x)$ と $g_{j-1}(x)$ が独立、すなわち次式のように同一レベルのスケーリング関数 ϕ とウェーブレット ψ が直交しなければならない。

$$\langle \phi(x-k), \psi(x-l) \rangle = 0 \quad (\text{C-16})$$

また、 $g_{j-1}(x)$ が一意に決まるためには、ウェーブレット ψ がトランスレートパラメータ k について直交しなければならない。さらに、式 (C-6) を繰り返し実行すると、 $f_j(x)$ は次式のように分解される。

$$f_j(x) = g_{j-1}(x) + g_{j-2}(x) + \cdots + g_{j-1}(x) + f_{j-1}(x) \quad (\text{C-17})$$

この分解が一意に決まるためには、各ウェーブレット成分 $g_{j-1}(x), g_{j-1}(x), \dots, g_{j-1}(x)$ がそれぞれ独立であることが必要である。したがって、ウェーブレット成分を形成するウェーブレット ψ はスケールパラメータ j についても直交しなければならない。すなわち、

$$\langle \psi(2^j x - k), \psi(2^l x - m) \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \|\psi\|^2 \quad (\text{C-18})$$

式 (C-18) を満たすウェーブレットを直交ウェーブレットと呼ぶ。以上に述べた直交性を利用して、分解数列 a_{l-2k}, b_{l-2k} をトースケール数列 p_k, q_k で表す。式 (C-9) の両辺とスケーリング関数

$\phi(x)$ の内積をとると、左辺に関してはスケーリング関数のトゥースケール関係の式 (C-3) と直交性の式 (C-15) より、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-l)\overline{\phi(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \overline{p_k} \phi(2x-l)\overline{\phi(2x-k)} dx \\
&= \sum_k \overline{p_k} \delta_{k,l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x)\overline{\phi(2x)} dx = \frac{1}{2} \overline{p_l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(x)} dx \\
&= \frac{1}{2} \overline{p_l} \|\phi\|^2
\end{aligned} \tag{C-19}$$

右辺に関しては、直交性の式 (C-15) および (C-16) より、

$$\begin{aligned}
&\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)]\overline{\phi(x)} dx \\
&= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} a_{l-2k}\phi(x-k)\overline{\phi(x)} dx = \sum_k a_{l-2k} \delta_{k,0} \|\phi\|^2 \\
&= a_l \|\phi\|^2
\end{aligned} \tag{C-20}$$

ここで式 (C-19) および (C-20) は同値なので次式が成り立つ.

$$a_l = \frac{\overline{p_l}}{2} \tag{C-21}$$

同様に、式 (C-9) の両辺とウェーブレット $\psi(x)$ の内積をとり、直交性を利用することで次式の関係式を得る.

$$b_l = \frac{\overline{q_l}}{2} \tag{C-22}$$

このように、分解数列とトゥースケール数列は1対1の関係にあり、 ϕ と ψ の直交性を用いることでスケーリング関数のトゥースケール数列 p_k からウェーブレットのトゥースケール数列 q_k を求めることができる. これらの関係式は ϕ と ψ の直交性の式 (C-16) から得られる. 式 (C-16) において $j=0$ とし、 ψ の定義式 (C-5) を式 (C-16) の左辺に代入して積分すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-m)\overline{\psi(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \sum_l \overline{p_k} \overline{q_l} \phi(2x-2m-k)\overline{\phi(2x-l)} dx + \\
&= \sum_k \sum_l \overline{p_k} \overline{q_l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-2m-k)\overline{\phi(y-l)} \frac{dy}{2}
\end{aligned} \tag{C-23}$$

式 (C-15) の直交性より、

$$\sum_k p_k q_{k+2m} = 0 \quad (\text{C-24})$$

C・6節で述べる Daubechies のウェーブレットでは、 p_k と q_k は次式の関係を持つ(81).

