

エネルギー条件に基づく自己同期現象の解析と応用 に関する研究

末田, 美和

<https://hdl.handle.net/2324/6787602>

出版情報 : Kyushu University, 2022, 博士 (工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

エネルギー条件に基づく
自己同期現象の解析と応用に関する研究

2023年 1月

九州大学大学院 工学府 機械工学専攻
末田 美和

目次

| | |
|---|-----------|
| 第1章 序論 | 1 |
| 1・1 自己同期現象の概要..... | 1 |
| 1・2 自己同期現象の分類..... | 2 |
| 1・3 機械振動分野における研究事例..... | 4 |
| 1・3・1 往復型振動子の場合..... | 4 |
| 1・3・2 回転型振動子の場合..... | 5 |
| 1・4 自己同期現象の応用事例..... | 6 |
| 1・5 エネルギーに基づく解析の潜在的な有効性と従来の研究における問題点..... | 7 |
| 1・6 本論文の構成..... | 8 |
| | |
| 第2章 エネルギー条件に基づく自己同期現象の解析手法 | 10 |
| 2・1 解析モデルおよび運動方程式..... | 10 |
| 2・2 エネルギー条件に基づく解析手法..... | 12 |
| 2・2・1 エネルギーに関する条件式の導出..... | 12 |
| 2・2・2 近似解の導出..... | 14 |
| 2・2・3 近似解の安定判別..... | 17 |
| 2・2・4 同期可能領域の導出..... | 19 |
| 2・3 解析結果..... | 20 |
| 2・3・1 近似精度の検証..... | 20 |
| 2・3・2 同期可能領域を用いた解析..... | 24 |
| 2・4 第2章のまとめ..... | 27 |
| | |
| 第3章 パラメータの影響 | 28 |
| 3・1 不釣り合い量の大きさの影響..... | 28 |
| 3・2 不釣り合い量の大小関係および固定電圧の影響..... | 31 |
| 3・3 モータの内部減衰の影響..... | 35 |
| 3・4 基礎支持の減衰の影響..... | 36 |
| 3・5 第3章のまとめ..... | 37 |

| | |
|--------------------------------------|-----------|
| 第4章 多自由度支持系への拡張 | 38 |
| 4・1 4自由度系 | 38 |
| 4・1・1 解析モデルおよび運動方程式 | 38 |
| 4・1・2 提案手法の適用 | 40 |
| 4・1・2・1 エネルギーに関する条件式の導出 | 40 |
| 4・1・2・2 近似解の導出 | 41 |
| 4・1・2・3 近似解の安定判別 | 43 |
| 4・1・2・4 同期可能領域の導出 | 45 |
| 4・1・3 解析結果 | 46 |
| 4・1・3・1 近似精度の検証 | 46 |
| 4・1・3・2 同期可能領域を用いた解析 | 54 |
| 4・2 5自由度系 | 58 |
| 4・2・1 解析モデルおよび運動方程式 | 58 |
| 4・2・2 提案手法の適用 | 60 |
| 4・2・2・1 エネルギーに関する条件式の導出 | 60 |
| 4・2・2・2 近似解の導出 | 61 |
| 4・2・2・3 近似解の安定判別 | 64 |
| 4・2・2・4 同期可能領域の導出 | 67 |
| 4・2・3 解析結果 | 68 |
| 4・2・3・1 近似精度の検証 | 68 |
| 4・2・3・2 同期可能領域を用いた解析 | 77 |
| 4・3 第4章のまとめ | 80 |
| | |
| 第5章 多自由度支持系における固有振動数の影響 | 81 |
| 5・1 固有振動数の大小関係の影響 | 81 |
| 5・2 異方性の影響 | 87 |
| 5・2・1 5自由度系の場合 | 87 |
| 5・2・2 4自由度系の場合 | 89 |
| 5・3 第5章のまとめ | 92 |

| | |
|--|------------|
| 第 6 章 実機への応用 | 93 |
| 6・1 実験装置 | 93 |
| 6・2 解析モデルおよび運動方程式 | 95 |
| 6・3 提案手法の適用 | 98 |
| 6・3・1 エネルギーに関する条件式の導出 | 98 |
| 6・3・2 近似解の導出 | 98 |
| 6・3・3 近似解の安定判別 | 100 |
| 6・3・4 同期可能領域の導出 | 102 |
| 6・3・5 振幅の推定 | 103 |
| 6・4 解析モデルの妥当性の検証 | 105 |
| 6・5 提案手法の有効性の検証 | 107 |
| 6・6 第 6 章のまとめ | 112 |
| | |
| 第 7 章 結論 | 113 |
| | |
| 謝辞 | 115 |
| | |
| 付録 A1 運動方程式の導出 | 116 |
| A1・1 3 自由度系および 5 自由度系 | 116 |
| A1・2 4 自由度系 | 119 |
| A1・3 振動搬送機を模した実験装置の解析モデル | 121 |
| | |
| 付録 A2 第 2 章の数式の詳細 | 132 |
| | |
| 付録 A3 基礎支持の減衰が散逸エネルギーの条件を満たす領域に与える影響 .. | 133 |
| | |
| 付録 A4 提案手法で用いる式の導出 | 134 |
| A4・1 4 自由度系 | 134 |
| A4・1・1 エネルギーに関する条件式の導出 | 134 |
| A4・1・2 近似解の導出 | 136 |
| A4・1・3 近似解の安定判別 | 140 |

| | | |
|-------------|-----------------|------------|
| A4・2 | 5自由度系 | 142 |
| A4・2・1 | エネルギーに関する条件式の導出 | 142 |
| A4・2・2 | 近似解の導出 | 145 |
| A4・2・3 | 近似解の安定判別 | 150 |
| A4・3 | 実験装置の解析モデル | 155 |
| A4・3・1 | エネルギーに関する条件式の導出 | 155 |
| A4・3・2 | 近似解の導出 | 157 |
| A4・3・3 | 近似解の安定判別 | 161 |
| 参考文献 | | 164 |

第 1 章 序論

1.1 自己同期現象の概要

自己同期現象とは、異なる振動数をもつ複数の非線形自励振動子が結合されると全ての振動子が同一の振動数に引き込まれる現象である⁽¹⁾。この現象を最初に発見したのは光学研究の業績および振り子時計の構築等で有名な Huygens であると言われている⁽²⁾⁽⁴⁾。1665 年の冬、Huygens が木製の梁に吊るされた 2 つの振り子時計を眺めていると、2 つの振り子時計が同じ振動数で反対方向に揺れて同期していることに気づいた。外乱を加えた場合においても短時間で振動数が揃うことを確認した一方で、2 つの時計を 15 フィートほど離れた場合には同様の現象が見られなかったことから、原因は振り子の振動に起因した空気の微小運動ではなく、梁の微小振動による相互作用ではないかと推測した。

自己同期現象の代表例としては、19 世紀中頃に Rayleigh により発見されたオルガンパイプの自励音も有名である⁽⁵⁾。2 つのオルガンパイプを隣り合わせて置きわずかに音程をずらすと同一音を出す場合や、極端な場合には互いの発生音を打ち消し合い振動が停止する (Quenching, 振動の死⁽²⁾) 場合があることを確認した。この現象は Abel らによって実験的に検証され、振動数の差が小さいほど同期しやすいことが確認されている⁽⁶⁾。

上記の例以外でも様々な分野で自己同期現象が確認されている。化学系でも自己同期現象が数多く確認されており、例としては BZ 反応 (Belousov-Zhabotinsky 反応) が挙げられる。吉本らは 2 つの反応槽の溶液を交換することで自己同期現象の発生を確認し、溶液の交換速度により 2 つの反応槽の同期振動数や位相が変わることを示している⁽⁷⁾。

学術面だけでなく、私たちの身の周りにおいても様々な場面で自己同期現象が確認できる⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。生物系においては特に多くの事例が存在するが、とくに有名な現象は概日リズムである。人間をはじめとした哺乳類の概日リズムは 24 時間とは異なる⁽¹⁰⁾が、太陽光が網膜の視床下部路に入ることにより 24 時間にリズムを揃えている⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。不規則な生活等で適切なタイミングに光を浴びることができなければ、概日リズムが適切に整わず体温の低下や睡眠障害等を招くことが研究で明らかになっている⁽¹²⁾。また、生物内のそれぞれの臓器ではたくさんの細胞が同期することにより、心臓が鼓動するといったように全体として 1 つの動きを成すことが知られている⁽³⁾⁽¹⁰⁾。

生物の体内だけでなく、生物間においても自己同期現象が発生する。コウロギ⁽¹³⁾やカエル⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾の鳴き声と同じリズムに揃うのも自己同期現象の一種であり、カエルについては 2 匹が交互に発声する事例⁽¹⁴⁾や、集団における合唱⁽¹⁵⁾などが研究されている。他にも、アジア蛍の集団による同期した発光を扱った研究が多くみられる⁽¹⁶⁾⁽¹⁸⁾。人間同士でも自己同期現象がしばしば発生する。例えば、コンサート内で拍手が揃う事例⁽⁴⁾や、歩調が揃う事例