$$q_k = (-1)^k p_{1-k} \quad (\text{C-25})$$

以上より、離散直交ウェーブレットではスケーリング関数のトースケール数列 p_k からウェーブレットのトースケール数列 q_k を求められ、さらに p_k, q_k から分解数列 a_k, b_k を求められる。さらに、整数点 k における $\phi(x)$ の値がわかれば、トースケール関係の式 (C-3) および (C-5) より $\phi(x)$ および $\psi(x)$ を図示することができる。したがって、離散直交ウェーブレットの定義はトースケール数列 p_k と整数点における $\phi(x)$ の値の決定と等価である。

C.5 コンパクト・サポート

本節では、コンパクト・サポートを有する ϕ と ψ の性質について述べ、トースケール数列 p_k が有限数列であるとき、 ϕ のサポートがコンパクトであることを示す。関数 $f(x)$ の値が 0 でない区間を f のサポートと呼び、 $\text{supp } f$ で表す。 $\text{supp } f$ が有限の区間であるとき、サポートはコンパクトであるという。トースケール数列 p_k の 0 でない要素を $p_k (k=0, \dots, L)$ とし、このときのサポートを $\text{supp } \phi = [c, d]$ とおく。トースケール関係式 (C-3) の右辺 $\phi(2x-k)$ は $\phi(2x)$ を右へ $k/2$ だけ平行移動したものである。したがって最も左に位置するのは $\phi(2x)$ であり、これが 0 でないためには少なくとも $x \in [c/2, d/2]$ を満たす必要がある。また、最も右に位置するのは $\phi(2x-L)$ であり、これが 0 でないためには少なくとも $x \in [(c+L)/2, (d+L)/2]$ のときである。以上から、右辺のサポートは $[c/2, (d+L)/2]$ であり、これは左辺のサポートと一致するため $\phi(x)$ のサポートは次式のようになる。

$$\text{supp } \phi = [0, L] \quad (\text{C-26})$$

次にウェーブレットのサポートについて考える。トースケール数列 q_k の 0 でない要素を $q_k (k=M, \dots, N)$ とおく。このとき式 (C-5) を用いて上記と同様に考えると、 $\psi(x)$ のサポートは次式のようになる。

$$\text{supp } \psi = [M/2, (N+L)/2] \quad (\text{C-27})$$

このように、トゥースケール数列が有限数列であればスケーリング関数およびウェーブレットのサポートはコンパクトとなる。

C.6 Daubechies のウェーブレット

本節では、Daubechies のスケーリング関数およびウェーブレットについて述べる。Daubechies のウェーブレットは正整数 N によって番号づけられる一連の関数である。Daubechies N のウェーブレットは、直交関係の式 (C-15), (C-16), (C-18) とウェーブレット ψ の $0, 1, \dots, N-1$ 次モーメントが全て 0 の条件から決定される。ここでウェーブレットの n 次モーメントが 0 となる条件式は次式となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx = 0 \quad (\text{C-28})$$

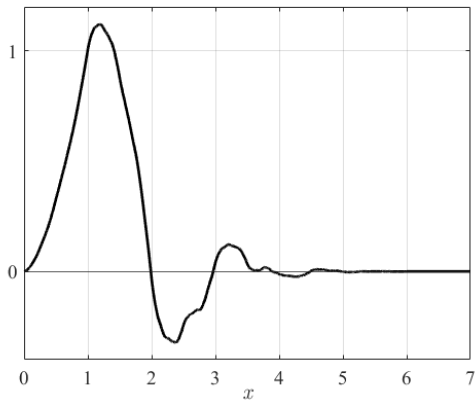
Daubechies N のウェーブレットは、 $2N$ 個の 0 でないトゥースケール数列 $p_k (k=0, \dots, 2N-1)$ と整数点におけるスケーリング関数の値 $\phi(x) (x=1, 2, \dots, 2N-2)$ によって与えられる。したがって C・5 節で述べたように Daubechies N のウェーブレットのサポートはコンパクトである。Daubechies N は N が大きくなるにつれて関数のなめらかさが上がり、 $N \geq 2$ ならば連続関数となる。表 C1, C2 に本論文で用いた Daubechies 4 のトゥースケール数列 p_k の値と整数点での $\phi(x)$ の値を示し、図 C1 に $\phi(x)$ および $\psi(x)$ の形状を図示する。

Table C1 Two scale sequence of Daubechies 4.