^{(4),(19)}も自己同期現象であると言われている。2000年のミレニアムブリッジ（イギリス）の振動源となったのは人の歩調が同期したことによる大きな振動であると考えられている⁽¹⁹⁾。また、身近なペットボトル⁽²⁰⁾やろうそく⁽²¹⁾を利用して自己同期現象の発生を確認した例もある。

自己同期現象は現象が確認されるだけでなく、様々な分野において応用されている。本論文と密接に関わる機械振動分野の応用例については後述する。電気電子工学分野では、Ecclesらが周波数のわずかに異なる2つの発振器を結合させると、発振器が同一の周波数で振動することを実験で確認した⁽²²⁾。その後、Appletonとvan der PolがEcclesらの実験を元に、正確な発振器の微弱な振動で強力な発信器の周波数の安定化を可能にした^{(23),(24)}。

一方で自己同期現象を発生させない方が望ましい場合もある。神経振動子が集団で同期するとパーキンソン病の運動障害を引き起こすことが知られている^{(25),(26)}。このように同期させたくない場合は、外部から刺激を加えることによってあえて脱同期させる脳深部刺激療法⁽¹⁰⁾などといった治療法⁽²⁷⁾⁻⁽²⁹⁾が行われている。

以上より、自己同期現象は古くから様々な分野で確認されており、我々の生活を支える重要な現象であるため、統一的な枠組みでその特性を理解しようとする研究もなされてきた。

Pikovskyらは同期発生には結合の強さと周波数デチューニング（ミスマッチ）の重要性を述べている⁽²⁾。結合の強さとは、自己同期現象が発生する際に重要となる振動子間の相互作用の強さを指す。また、周波数デチューニングとはそれぞれの振動子が結合されていないときの振動数の差を表しており、振動数の差が一定範囲（同期領域）に収まれば同期が発生すると述べられている。この同期領域の大きさは結合の強さに依存する。

さらに蔵本らは、力学モデルにおいて自由度の縮減と標準形への変換を行う縮約理論を用いることによって、複雑なモデルであっても単純で同一の形をもつ力学モデルに帰着させられることを示している⁽³⁾。

また、最近では様々な分野の自己同期現象をまとめて取り扱った専門書^{(2),(3),(9),(30)}や、初心者にもわかりやすく説明された一般図書^{(4),(8),(31)}も数多く発行されている。

1.2 自己同期現象の分類

自己同期現象には相互引き込み（相互同期）と強制引き込み（強制同期）の2種類が存在する^{(1),(3)}。前者はそれぞれの自励振動子が及ぼす影響が同程度で、互いに相互作用を及ぼすことにより同期するもので、例としては前述のHuygensの振り子時計やRayleighのオルガンパイプ、生物の細胞、カエルなどの声の同期などがある。後者は影響力の強い振動子

が他の自励振動子に一方向的に影響を及ぼし同期するもので、地球の自転リズムに哺乳類の概日リズムが揃う事象が一例として挙げられる。

また、同期する自励振動子の数も事例ごとに異なり、Huygens の振り子時計のような 2 者間での同期はもちろん、数個の自励振動子間で発生する同期や、生物内の細胞の同期といったように多くの自励振動子間で発生する集団同期がある。

通常自己同期現象と言えば振動子が同じ振動数に引き込まれる場合を指すが、それぞれの振動数が整数比 $m:n$ となって同期する現象も存在する。これを倍数次同期と呼び、通常の 1:1 の同期とは区別する。倍数次同期の例としては井上ら⁽³²⁾および Zhang^{(33),(34)}らの研究が挙げられ、振動ふるいなどに応用することでふるいの精度を向上できることが確認されている^{(35),(36)}。以下では、理論面および応用面の両方で最も基本的かつ重要な 1:1 の回転数比の同期のみを議論の対象とする。

同期発生時の振動数である同期振動数について、主に系の固有振動数に近い値を取る場合を near-resonant、固有振動数から離れた高い値を取る場合を far-resonant あるいは super-resonant と呼んで区別する。同期振動数が系の固有振動数に近い場合には共振状態となるため、系の振幅が増大する。

自己同期現象について語る上では自励振動子間の位相（の差）も重要となる。2 振動子間の同期の場合には同じ位相で振動する場合を同位相(in-phase)で同期するといい、同相同期とも呼ぶ。位相が π だけずれる場合には逆位相(anti-phase)で同期するといい、逆相同期と表現する場合もある⁽³⁾。1.1 節で述べたように、Huygens の振り子時計は逆相同期であると言われている⁽²⁾。2 つの振動子が同一である場合には完全な同位相あるいは逆位相の自己同期現象が発生するが、実際には個体差があることから必ずしも位相差は正確に同位相または逆位相になるとは限らない⁽³⁾。おおよそ同位相あるいは逆位相とみなせる場合には同相同期あるいは逆相同期と呼ぶが、位相差が 0 および π から大きくずれて同期する場合には異相同期(out-of-phase synchronization)と呼ぶ場合がある⁽³⁾。3 振動子以上の場合には全て同じ位相で同期する同相同期をはじめ、振動子が 2 つ以上のグループに分かれグループ内では同位相かつグループ間では位相が異なる場合、全ての振動子が異なる位相で同期する場合が確認されており、振動子の数が増えるにつれて挙動はより複雑になる^{(37),(38)}。

なお、アクティブ制御による同期を利用した Vibrotactor⁽³⁹⁾や振動フィーダ⁽⁴⁰⁾といった Controlled synchronization に関する研究も見られるが、これらは本論文の検討対象としない。

1.3 機械振動分野における研究事例

次に、機械振動分野における研究事例を示す。機械振動分野では、主に往復型および回転型振動子の自己同期現象の特性が研究の対象となっており、以下に示す研究事例の一部については Kapitniak ら^{(37),(38)}、長嶺ら⁽⁴¹⁾、井上ら⁽⁴²⁾によって紹介されている。

1.3.1 往復型振動子の場合

往復型振動子については、Huygens による実験系のモデル化、現象のメカニズム、概周期振動やカオス等の非線形振動の発生に着目している研究が多い。

Blekhman は振り子の系に Poincaré and Lyapunov methods を適用し、自己同期現象の発生条件と安定性に関する近似式を導出している⁽⁴³⁾。この解析における減衰の取り扱いには Jovanovic により再検討され、同位相同期に関して実験と対応する結果が得られている⁽⁴⁴⁾。Bennett らは Huygens の実験の再現を行い、逆位相同期に加えて Beating death（うなりの発生によって振幅が脱進機の作用角度より小さくなり振動が停止する現象）の発生を確認するとともに、線形固有モードの大きさの時間変化に関する解析を行って実験で観察される同期パターンと比較している⁽⁴⁵⁾。Pantaleone はメトロノームを設置した実験において広範囲のパラメータで同位相同期のみが発生したことを報告し、メトロノームを van der Pol 型の駆動力が作用する振り子でモデル化した系に平均法を適用してパラメータが同期発生時の位相に及ぼす影響を調べている⁽⁴⁶⁾。佐藤らはワイヤで吊るされた木製の台に2つのメトロノームが載せられた系を対象として、同期が発生するための台の固有振動数の条件や台の固有振動数と2つのメトロノームの位相差の関係を、数値解析および実験で調べている⁽⁴⁷⁾。この系については、近藤らによってシューティング法により不安定解を含めた詳細な検討がなされ、ホップ分岐点に起因する周期解の不安定領域では概周期振動およびカオスが発生することが示されている⁽⁴⁸⁾。また長嶺らは台が複数の振動子を搭載する系についても取り扱い、振動子間の位相差と台の振幅の関係⁽⁴⁹⁾や、同期振動数と台の減衰比の関係⁽⁵⁰⁾についても調べている。Senator はモード解析的手法を用いて脱進機の励振効果と粘性摩擦の減衰効果の大小関係を解析的に検討し、Huygens の実験で逆位相同期が観察された理由について考察している⁽⁵¹⁾。Willms らは Equivariant bifurcation and normal form theory を用いた解析で解の分岐現象および安定性に対するパラメータの影響を調べ、その結果と Blekhman⁽⁴³⁾、Bennett ら⁽⁴⁵⁾、Pantaleone⁽⁴⁶⁾、Senator⁽⁵¹⁾による結果の対応について述べている⁽⁵²⁾。また、振り子の支持系のモード特性を考慮した解析も行われており、脱進機が間欠的に作用する”Modulating/ intermittent behaviour”の発生が確認されている⁽⁵³⁾。

Kapitaniak らは運動方程式のエネルギー積分により同期発生時のエネルギーの流れを示し、振り子の位相差と振幅の関係式や、減衰が無視できる場合の位相差を近似的に求めている。さらに、部分的に線形化を施した近似解析により同期発生時の位相差に定性的な説明を与えると同時に、脱進機を不連続な駆動力と van der Pol 型の駆動力でモデル化したいずれの系でも自己同期現象、概周期振動およびカオスが発生することを示している⁽⁵⁷⁾。Koluda らは Kapitaniak らが提案した手法を不連続な駆動力が作用する 2 つの二重振り子における自己同期現象に応用し、同期状態における 4 つの振り子の位相差を近似的に求めている⁽⁵⁴⁾。また近年では Dudkowski らが振動子の支持系が並進自由度を持つ場合⁽⁵⁵⁾、回転自由度を持つ場合⁽⁵⁶⁾のそれぞれについて、初期値およびパラメータと発生する同期パターンとの関係を数値計算により求め、得られた結果に対し Kapitaniak らが導出したエネルギーに関する式を用いてエネルギー的な説明を試みている。

また、往復型振動子の中には乾性摩擦特性に起因して振動する系も含まれ、例として駆動ベルト上に置かれた質量ばね系が挙げられる。井上らはスティック・スリップ現象のうち、スティック現象が生じないようにベルトの速度を大きめに設定し、調和外力を加えた場合の強制引き込みとうなりの特性を数値解析と実験により示している⁽⁵⁷⁾。倉本らは、1 自由度系に三次摩擦特性および直線摩擦特性が作用する場合の振動について、平均法や断片線形近似法を用いた解析を行い、振動形態分布や強制引き込みにおける諸特性を明らかにしている⁽⁵⁸⁾⁻⁽⁶⁰⁾。また、小野らはスティック・スリップ振動をともなう 2 つの振動子について実験とシューティング法による数値計算を行い、発生する自己同期現象が 2 自由度線形系の自由振動特性と強い相関があることを明らかにし⁽⁶¹⁾、2 つの振動子の間に適切な結合要素を加えることで同期範囲を拡大できることを確認している⁽⁶²⁾。

1.3.2 回転型振動子の場合

一方、回転型振動子については、自己同期現象のメカニズムに着目した基礎的な研究に加えて機械システムへの応用に着目した研究も多い。

まず、基礎的な研究について述べる。Zhang らはインダクションモータにより同方向に回転する 3 個の不釣り合いロータが面内振動する剛体に設置された系を扱い、系の共振点より遥かに高い振動数の自己同期現象を対象に解析を行っている^{(63),(64)}。ここでは、減衰や自由度の影響の一部を無視して簡潔化した平均法を適用し、駆動トルクや減衰トルクなどの各種トルクの和と差に関する 2 本の条件式と安定性の条件式を近似的に求め、トルクの差の式からは同期しやすさの指標を導出している。これらの条件式および同期しやすさの指標を用いて、周期解とその安定性に及ぼすパラメータの影響を調べている。この手法は

1 つの剛体に任意の向きに回転する複数の不釣り合いロータが設置された系⁽⁶⁵⁾や、複数の剛体からなる系に 2 個の不釣り合いロータが設置された系⁽⁶⁶⁾⁻⁽⁷⁰⁾に対して拡張されている。

Kapitaniak らは回転型振動子の自己同期現象について、すべての振動子が同方向に回転する場合^{(38),(71)}と少なくとも 1 つの振動子が逆方向に回転する場合^{(38),(72)}のそれぞれについて数値シミュレーションを実施し、パラメータと初期値を様々な値に設定した計算を行って系が引き込まれる同期パターンについて調べている。さらに、運動方程式のエネルギー積分により同期発生時のエネルギーバランスを示すとともに、振動子の位相関係に関する近似式を導出して数値シミュレーション結果との対応を調べている。

井上らは不平衡ロータを対象として、ロータの回転軸心が調和振動する系⁽⁷³⁾、自動調心機構を用いた系⁽⁷⁴⁾、ロータが剛体空間に任意に配置された系⁽⁷⁵⁾および衝突を伴う系⁽⁷⁶⁾において発生する、相互同期の発生条件や安定な位相角を平均法⁽⁷⁷⁾を用いて明らかにしている。また、振動ふるいや振動破碎機を想定した 2 振動子モデル⁽⁷⁸⁾や自己同期現象を応用した振動リフト⁽⁷⁹⁾についても研究を行っている。さらに、Paz らは井上らが検討した 2 振動子モデルに準じた系を取り扱い、安定な位相角をハミルトンの原理によって求めることを試みている⁽⁸⁰⁾。また、長嶺らは板ばねで支持された水平台の上で複数の剛体ロータが支持系の危険速度を通過する場合の挙動を実験と解析で調べ、危険速度通過後には振動子が逆相同期を行い振動が小さくなることを示している⁽⁸¹⁾。

盆子原らは DC モータにより同方向に回転する不釣り合いロータを搭載した 2 個の剛体からなる系で発生する自己同期現象について、剛体間を結合するばねの剛性が自己同期現象に及ぼす影響を実験とシューティング法による数値計算で明らかにしている⁽⁸²⁾。さらに森らは、この系における自己同期現象の基本的な特性を非線形不減衰系の周期運動で説明できることを示している⁽⁸³⁾。

1.4 自己同期現象の応用事例

次に、自己同期現象の応用を目的とした研究について簡単に述べる。振動機械においては 1 つの大きなモータを用いる代わりに複数の小さなモータを用いることで、同様の加振力を得ながら加振源を分散させて 1 つあたりの軸受の負荷を低減できることが知られており、複数のモータを同位相に回転させて加振力を得る振動機械も多い⁽⁴³⁾。この複数のモータの回転数を揃えるために自己同期現象が用いられることがあり、自己同期現象を応用した振動機械については不釣り合いロータの同期回転を振動機械の加振源に利用したシステムが主に提案されている。Blekhman が振動ふるいや振動搬送機への応用に言及しているほか⁽⁴³⁾、Zhang らは、振動破碎機への応用に向けて 2 個の不釣り合いロータの自己同期現象により 1 個のローラを同期回転させる装置を⁽⁷⁰⁾、近藤らは推進装置を⁽⁸⁴⁾、盆子原らは自

己同期現象を利用した振動ランマの装置を⁽⁶⁵⁾それぞれ作製している。また、Zhang らは振り子に2つの回転型振動子を取り付け同期させることで振り子を振動させ、さらに2つの振り子を同期させることにより、ジョークラッシャーへの応用を試みている^{(86),(87)}。さらに、特定のロータに対するエネルギー供給が停止した場合でも同期回転を継続できる点^{(63),(64),(88),(89)}や、それを利用した省エネルギー化⁽⁷⁰⁾も自己同期現象を応用した振動機械の利点として挙げられている。

自己同期現象を振動機械に応用する場合は同期振動数が重要となる。固有振動数に近い同期振動数で同期させると振動子を搭載した剛体の振幅が増大するため、遠心脱水機や長距離搬送用の振動搬送機などは固有振動数近傍の同期振動数で駆動される。これに対し、例えば振動ふるいの場合には、固有振動数よりも高い同期振動数で自己同期現象が利用されている⁽⁶⁴⁾。また、系の振幅は同期振動数と振動子間の位相差で決まる加振力に依存することから、振動子間の位相差も重要であり、互いの影響を強め合って大きな振動を発生させたい場合には同位相で、一方で互いの影響を弱め合って振動を小さくしたい場合には逆位相で同期させることが多い。

1.5 エネルギーに基づく解析の潜在的な有効性と従来の研究における問題点

自己同期現象への十分な理解と自己同期現象を応用した振動機械の合理的な設計を実現するためには、現象の発生メカニズムを解明することが必要である。同期発生時には振動子間の相互作用によるエネルギーのやり取りが行われていると考えられることから、自己同期現象の発生メカニズムや特性を考える上では、エネルギーの視点に基づく解析が有効である可能性が高い。その有効性について調べるために、本論文では2つの回転型振動子の自己同期現象を対象に解析を実施する。

上述のように、これまでに回転型振動子の自己同期現象に対してエネルギーの視点から解析を行った例に Kapitaniank らの研究があり^{(38),(71),(72)}、運動方程式のエネルギー積分から得られる式を用いて同期発生時のエネルギーの流れを示しているほか、同期発生時の位相関係を与える式を導出している。ところが、位相関係を与える式の導出では減衰と駆動力の影響は十分に小さいとして無視しているため、不減衰系の自由振動解に相当する特性は求められているものの、数値シミュレーションで観察される自己同期現象の特性を十分に表すことはできていない。自己同期現象は本来的に減衰と駆動力の間でエネルギーの散逸と供給のバランスが取れた状態で生じることを考えれば、その発生メカニズムと特性の把握には減衰と駆動力の影響を考慮した解析が必要であると考えられる。また、Zhang ら⁽⁶³⁾⁻⁽⁷⁰⁾は回転型振動子の自己同期現象に対して、同期状態で満足する条件式をトルクの観点から求めることでパラメータの影響を考察しているが、近似解を直接求めることや、同期発生

に必要なパラメータの範囲を導出することには主眼を置いていない。自己同期現象の発生メカニズムの解明および振動機械への応用を目指すにあたっては、解全体に対する検証を行ったうえで、パラメータが自己同期現象に与える影響を明確に示す必要がある。

また、自己同期現象を応用した振動機械の設計にあたっては、同期振動数や位相差などといった同期状態に関する値が目標値となるように、適切にパラメータを設定する必要がある。例えば、振動搬送機では搬送に用いる剛体（トラフ）が大振幅となるように、同期振動数を固有振動数近傍に設定し、振動子が同位相となるような設計にすることが求められる。しかしながら現状ではパラメータが同期状態に与える影響が不明であり、所望の同期状態とするためには試行錯誤的にパラメータを探さなければならない。したがって、効率的な振動機械の設計を行うためには、パラメータと同期状態の関係を明らかにすることが重要である。