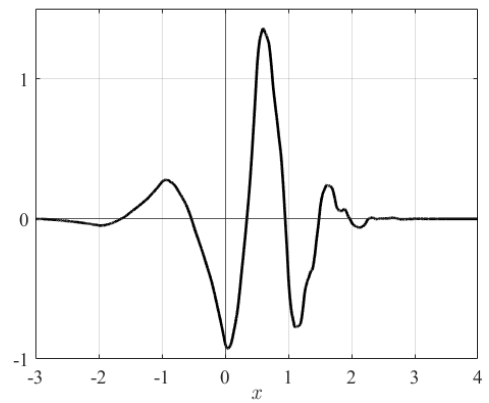
$p_0 = 0.32580343$	$p_1 = 1.01094572$
$p_2 = 0.89220014$	$p_3 = -0.03957503$
$p_4 = -0.26450717$	$p_5 = 0.04361630$
$p_6 = 0.04650360$	$p_7 = -0.01498699$

Table C2 Value of $\phi(x)$ at integer point.

$\phi(1) = 1.00716998$	$\phi(2) = -0.03383695$
$\phi(3) = 0.03961046$	$\phi(4) = -0.01176436$
$\phi(5) = -0.00119796$	$\phi(6) = 0.00001883$



(a) Scaling function $\phi(x)$



(b) Wavelet $\psi(x)$

Fig. C1 Shape of scaling function and wavelet of Daubechies 4.

付録 D DBSCAN

DBSCAN (Density-based spatial clustering of applications with noise) (88)は密度準拠のクラスタリング手法であり、k-means 法のようにあらかじめクラスタ数を設定する必要がなく、自動的にクラスタ数を決定する。DBSCAN は「距離の閾値 Eps 」と「対象数の閾値 $MinPts$ 」をもとにクラスタリングを行う。クラスタリングにあたり以下の三つを定義する。

定義 1: Eps -近傍

p 次元空間上のデータ D における任意の点 x_i の Eps -近傍は $N_{Eps}(x_i)$ と表され、次式で定義する。

$$N_{Eps}(x_i) = \{x_j \in D \mid d(x_i, x_j) \leq Eps\} \quad (D-1)$$

式 (D-1) において $d(x_i, x_j)$ は点 x_i, x_j 間の距離である。すなわち、 Eps -近傍は点 x_i から半径 Eps 内に存在する点の集合を指す。

定義 2: コアポイント

対象点 x_i の Eps -近傍 $N_{Eps}(x_i)$ が次式を満たすとき、 x_i をコアポイントと呼ぶ。

$$|N_{Eps}(x_i)| \geq MinPts \quad (D-2)$$

式 (D-2) から、点 x_i の半径 Eps 内に点が $MinPts$ 以上あるとき (点 x_i 周辺の密度が一定以上のとき)、点 x_i はコアポイントとなる。

定義 3: 直接密度到達可能

次式を満たすとき、点 x_j は点 x_i から直接密度到達可能 (DDR; directory density-reachable) という。

$$x_j \in N_{Eps}(x_i) \cap |N_{Eps}(x_i)| \geq MinPts \quad (D-3)$$

式 (D-3) から、点 x_j が点 x_i の Eps -近傍にあり、かつ点 x_i がコアポイントである場合、点 x_j は点 x_i から直接密度到達可能であるという。また、コアポイントではないが他のコアポイントから直接密度到達可能である点を「境界ポイント」、どのコアポイントからも直接密度到達可能でない点を「ノイズ」と分類する。点 x_j が点 x_i から直接密度到達可能である場合、点 x_i と点 x_j は同じクラスタに分類される。 Eps -近傍の点を探索する操作を繰り返し行うことでクラスタを逐次拡大し、分類終了時にどのクラスタにも分類されていない点をノイズとみなす。