1-6 本論文の構成

このような視点に基づいて、本論文では剛体に DC モータで駆動される 2 個の回転型振動子が搭載された系を用いて、減衰や駆動力の影響まで含めエネルギー的に考察できる手法を提案し、その有効性検証を行う。

提案手法の概要は以下のとおりである。まず、運動方程式のエネルギー積分を行うことで、自己同期発生時に満たすべき 2 本の条件式を導出する。1 本目は、減衰と駆動力による散逸エネルギーに関する式であり、2 本目は振動子間の相互作用によってやり取りされるエネルギーに関する式である。この 2 本の条件式に近似を適用した上で連立して解くことによって、周期解の近似計算と調和バランス法に基づく安定判別を組み合わせた効率的な解析が可能となる。さらには、2 本の条件式を満たすパラメータの関係式を解析的に導出することで、自己同期現象が発生しうる領域を把握できる。これにより、近似解を求めるまでもなくパラメータと同期状態の関係を大域的に明らかにできる。

以下に本論文の構成を示す。

第 2 章では、並進 1 自由度系に 2 つの回転型振動子が搭載された最も基本的なモデルである、2 振動子 3 自由度モデルを対象としてエネルギーに関する 2 本の条件式の導出とそれらを用いた解析手法の提案を行う。その後、提案手法によって求められた近似解をシューティング法により得られる高精度な数値解と比較することで提案手法の妥当性を検証する。さらには 2 本の条件式を満足するパラメータの関係式を用いることで、周期解の存在領域が把握できることを示す。

第 3 章では第 2 章で示した提案手法を数種類のパラメータ設定に対して適用し、それぞれのパラメータが自己同期現象に与える影響を包括的に把握できることを示す。

第4章では多自由度支持系に回転型振動子が搭載された系に提案手法を拡張するために、直交2方向の並進自由度を有する2自由度支持系に2つの回転型振動子が搭載された4自由度モデル、および直交2方向の並進自由度および回転自由度を有する3自由度支持系に2つの回転型振動子が搭載された5自由度モデルを取り扱う。4自由度モデルおよび5自由度モデルにおける近似解の精度を検証したうえで、3自由度モデルと同様にパラメータの影響を見通しよく解析できることを示す。

第5章では第4章で拡張した提案手法を元に、多自由度支持系における複数の固有振動数が自己同期現象に与える影響を考察する。固有振動数の大小関係を入れ替えた場合および固有振動数を近づけて異方性を小さくした場合の影響をそれぞれ検討する。

第6章では自己同期現象を応用した振動機械に提案手法を応用するための検証実験を実施する。振動搬送機を模した実験機を作製して実験を行い、解析モデルにより得られる数値計算結果と比較することで、解析モデルの妥当性を検証する。その後、提案手法により2本の条件式を満足するパラメータの範囲を求め、実機においてもパラメータの影響を提案手法により把握できることを示す。

第7章では、第1章から第6章までの内容を総括し、結論とする。

以上が本論文の本編であり、本編の補足内容を付録に示す。

付録A1では、第2章、第4章および第6章で用いた運動方程式の導出過程を示す。

付録A2では、第2章で導出したエネルギーに関する式の詳細を掲載する。

付録A3では、基礎支持の減衰が散逸エネルギーに関する条件を満たす領域に与える影響について簡単に述べる。

付録A4では、第4章および第6章で用いたエネルギーに関する条件式および近似解の安定判別で用いる式の導出過程を示す。

第2章 エネルギー条件に基づく自己同期現象の解析手法

本章では、回転型振動子に発生する自己同期現象のメカニズムについて検討するために、回転型振動子の中でも最も基本的なモデルである、並進1自由度を有する剛体を介して2個の振動子が結合された2振動子3自由度モデルを対象として、エネルギー条件に基づいた自己同期現象の解析手法を提案する。

提案手法では、減衰と駆動力による散逸エネルギーと励振エネルギーの間のバランスを表す式と、同期発生のために相互作用でやり取りされるエネルギーが満たすべき式の2本の条件式を導出し、それを基に次の2種類の解析を行う。一つは2本の条件式を連立させた効率的な周期解の近似計算であり、これによって系で発生しうる自己同期現象を簡潔かつ高精度に把握することができる。求められた近似解はシューティング法による高精度計算結果との間で安定性まで含めた全体的な比較を行うことで、妥当性を十分に検証する。もう一つは、周期解の存在限界を表す関係式を用いた解析である。これにより自己同期現象が発生しうるパラメータ範囲の解析的かつ大域的な明確化が可能となり、パラメータが現象に及ぼす影響を見通しよく解析できるようになる。これら2種類のアプローチは自己同期現象のメカニズムおよび特性の解明、ならびに振動機械の設計への応用において有用な解析ツールになると考えられる。

2・1 解析モデルおよび運動方程式

本章で用いる解析モデルを図2.1に示す。このモデルでは、図のように、ばね k_x および減衰 c_x によって x 軸方向に支持された質量 M_b のブロックに、質量 m_1, m_2 および不釣り合い長さ r_1, r_2 のおもりを有する2つのDCモータが同一水平面内で回転するように設置されている。以下では、左右のモータをそれぞれモータ1およびモータ2と呼び、不釣り合いおもりを付加する回転体の慣性モーメントをそれぞれ J_{r1}, J_{r2} とする。ブロックは回転せずに不釣り合いおもりと同一水平面内で x 軸方向の並進運動を行う。静的平衡状態を基準としたブロックの右向き変位を x で表し、モータ1およびモータ2の角変位をそれぞれ図のような反時計回りを正とする角度 ϕ_1 および ϕ_2 で表す。さらに、モータ1およびモータ2の印加電圧をそれぞれ e_1 および e_2 で表し、モータの電機子抵抗 r_a 、トルク定数 K_t 、逆起電力定数 K_E の値はモータ1およびモータ2で等しいものとする。

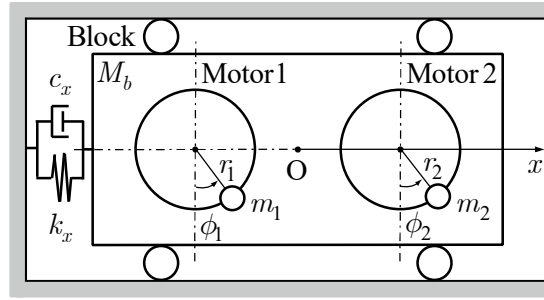


Fig. 2.1 Analytical model

ブロックの並進運動およびモータの回転運動に関する運動方程式は次式のように求められる（運動方程式の導出過程については付録 A1 を参照されたい）。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\ J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 &= A e_1 - m_1 r_1 \ddot{x} \cos \phi_1 \\ J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 &= \sigma A e_2 - m_2 r_2 \ddot{x} \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここに、

$$M \triangleq M_b + m_1 + m_2, \quad J_1 \triangleq m_1 r_1^2 + J_{r1}, \quad J_2 \triangleq m_2 r_2^2 + J_{r2}, \quad A \triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a} \quad (2.2)$$

であり、 A はモータの電圧とトルクの変換係数を、 B はモータの内部減衰を表す。ただし、 $e_1 > 0, e_2 > 0$ であり、 $\sigma = 1$ のとき 2 つのモータは同方向に回転し、 $\sigma = -1$ のとき逆方向に回転する。

いくつかの無次元パラメータを導入し、式(2.1)を完全に無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \xi'' + 2\zeta \nu \xi' + \xi &= -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \\ \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' &= \varepsilon_1 - \mu_1 \nu^2 \xi'' \cos \phi_1 \\ \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' &= \sigma \varepsilon_2 - \mu_2 \nu^2 \xi'' \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p &\triangleq \frac{J_p}{Mr^2}, \quad \varepsilon_p \triangleq \frac{A}{Mr^2 \omega_x^2} e_p, \quad \mu_p \triangleq \frac{m_p r_p}{Mr} \quad (p=1,2) \\ \beta &\triangleq \frac{B}{Mr^2 \omega_x}, \quad \zeta \triangleq \frac{c_x}{2\sqrt{Mk_x}}, \quad \xi \triangleq \frac{x}{r}, \quad \nu \triangleq \frac{\omega}{\omega_x}, \quad \tau \triangleq \omega t \\ \omega &\triangleq \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_x \triangleq \sqrt{\frac{k_x}{M}}, \quad ' \triangleq \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

である。 T は同期状態における式(2.1)の周期解（以下、同期解と呼ぶ）の周期であり、式(2.3)の同期解の無次元周期は 2π となる。また、 r は代表長さである。無次元パラメータおよび変数については、 α_p は無次元慣性モーメント、 ε_p は無次元電圧、 μ_p は無次元不釣り合い量、 β はモータの無次元内部減衰、 ζ は基礎支持の減衰比、 ξ はブロックの無次元変位、 ν は同期振動数比、 τ は無次元時間である。