参考文献

- (1) 萩原一郎, 自動車騒音振動解析, 日本機械学会誌, Vol.92, No.847 (1989), pp.520-525.
- (2) 萩原一郎, 自動車の騒音振動問題における新しい数値解法, 応用数理, Vol.3, No.4 (1993), pp.260-274.
- (3) Meehan, P. A., Prediction of wheel squeal noise under mode coupling, Journal of Sound and Vibration, Vol.465 (2020), No.115025.
- (4) 星野博之, 小沢義彦, 車内音を構成する音の要素とその評価, 豊田中央研究所 R&D レビュー, Vol.30, No.3 (1995), pp.29-38.
- (5) 末岡淳男, 劉孝弘, 中野寛, 山崎俊広, 中江貴志, 川原大輔, 動吸振器を用いた自動車用ディスクブレーキの鳴き抑制対策, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.73, No.734 (2007), pp.2653-2661.
- (6) 池澤知徳, 吉村卓也, MBD と感度解析を用いた自動車用サスペンションの振動特性最適化 (固有値最適化問題への適用), 日本機械学会論文集 (C編), Vol.74, No.740 (2008), pp.897-903.
- (7) 古屋耕平, 松井智之, 大久保信行, 戸井武司, 動バネ法による伝達力の実験同定と同定結果を利用したエンジン-フレーム連成振動の低減, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.77, No.781 (2011), pp.3350-3364.
- (8) 戸井武司, 青山和正, 大久保信行, 実稼働中における部品間伝達力の予測と振動・騒音の低減, 精密工学会誌, Vol.61, No.2 (1995), pp.213-217.
- (9) Petyt, M., Introduction to Finite Element Vibration analysis (2nd ed.) (2010), Cambridge University Press.
- (10) 長松昭男, モード解析入門 (1993), コロナ社
- (11) 長松昌男, 長松昭男, 実用モード解析入門 (2018), コロナ社
- (12) 末岡淳男, 金光陽一, 近藤孝広, 機械振動学 (2000), 朝倉書店
- (13) Hansteen, O.E., On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, Issue 5 (1979), pp.405-411.
- (14) 馬正東, 萩原一郎, 高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発 第一報:

- ダンピング系の周波数応答解析, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.57, No.536 (1991), pp.1148-1155.
- (15) 萩原一郎, 馬正東, 高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発 (第 2 報, 固有モード感度解析への適用), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.57, No.539 (1991), pp.2198-2204.
- (16) 馬正東, 萩原一郎, 高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発 (第 3 報, 縮重固有値を持つ系の感度解析への適用), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.57, No.540 (1991), pp.2599-2605.
- (17) 小机わかえ, 萩原一郎, 馬正東, 高次と低次のモードの省略可能なモーダル周波数応答感度解析手法の開発, 日本応用数理学会論文誌, Vol.4, No.2 (1994), pp.141-164.
- (18) Townley, G.E. and Klahs, J.W., Dynamic simulation of automobile body utilizing finite element and modal synthesis techniques, SAE Transactions, Vol.87, section 2 (1978), pp.1718-1726.
- (19) 大熊政明, 長松昭男, 区分モード合成法と MSC-NASTRAN の比較, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.49, No.446 (1983), pp.1883-1889.
- (20) Klosterman, A.L., A combined experimental and analytical procedure for improving automotive system dynamics, SAE Transactions, Vol.81, Section 1 (1972), pp.343-353.
- (21) 長松昭男, 中尾章裕, 岩本敏孝, 長池勝, 部分構造合成法による振動解析 (第 1 報, 基礎的検討), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.49, No.437 (1983), pp.3-11.
- (22) 長松昭男, 岩本敏孝, 藤田豊, 部分構造合成法による振動解析 (第 2 報, 最適設計への試み-その 1), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.49, No.439 (1983), pp.314-322.
- (23) 長松昭男, 藤田豊, 池内皎隆, 白井正明, 部分構造合成法による振動解析 (第 3 報, ディーゼル発電パッケージへの適用), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.49, No.447 (1983), pp.1914-1923.
- (24) 大熊政明, 長松昭男, 部分構造合成法による振動解析 (第 4 報, 有限要素法による剰余コンプライアンス行列の計算), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.50, No.457 (1984), pp.1563-1569.
- (25) 大熊政明, 長松昭男, 部分構造合成法による振動解析 (第 5 報, 同定した特性行列を用いる方法), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.51, No.471 (1985), pp.2959-2965.
- (26) 長池勝, 長松昭男, 雉本信哉, 部分構造合成法による振動解析 (第 6 報, 音響解析への応用),

- 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.53, No.493 (1987), pp.1905-1912.
- (27) 朴錫柱, 大熊政明, 長松昭男, 部分構造合成法による振動解析 (第 7 報, 分解法と伝達関数合成法の組み合わせによる振動解析) , 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.54, No.497 (1988), pp.54-59.
- (28) 朴錫柱, 大熊政明, 長松昭男, 部分構造合成法による振動解析 (第 8 報, 実験データを用いたモード合成法) , 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.55, No.510 (1989), pp.337-342.
- (29) Damme, C. I. V., Allen, M. S. and Hollkamp, J. J., Evaluating reduced order models of curved beams for random response prediction using static equilibrium paths, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.468, (2020), No.115018.
- (30) 望月隆史, 萩原一郎, モーダル差分構造法と Guyan の静縮約による区分モード合成法の一般化, 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.76, No.768 (2010), pp.2024-2031.
- (31) 望月隆史, 萩原一郎, モーダル差分構造法と従来手法の比較, 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.76, No.763 (2010), pp.525-532.
- (32) 望月隆史, 萩原一郎, モーダル差分構造法における特異性に関する考察, 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.77, No.774 (2011), pp.246-256.
- (33) 城戸一郎, 末岡淳男, 2つの分系が強く連成する振動系の解析法 (第 1 報, 自動車サスペンションへの適用) , 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.71, No.712 (2005), pp.3335-3342.
- (34) 鶴見康昭, 中川稔章, 森信行, 山中宏, 大規模構造の伝達関数による縮退モデルを用いた最適設計法 (付加剛性を設計変数とした振動低減法の開発) , 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.67, No.663 (2001), pp.3421-3427.
- (35) Koizumi, T., Tsujiuchi, N. and Matsumura, Y., Modal Decomposition of Operating Deflection Shapes Based on the General Definition of Projectors, *JSME International Journal, Series C*, Vol.42, No.2 (1999), pp.294-300.
- (36) 松村雄一, 小泉孝之, 辻内伸好, 実稼働時応答の状態推定に関する研究(第 1 報, 時間領域における時変振幅の高速同定法), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.63, No.610 (1997), pp.1927-1933.
- (37) 松村雄一, 小泉孝之, 辻内伸好, 実稼働時応答の状態推定に関する研究(第 2 報, 動特性が非定常な系への拡張), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.64, No.619 (1998), pp.858-864
- (38) 松村雄一, 小泉孝之, 辻内伸好, 実稼働時応答の状態推定に関する研究(第 3 報, 一般化された