図 2.1 における回転型振動子の自己同期現象の特性は、式(2.3)の同期解を解析することで解明される。

2・2 エネルギー条件に基づく解析手法

本節では、第 2.1 節で導出した運動方程式を元に、同期状態におけるエネルギーの流れについて考察する。エネルギー積分により得られる式から自己同期現象が発生するためにエネルギーが満たすべき 2 本の条件式を求め、さらに近似を導入することで積分を実行した後の条件式を解析的に求める。その後、それらの条件式から近似解が求められることを示し、得られる解の安定判別法について述べる。さらに、この 2 本の条件式を満たす同期解の存在限界を表す簡潔な式を求める。

2・2・1 エネルギーに関する条件式の導出

本項では、同期解を仮定した運動方程式のエネルギー積分により自己同期現象が発生している状態で各種のエネルギーの間に成立する 2 本の条件式を導出するとともに、その物理的な意味について考察する。

以下の議論において、 ξ, ϕ_1 および ϕ_2 は同期解を表すものとする。このとき、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \xi(\tau+2\pi) &= \xi(\tau), \quad \phi_1(\tau+2\pi) = \phi_1(\tau) + 2\pi, \quad \phi_2(\tau+2\pi) = \phi_2(\tau) + 2\pi\sigma \\ \xi'(\tau+2\pi) &= \xi'(\tau), \quad \phi_1'(\tau+2\pi) = \phi_1'(\tau), \quad \phi_2'(\tau+2\pi) = \phi_2'(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式(2.3)の第 1 式、第 2 式および第 3 式の両辺にそれぞれ ξ', ϕ_1' および ϕ_2' を乗じた上で、 τ について τ_0 から $\tau_0 + 2\pi$ まで積分すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_\xi + \Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\ \Delta E_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} \\ \Delta E_{\phi_2} + \Delta D_{\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式(2.6)の詳細は付録 A2 に示す. ΔE_ξ , ΔE_{ϕ_1} および ΔE_{ϕ_2} はそれぞれブロック, モータ 1 およびモータ 2 の $\tau = \tau_0$ から $\tau_0 + 2\pi$ の間における (無次元) 力学的エネルギーの変化量, ΔD_ξ , ΔD_{ϕ_1} および ΔD_{ϕ_2} はそれぞれブロックの粘性減衰, モータ 1 の内部減衰およびモータ 2 の内部減衰で消費される (無次元) 散逸エネルギー, ΔR_{ϕ_1} および ΔR_{ϕ_2} はそれぞれモータ 1 およびモータ 2 に対して外部電源の印加電圧により供給される (無次元) 励振エネルギーを表す. $\Delta T_{\xi\phi_1}$ と $\Delta T_{\phi_1\xi}$ はブロックとモータ 1 の間に作用する内力によるモータ 1 からブロックへのエネルギー移動量と, ブロックからモータ 1 へのエネルギー移動量を表す. 同様に, $\Delta T_{\xi\phi_2}$ と $\Delta T_{\phi_2\xi}$ はブロックとモータ 2 の間に作用する内力によるモータ 2 からブロックへのエネルギー移動量と, ブロックからモータ 2 へのエネルギー移動量を表す.

力学的エネルギーの変化量について, 式(2.5)および式(A2.1)より次式が成立する.

$$\Delta E_\xi = \Delta E_{\phi_1} = \Delta E_{\phi_2} = 0 \quad (2.7)$$

さらに, ブロックと各モータの間のエネルギー移動量について, 式(2.5)および式(A2.1)より次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} &= -\left[\mu_1\nu^2\xi'\phi_1'\cos\phi_1\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\ \Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} &= -\left[\mu_2\nu^2\xi'\phi_2'\cos\phi_2\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

したがって,

$$\Delta T_{\xi\phi_1} = -\Delta T_{\phi_1\xi}, \quad \Delta T_{\xi\phi_2} = -\Delta T_{\phi_2\xi} \quad (2.9)$$

となる. すなわち, 同期状態においてモータ 1 からブロックへと, ブロックからモータ 1 へと流れるエネルギー移動量は互いに逆符号の関係にあり, 同様にモータ 2 からブロックへと, ブロックからモータ 2 へと流れるエネルギー移動量も互いに逆符号の関係にある.

式(2.6)に式(2.7)および式(2.9)を代入して整理すると, ブロックおよび各モータそれぞれの 1 周期あたりのエネルギー積分は,

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{\phi_2} + \Delta T_{\xi\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

となり, モータ 1 からブロック, モータ 2 からブロックへと移動したエネルギーがブロックの粘性減衰で消費されること, 各モータにおいて内部抵抗で消費されるエネルギーとブ

ロックに移動するエネルギーの和が印加電圧により供給される励振エネルギーと等しいことがわかる。

以上より、システム全体の1周期あたりのエネルギー積分は、式(2.10)の3式の和を取ることによって、次式のように求められる。

$$\Delta D_{\xi} + \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (2.11)$$

このように、1周期の間に印加電圧によって供給される全ての励振エネルギーが、ブロックの粘性減衰と2つのモータの内部抵抗で消費されることがわかる。

一方、式(2.10)の第2式から第3式を辺々引いて整理すると、次式が求められる。

$$\Delta T_{\xi\phi_1} - \Delta T_{\xi\phi_2} = (\Delta R_{\phi_1} - \Delta D_{\phi_1}) - (\Delta R_{\phi_2} - \Delta D_{\phi_2}) \quad (2.12)$$

これは、それぞれのモータの励振エネルギーとモータの内部抵抗で消費されるエネルギーの差、すなわち実質的なモータの励振エネルギーの差がそれぞれのモータからブロックへのエネルギー移動量の差に等しいことを意味している。このように、ブロックを介してモータ間でエネルギーバランスを取ることによって自己同期現象が実現しているものと考えられる。

2・2・2 近似解の導出

本項では、状態量の近似解を仮定して式(2.11)および式(2.12)に含まれる積分を実行した後の条件式を解析的に求め、それらを用いて近似解を求める方法を述べる。

式(2.3)の厳密解を求めて式(2.11)および式(2.12)における各項を解析的に求めることは困難である。そこで、同期状態において、無次元時間 τ に関する周期関数であるモータ1とモータ2の角速度 ϕ_1' および ϕ_2' の変動量が一定成分に比べて小さいものと仮定し、2つのモータの角変位 ϕ_1 および ϕ_2 に関して次のような近似を導入する。

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 = \tau \\ \phi_2 = \sigma(\tau + \theta) \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

ここに、 θ は ϕ_1 と ϕ_2 との間の位相差を表す未知の定数である。さらに、同期解の角速度 ω も未知であることから、式(2.4)より同期振動数比 ν も未知の定数となる。

式(2.13)の近似を導入すると、ブロックの運動方程式(式(2.3)の第1式)は次式のようになる。

$$\nu^2 \xi'' + 2\zeta\nu\xi' + \xi = \nu^2 [\mu_1 \sin \tau + \sigma\mu_2 \sin(\tau + \theta)] \quad (2.14)$$

式(2.14)より、ブロックの変位 ξ の特解（同期解）が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{c1} \cos \tau + \xi_{s1} \sin \tau + \sigma [\xi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \xi_{s2} \sin(\tau + \theta)] \\ \xi_{c1} &\triangleq -\frac{2\zeta\mu_1\nu^3}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \xi_{s1} \triangleq \frac{\mu_1\nu^2(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\ \xi_{c2} &\triangleq -\frac{2\zeta\mu_2\nu^3}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \xi_{s2} \triangleq \frac{\mu_2\nu^2(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

式(A2.1)および式(2.15)より、式(2.13)の近似を導入したときの1周期あたりの散逸エネルギーおよびエネルギー移動量は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2} \\ \Delta T_{\xi\phi_1} &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta S_{\xi\phi_1} \\ \Delta T_{\xi\phi_2} &= \Delta D_{\xi\phi_2} + \Delta S_{\xi\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{\xi\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi\zeta\nu^5(\mu_1^2 + \sigma\mu_1\mu_2 \cos \theta)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \Delta D_{\xi\phi_2} \triangleq \frac{2\pi\zeta\nu^5(\mu_2^2 + \sigma\mu_1\mu_2 \cos \theta)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\ \Delta S_{\xi\phi_1} &\triangleq \Delta S, \quad \Delta S_{\xi\phi_2} \triangleq -\Delta S, \quad \Delta S \triangleq -\frac{\sigma\pi\mu_1\mu_2\nu^4(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

である。

このように、2つのモータからブロックへのエネルギー移動量 $\Delta T_{\xi\phi_1}$ 、 $\Delta T_{\xi\phi_2}$ は、それぞれブロックの散逸エネルギー ΔD_ξ を補填するためのエネルギー $\Delta D_{\xi\phi_1}$ 、 $\Delta D_{\xi\phi_2}$ と、ブロックを介してモータ間でやり取りされ、自己同期現象が発生するためのエネルギーバランスに寄与するエネルギー $\Delta S_{\xi\phi_1}$ 、 $\Delta S_{\xi\phi_2}$ の2種類からなることがわかる。式(2.17)における ΔS はモータ1からモータ2へと流れる方向を正として1周期間にモータ間でやり取りされるエネルギー量を表しており、以下ではこれを同期エネルギーと呼ぶ。

式(2.16)および式(2.17)を考慮すれば、式(2.10)の同期状態における各種のエネルギーが満たすべき条件は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta S &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{\phi_2} + \Delta D_{\xi\phi_2} - \Delta S &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