- 射影に基づくモード分解法の提案), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.64, No.620 (1998), pp.1170-1175.
- (39) 平井誠, 松本宏行, 岩原光男, 山川新二, 長松昭男, 簡略化モデルによるシリンダブロックの固有モードの識別と振動特性の最適化, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.59, No.567 (1993), pp.3283-3290.
- (40) 小泉孝之, 辻内伸好, 中原紳, 仲村潔郎, 大島裕子, 振動解析効率化のための固有モード分類手法の提案, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.75, No.754 (2009), pp.1543-1549.
- (41) 望月隆史, 主成分モード分析による車体主要振動モードの把握, 自動車技術会論文集, Vol.47, No.3 (2016), pp.729-735.
- (42) 松村雄一, 稲葉雅至, 大澤司, 瀬村純一, 全系の振動対策の検討に供する分系のモード寄与度指標, 日本機械学会論文集, Vol.87, No.893 (2021), DOI: 10.1299/transjsme.20-00352.
- (43) 長松昭男, 大熊政明, 部分構造合成法 (1991), 培風館榊原進, ウェーブレットビギナーズガイド(1995), 東京電機大学出版局.
- (44) Guyan, R. J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol.3, No.2 (1965), p.380.
- (45) 榊原進, ウェーブレットビギナーズガイド(1995), 東京電機大学出版局
- (46) 山田道夫, 萬代武史, 芦野隆一, 応用のためのウェーブレット (2016), 共立出版.
- (47) Morlet, J., Arens, G., Forgeau, E. and Giard, D., Wave propagation and sampling theory-Part 1; Complex signal and scattering in multilayered media, GEOPHYSICS, Vol.47, No.2(1982), pp.230-221.
- (48) Morlet, J., Arens, G., Forgeau, E. and Giard, D., Wave propagation and sampling theory-Part 2; Sampling theory and complex waves, GEOPHYSICS, Vol.47, No.2(1982), pp.222-236.
- (49) Grossman, A. and Morlet, J., Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape, SIAM. J. MATH. ANAL., Vol.15, No.4(1984), pp.723-736.
- (50) 井上卓見, 中野貴裕, 門脇廉, 超音波パルスの瞬時振動数を用いた物体内部の接触境界面評価, 日本機械学会論文集, Vol.81, No.832 (2015), p. 15-00420.
- (51) 井上卓見, 中野貴裕, 超音波パルスの瞬時振動数を用いた新たな診断法(エポキシ樹脂系接着剤の接合度評価), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.780 (2011), p. 2993-3006.
- (52) 菅間敦, 瀬尾明彦, ウェーブレット変換による操作力波形平滑化, 人間工学, Vol.49, No.6 (2013), pp.271-278.

- (53) 中野宏毅, 山本鎮男, 吉田靖夫, ウェーブレットによる信号処理と画像処理 (1999), 共立出版.
- (54) 史中超, 柴崎亮介, ウェーブレット変換による画像分割とステレオマッチングを利用した航空写真からの建物の自動検出の試み, 写真測量とリモートセンシング, Vol.34, No.5 (1995), pp.36-44.
- (55) 蔡篤儀, 李鎔範, 坂口賢志, 医用画像におけるエッジ強調のためのウェーブレット係数変換曲線の一提案, 医用電子と生体工学, Vol.40, No.2 (2002), pp.86-90.
- (56) Farge, M., Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence, Annual Reviews of Fluid Mechanics, 24.1 (1992), pp.395-417.
- (57) Farge, M., Kevlahan, N., Perrier, V. and Goirand É., Wavelets and Turbulence, Proceedings of the IEEE, Vol.84, No.4 (1996), pp.639-669.
- (58) 鳴田知和, 遠藤久, 早野誠治, 斎藤兆古, 磁界分布のウェーブレット変換による評価, 可視化情報学会誌, Vol.21, No.1Supplement (2001), pp.371-374.
- (59) 松山佐和, ウェーブレット変換によるデータ圧縮の最適モデル, 可視化情報学会論文集, Vol.24, No.8 (2004), pp.37-42.
- (60) 村木茂, ウェーブレット変換を用いたボリュームデータの近似, テレビジョン学会誌, Vol.46, No.12 (1992), pp.1635-1642.
- (61) Weeks, M. and Bayoumi, M., 3-D Discrete Wavelet Transform Architectures, ISCAS '98. Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Vol.4 (1998), pp.57-60.
- (62) Wang, S., Chen, Y., Zhang, Y., Dong,Z., Lee, E., Phillips, P., 3D-DWT Improves Prediction of AD and MCI, Proceedings of the First International Conference on Information Science and Electronic Technology, Vol.3 (2015), pp.60-63.
- (63) Wang, B., Wang, Y., Selesnick, I. and Vetro, A., Video Coding Using 3D Dual-Tree Wavelet Transform, EURASIP Journal on Image and Video Processing, Vol.2007, No.42761 (2007), pp.1-15.
- (64) Aggoun, A., Compression of 3D Integral Images Using 3D Wavelet Transform, Journal of Display Technology, Vol.7, No.11 (2011), pp.586-592.
- (65) Motwani, M. C., and Ji, Q., 3D face pose discrimination using wavelets, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Image Processing, Vol.1 (2001), pp.1050-1053.