ここで、

$$\Delta D_{\phi_1} = \Delta D_{\phi_2} = 2\pi\beta\nu \quad (2.19)$$

である。

式(2.18)の第1式は、それぞれのモータからブロックへと流れたエネルギーのうち散逸エネルギーの補填分がブロックの減衰で消費されることを表し、式(2.15)の ξ に対しては ν および θ の値によらず成立する。式(2.18)の第2式および第3式はそれぞれのモータの内部減衰により散逸されるエネルギー、モータからブロックに流れブロックの減衰で消費されるエネルギー、そしてモータからブロックを介してもう一方のモータへと流れる同期エネルギーの和が印加電圧による励振エネルギーと等しいことを表す。式(2.18)の第2式および第3式より、同期エネルギー ΔS は一方のモータのエネルギー不足分を補うために、もう一方のモータから移動するエネルギーであることがわかる。

式(2.18)の3式の和を取ると式(2.11)に対応する式が得られ、式(A2.1)、式(2.17)および式(2.19)より次式のようになる。

$$\frac{2\pi\zeta\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma\mu_1\mu_2 \cos\theta)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 4\pi\beta\nu = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (2.20)$$

これが、自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。式(2.20)より同期状態における振動数比 ν と位相差 θ によって全体の散逸エネルギーが決まり、この全体で散逸されるエネルギー分を印加電圧による励振エネルギーで補填していることがわかる。

一方、式(2.12)に式(2.16), (2.17), (2.19)を代入すると

$$(\Delta D_{\xi\phi_1} - \Delta D_{\xi\phi_2}) + 2\Delta S = \Delta R_{\phi_1} - \Delta R_{\phi_2} \quad (2.21)$$

となる。式(2.16)および式(2.17)より式(2.21)の左辺は $\Delta T_{\xi\phi_1} - \Delta T_{\xi\phi_2}$ と等しいので、式(2.21)はそれぞれのモータからブロックへのエネルギー移動量の差が励振エネルギーの差と等しくなるように、モータ間で同期エネルギー ΔS のやり取りが行われることを示している。

式(2.21)に式(A2.1)および式(2.17)を代入すると、

$$\frac{2\pi\zeta\nu^5(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} - \frac{2\sigma\pi\mu_1\mu_2\nu^4(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \sin\theta = 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (2.22)$$

となり、式(2.12)に対応する式が得られる。これが、自己同期発生時の同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。

以上より，式(2.20)および式(2.22)の2本の式が，式(2.13)および式(2.15)の ϕ_1 ， ϕ_2 および ξ が同期状態を表す近似解であるためのエネルギー的な条件式となる。

式(2.20)および式(2.22)を同期振動数比 ν および位相差 θ について解くことにより同期解が求められる。本論文ではモータ2の無次元電圧 ε_2 を固定してモータ1の無次元電圧 ε_1 を変化させた場合の解析を行うが，その際に ε_1 の設定値ごとに ν および θ を求めようとするとき非線形の連立方程式を解く必要があり，数値解しか得られない。そこで， ν を設定値として ε_1 および θ について解くことを考える。そのために，式(2.20)および式(2.22)をそれぞれ次のように変形する。

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon_1 - d_0}{d_c}, \quad \sin\theta = \frac{\varepsilon_1 - s_0}{s_s} \quad (2.23)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} d_c &\triangleq \frac{2\sigma\mu_1\mu_2\zeta\nu^5}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, & d_0 &\triangleq \frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2)\zeta\nu^5}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 2\beta\nu - \varepsilon_2 \\ s_s &\triangleq -\frac{\sigma\mu_1\mu_2\nu^4(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, & s_0 &\triangleq \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)\zeta\nu^5}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

である。式(2.23)を $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入して θ を消去すると ε_1 に関する2次方程式が得られる。これを解くと

$$\varepsilon_1 = \frac{d_c^2 s_0 + d_0 s_s^2 \pm d_c s_s \sqrt{D}}{d_c^2 + s_s^2} \quad (2.25)$$

となる。ここに，

$$D \triangleq d_c^2 + s_s^2 - (d_0 - s_0)^2 \quad (2.26)$$

であり， $D \geq 0$ が成り立つとき，式(2.20)および式(2.22)を満たす ε_1 は式(2.25)で与えられる。

さらに，得られた ε_1 と式(2.23)から θ が求められる。

2・2・3 近似解の安定判別

自己同期現象の特性を十分に把握するためには，安定判別を行って同期解の安定性をも明らかにする必要がある。解の安定判別に必要な式(2.3)の変分方程式は以下のように導出される。

$$\left. \begin{aligned}
\nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta \nu \delta \xi' + \delta \xi &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
&\quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
\alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' &= -\mu_1 \nu^2 (\delta \xi'' \cos \phi_1 - \xi'' \delta \phi_1 \sin \phi_1) \\
\alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' &= -\mu_2 \nu^2 (\delta \xi'' \cos \phi_2 - \xi'' \delta \phi_2 \sin \phi_2)
\end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

式(2.27)に対して式(2.13)のような一定角速度近似を導入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta \nu \delta \xi' + \delta \xi &= -\mu_1 \nu^2 (\delta \phi_1'' \cos \tau - 2\delta \phi_1' \sin \tau - \delta \phi_1 \cos \tau) \\
&\quad - \mu_2 \nu^2 [\delta \phi_2'' \cos(\tau + \theta) - 2\delta \phi_2' \sin(\tau + \theta) - \delta \phi_2 \cos(\tau + \theta)] \\
\alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' &= -\mu_1 \nu^2 (\delta \xi'' \cos \tau - \xi'' \delta \phi_1 \sin \tau) \\
\alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' &= -\mu_2 \nu^2 [\delta \xi'' \cos(\tau + \theta) - \xi'' \delta \phi_2 \sin(\tau + \theta)]
\end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

式(2.28)の解析にあたり、微小変分 $\delta \xi$ を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned}
\delta \xi &= \delta \xi_c \cos \tau + \delta \xi_s \sin \tau \\
\delta \xi' &= \delta \xi_c' \cos \tau + \delta \xi_s' \sin \tau - \delta \xi_c \sin \tau + \delta \xi_s \cos \tau \\
\delta \xi'' &= \delta \xi_c'' \cos \tau + \delta \xi_s'' \sin \tau - 2\delta \xi_c' \sin \tau + 2\delta \xi_s' \cos \tau - \delta \xi_c \cos \tau - \delta \xi_s \sin \tau
\end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

ここに、 $\delta \xi_c, \delta \xi_s$ は無次元時間 τ の関数である。式(2.29)を式(2.28)に代入して調和バランスの原理を適用し、第1式では $\cos \tau$ および $\sin \tau$ の係数の部分を、第2式と第3式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
& M\ddot{\xi} + C\dot{\xi} + K\xi = \mathbf{0} \\
& \xi = (\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T \\
& M \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 & 0 & \mu_1\nu^2 & \mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & \nu^2 & 0 & -\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ \mu_1\nu^2 & 0 & 2\alpha_1\nu^2 & 0 \\ \mu_2\nu^2 \cos\theta & -\mu_2\nu^2 \sin\theta & 0 & 2\alpha_2\nu^2 \end{bmatrix} \\
& C \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta\nu & 2\nu^2 & 0 & -2\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ -2\nu^2 & 2\zeta\nu & -2\mu_1\nu^2 & -2\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & 2\mu_1\nu^2 & 2\beta\nu & 0 \\ 2\mu_2\nu^2 \sin\theta & 2\mu_2\nu^2 \cos\theta & 0 & 2\beta\nu \end{bmatrix} \\
& K \triangleq \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & 2\zeta\nu & -\mu_1\nu^2 & -\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ -2\zeta\nu & 1-\nu^2 & 0 & \mu_2\nu^2 \sin\theta \\ -\mu_1\nu^2 & 0 & \mu_1\nu^2 \Xi_1 & 0 \\ -\mu_2\nu^2 \cos\theta & \mu_2\nu^2 \sin\theta & 0 & \mu_2\nu^2 \Xi_2 \end{bmatrix} \\
& \Xi_1 \triangleq \xi_{s1} + \sigma(\xi_{s2} \cos\theta - \xi_{c2} \sin\theta) \\
& \Xi_2 \triangleq \xi_{s2} + \sigma(\xi_{s1} \cos\theta + \xi_{c1} \sin\theta)
\end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

さらに、式(2.30)を次式のように定数係数の1階常微分方程式に変換する。

$$\left. \begin{aligned}
& \eta' = A\eta \\
& \eta \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

同期解の安定判別は、 A の固有値として得られる特性指数から判別できる。すなわち、すべての特性指数の実部が負であれば安定、一つでも正のものがあれば不安定である。なお、 $\det K = 0$ であるので、 A の固有値の少なくとも一つは零であることがわかる。これは自律系にみられる特徴である。

2・2・4 同期可能領域の導出

本項では、2.2.2項で導出したエネルギーに関する2本の条件式(式(2.20)および式(2.22))を満たす同期解の存在限界を表す関係式を求める。

式(2.20)において、 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから次式が得られる。

$$\frac{\zeta\nu^5(\mu_1 - \mu_2)^2}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 2\beta\nu \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \frac{\zeta\nu^5(\mu_1 + \mu_2)^2}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 2\beta\nu \quad (2.32)$$

この関係式は、2つのモータに印加される無次元電圧の和が式(2.32)の範囲を外れると、システム全体で励振エネルギーと散逸エネルギーとの間のバランスを取ることが不可能になり、自己同期現象が発生できなくなることを意味している。

また、式(2.22)について、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であることから次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\zeta \nu^5 (\mu_1^2 - \mu_2^2)}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta \nu)^2} - \frac{\mu_1 \mu_2 \nu^4 |1 - \nu^2|}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta \nu)^2} \\ & \leq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq \frac{\zeta \nu^5 (\mu_1^2 - \mu_2^2)}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta \nu)^2} + \frac{\mu_1 \mu_2 \nu^4 |1 - \nu^2|}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta \nu)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

この関係式は、2つのモータに印加される無次元電圧の差が式(2.33)の範囲を外れると、同期するために必要なモータ間のエネルギー移動量が式(2.17)の同期エネルギー ΔS でやり取りできる量よりも大きくなり、自己同期現象が発生できなくなることを意味している。

同期解が存在する場合には、無次元電圧 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および同期振動数比 ν は必ず式(2.32)と式(2.33)を同時に満足する範囲内に存在するので、この範囲内の領域（以下、同期可能領域と呼ぶ）でのみ自己同期現象は発生しうる。次節および第3章で示すように、式(2.32)、式(2.33)および同期可能領域を用いることでパラメータが自己同期現象に及ぼす影響を見通しよく解析することが可能となる。

2・3 解析結果

本節では、2.2節で提案した2つの解析法の有効性について検証する。その一つは2.2.2項および2.2.3項で示した近似解の効率的な計算法およびその安定判別法であり、他の一つは、2.2.4項で示した同期解の存在限界を表す関係式を用いた解析法である。

2・3・1 近似精度の検証

ここでは、同方向に回転する2個のモータを対象として、後述するパラメータ設定に対する同期解を2.2.2項および2.2.3項で述べた手法で求めて安定判別を行う。さらに、得られた同期解およびその安定判別の結果を数値積分に基づく高精度な数値解法の一つであるシューティング法の結果と比較することにより計算精度を検証する。シューティング法の数値積分にはルンゲクッタギル法を適用し、1周期あたりの分割数を1024として倍精度計算を行った。また、同期解の初期値および周期を逐次近似計算によって求める際の収束判定誤差は 10^{-12} 以下とした。本章に示す解析結果において用いたパラメータは表2.1の通りである。これらのパラメータのうち、 $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1$ および μ_2 は文献⁽⁸²⁾で扱われている実験

Table 2.1 System parameters

| | | | | | |
|------------|--------------------|---------|--------------------|---------|----------------------|
| α_1 | 4×10^{-2} | μ_1 | 3×10^{-2} | β | 3.4×10^{-3} |
| α_2 | 5×10^{-2} | μ_2 | 5×10^{-2} | ζ | 5×10^{-2} |

装置を元に設定しているが、2つの回転子のパラメータが異なる場合でも議論が可能であることを示すために α_1, α_2 および μ_1, μ_2 はそれぞれ異なる値に設定した。他のパラメータの値は実際の系から直接的に求めたものではないが、実際の系で取りうる値を考慮して設定した。

モータ2の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ に固定した状態でモータ1の無次元電圧 ε_1 を変化させながら提案手法により同期解の計算を行ったところ、 $\nu > 1$ および $\nu < 1$ に分かれた範囲にそれぞれ1本ずつ解分枝が求められた。結果を図2.2に示す。上下の図の横軸はいずれもモータ1の無次元電圧 ε_1 であり、縦軸は上図では同期振動数比 ν 、下図ではモータ1と

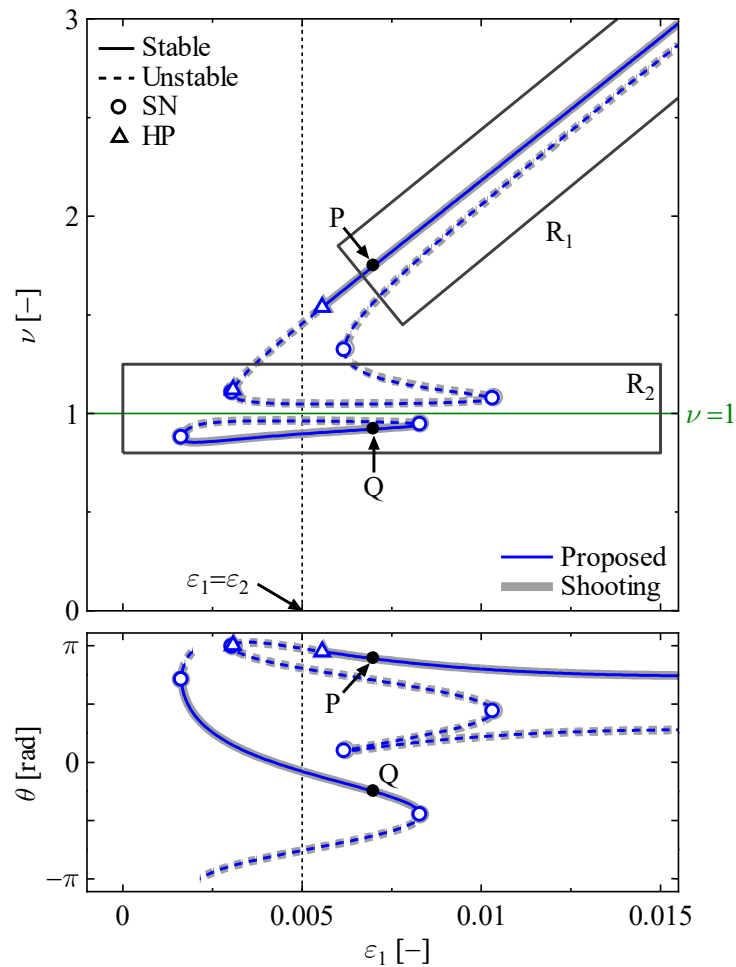


Fig. 2.2 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the shooting method

モータ2の位相差 θ である。青色の細線は提案手法で求められた2本の同期解分枝であり，灰色の太線はシューティング法で求められた高精度の同期解分枝である。なお，文献⁽⁸²⁾では本論文と同様の系についてシューティング法による数値計算結果と実験結果の両者がよく一致していることが確認されている。図中の実線および破線は安定解および不安定解を表しており，○印はサドル・ノード分岐点，△印はホップ分岐点を表している。縦の破線は $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 (=5 \times 10^{-3})$ を満たす無次元電圧 ε_1 の値を示しており，緑色の横線は $\nu = 1 (\omega = \omega_x)$ を示している。図 2.2 のように，いずれの解分枝についても提案手法で得られた同期振動数比 ν および位相差 θ はシューティング法で得られた高精度の計算結果と非常によく一致している。さらに，安定性についてもサドル・ノード分岐点だけではなくホップ分岐点まで含めてよく一致している。

図 2.2 の2本の解分枝にはそれぞれ以下の特徴が見られる。 $\nu > 1$ の解分枝は無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν が高い範囲に向かって閉じることなく伸びている一方で， $\nu < 1$ の解分枝は閉曲線を構成している。これらの解分枝は，主に同期振動数比 ν が無次元電圧 ε_1 に対して正比例的に変化する領域（図中の領域 R_1 ）と， $\nu = 1$ 付近で ε_1 の広い範囲に伸びた領域（図中の領域 R_2 ）に存在する。これらは同期振動数が固有振動数よりも高い領域，および両者が近い領域と対応している。また，図 2.2 のように領域 R_1 および R_2 のそれぞれに広い安定解の範囲が1箇所ずつ存在する。