- (66) Wang, J., Yin, L., Wei, X., and Sun, Y., 3D facial expression recognition based on primitive surface feature distribution. Proceedings of the 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Vol.2 (2006), pp.1399-1406.
- (67) He T., Wang, S. and Kaufuman, A., Wavelet-Based Volume Morphing, Proceedings of Visualization '94 (1994), pp.85-92.
- (68) Jin, J., Dai, M., Bao, H. and Peng, Q., Watermarking on 3D mesh based on spherical wavelet transform, Journal of Zhejiang University SCIENCE, Vol 5 (2004), pp.251-258.
- (69) Uccheddu, F., Corsini, M., and Barni, M., Wavelet-based blind watermarking of 3D models, Proceedings of the 2004 workshop on Multimedia and security (2004), pp.143-154.
- (70) 伊達宏昭, 金井理, 岸浪建史, ウェーブレット変換に基づく 3 次元ポリゴンモデルへの「電子透かし」埋め込み, 精密工学会誌, Vol.65, No.9 (1999), pp.1275-1279.
- (71) 梶田哲, 齊藤裕, 福田光一, 川中彰, 3 次元モデル表面の法線特性を考慮した幾何データの適応的ウェーブレット符号化, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J86-D-II, No.10 (2003), pp.1514-1518.
- (72) Laga, H., Nakajima, M. and Chihara, K., Discriminative Spherical Wavelet Features for Content-Based 3D Model Retrieval, International Journal of Shape Modeling, Vol.13, No.1 (2007), pp.51-72.
- (73) Laga, H., Takahashi, H. and Nakajima, M., Spherical Wavelet Descriptors for Content-based 3D Model Retrieval, Proceedings of the IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications (2006), pp.15-15.
- (74) 田中智行, 岡田裕, 岡澤重信, 藤久保昌彦, ウェーブレット有限要素法を用いたき裂進展シミュレーション, 日本船舶海洋工学会論文集, Vol.10 (2009), pp.167-175.
- (75) 宮村 (中村) 浩子, 河村拓馬, 鈴木喜雄, 井戸村泰宏, 武宮博, 4 次元データにおける特徴領域探索のための 2 次元可視化, 情報処理学会論文誌, Vol.55 ,No.9 (2014), pp.2216-2224
- (76) 松井清彰, 能勢隆, 伊藤彰則, Wavelet を用いた特徴量抽出法とその高精度化手法の評価, 研究報告音声言語情報処理 (SLP) , Vol.5 (2015), pp.1-6.
- (77) 三宅敏恒, 入門線形代数 (1991), 培風館.
- (78) 田中信雄, Snyder, S.D., 菊島義弘, 黒田雅治, 振動平板における音響放射パワーの計算法について, 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.59, No.566 (1993), pp.3078-3085.

- (79) MacQueen, J., Some methods for classification and analysis of multivariate observations, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol.1 (1967), pp.281–297.
- (80) Arthur, D. and Vassilvitskii, S., k-means++: The advantages of careful seeding, Proceedings of the eighteenth annual ACM–SIAM symposium in Discrete algorithms (2007), pp.1027–1035.
- (81) I. ドブシー, ウェーブレット 10 講 (2003), シュプリンガー・フェアラーク東京
- (82) Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 41, Issue 7 (1988), pp.909-996.
- (83) Mallat, S. G., Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L_2(\mathbb{R})$, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.315, No.1 (1989), pp.69-87.
- (84) S. ラング, 芹沢正三(訳), ラング線形代数学 (1971), ダイヤモンド社
- (85) Mallat, S. G., A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11 No.7 (1989), pp. 674-693.
- (86) Shannon, C.E., A mathematical theory of communication, The Bell system technical journal, Vol.27, No.3 (1948), pp.379-423.
- (87) B., Liu, Adaptive harmonic wavelet transform with applications in vibration analysis, Journal of Sound and Vibration, Vol.262, Issue 1 (2003), pp.45-64.
- (88) Ester, M., Kriegel, H.P., Sander J. and Xu X., A density based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise, Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (1996), pp.226-231.