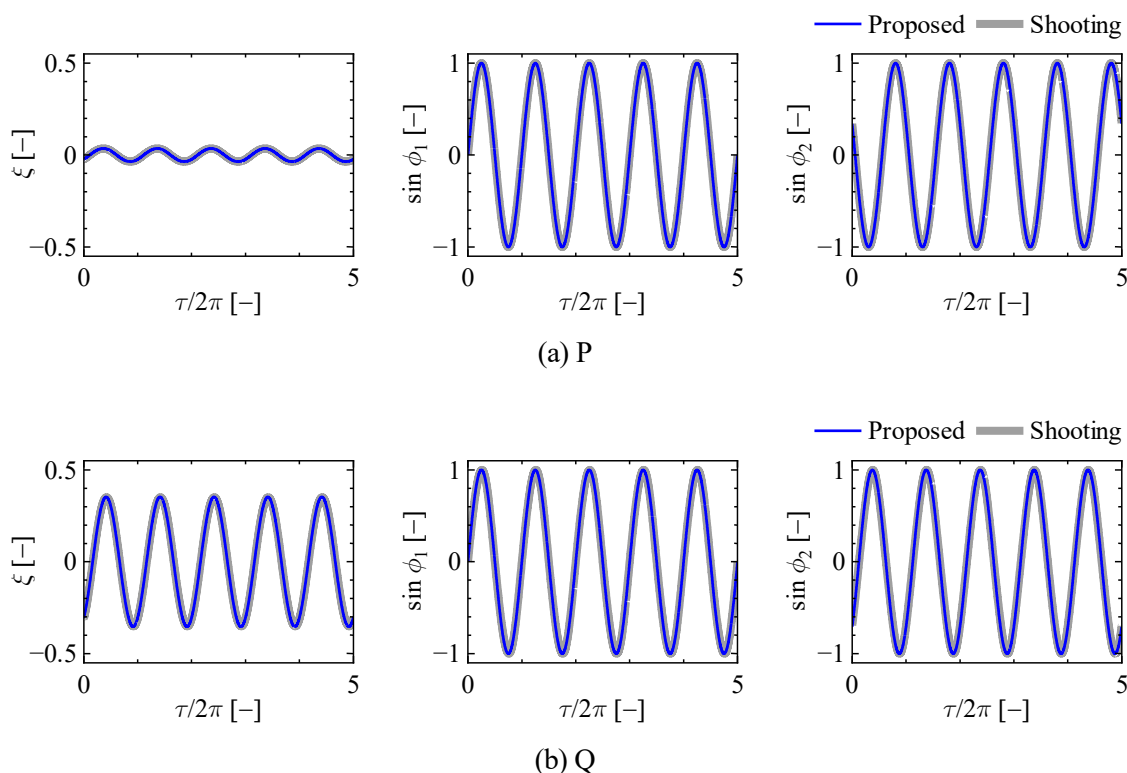


Fig. 2.3 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 2.2

図 2.3(a)および図 2.3(b)は、それぞれ図 2.2 の $\varepsilon_1 = 7 \times 10^{-3}$ における点 P および点 Q の安定解の時刻歴波形を提案手法（青色の細線）とシューティング法（灰色の太線）で求めて重ね描きしたものである。なお、シューティング法でも提案手法と同様に $\tau = 0$ においてモータ 1 の角変位が $\phi_1 = 0$ となるように時間の原点を設定し、 τ の設定にあたっては提案手法およびシューティング法のそれぞれにおいて得られる 2 種類の時刻歴波形の周期が 2π となるようにしている。これらの図から、提案手法により求められる系の挙動はシューティング法による結果とよく一致していることが確認できる。さらに、図 2.3(a)と図 2.3(b)との間で波形を比較すると、図 2.3(a)ではブロックの振幅が小さいのに対して、図 2.3(b)では大きい。これは、領域 R_1 では同期振動数比 ν が $\nu = 1$ から離れているのに対して領域 R_2 では近いことに対応している。

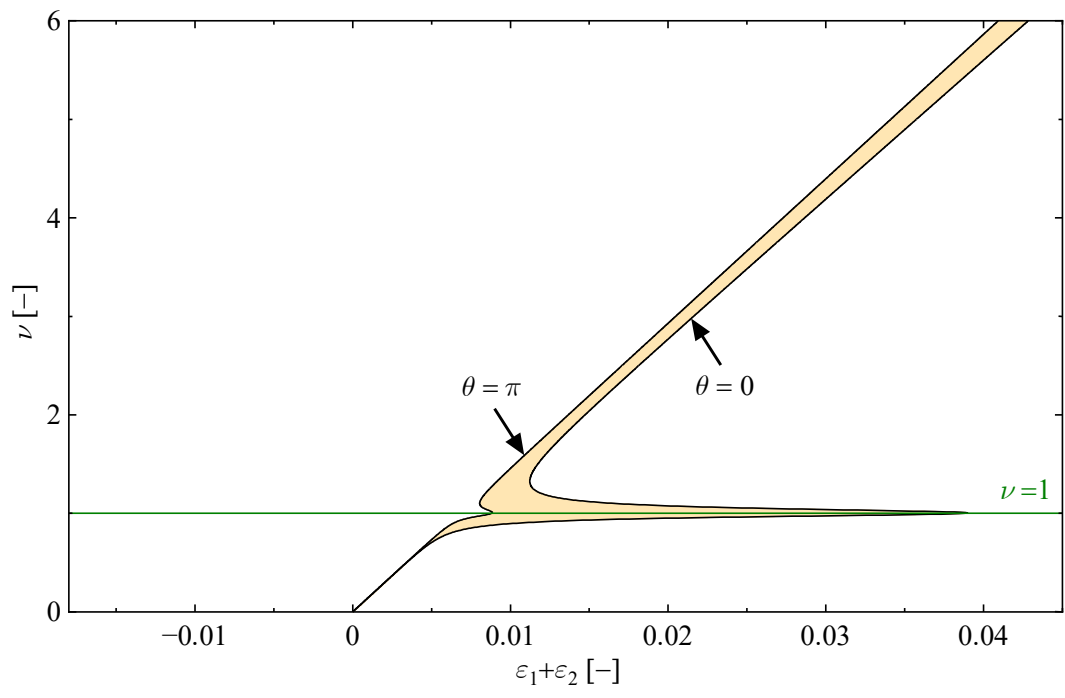
ところで、シューティング法ではニュートン法を用いるため初期値を設定した上で数値計算を行うが、多変数になるほど適切な初期値を求めるのは困難であり、解分枝の計算に必要なすべての初期値を求められる保証もない。さらに、シューティング法では数値積分を用いるため計算コストが比較的高いというデメリットも存在する。一方で、提案手法では同期解を求める計算が非常に簡潔であり、少なくとも近似を施した後の解については初期値を設定せずに式(2.23)および式(2.25)ですべて求められることから、シューティング法による解析に比べて遥かに効率よくかつ高速に同期解を求めることができる。

なお、第 3 章で示すように、パラメータの変化によって解分枝の構造およびその存在範囲（無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν の範囲）は多様に変化する。これら解分枝の変化に対する十分な理解は、自己同期現象のメカニズムの解明と振動機械への応用の両面において非常に重要となる。一方で、パラメータの変化が解構造（解分枝の結合状態）に及ぼす影響を直感的に理解することは、2.2.2 項および 2.2.3 項の近似計算を用いた場合でも困難を伴う。また、発生メカニズムの検討や機械の設計における基本的な段階では、解そのものを与える式よりも解の特性とパラメータの定性的な関係を見通しよく与える簡潔な式の方が有用であることも多い。これについては 2.2.4 項で述べた手法が有効であり、次節で議論を行う。

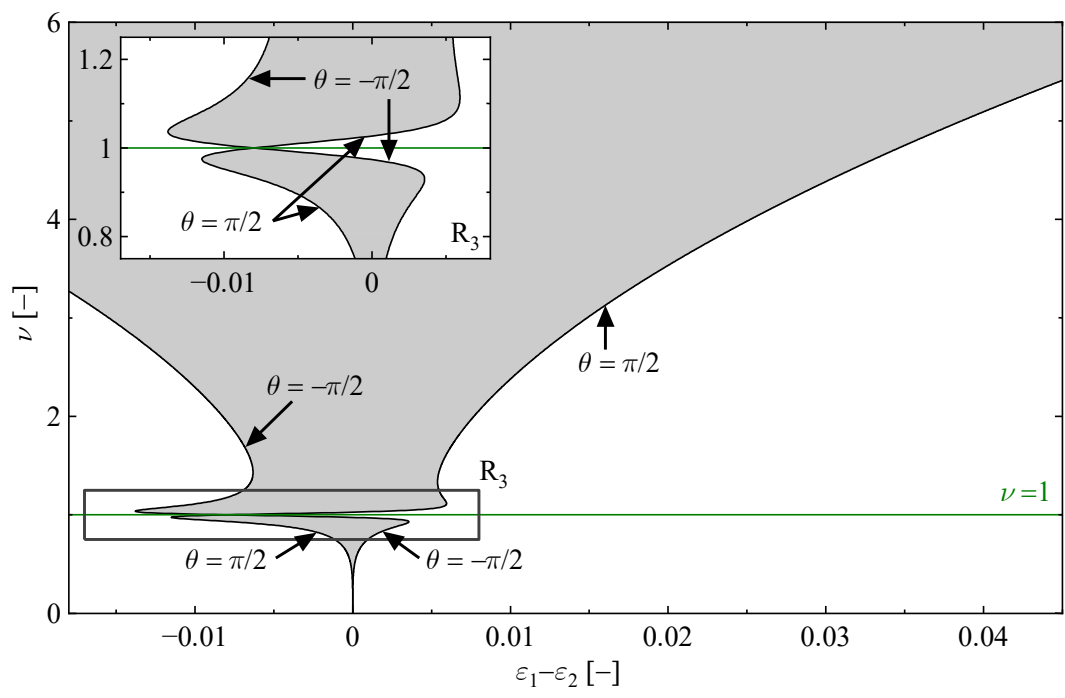
2・3・2 同期可能領域を用いた解析

図 2.2 と同様のパラメータに設定した場合について、式(2.32)および式(2.33)を用いて散逸エネルギーの条件を満足する無次元電圧 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ および同期振動数比 ν の領域、ならびに同期エネルギーの条件を満足する無次元電圧 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ および同期振動数比 ν の領域を求めた。結果を図 2.4(a)と図 2.4(b)にそれぞれ薄黄色および灰色で示す。各領域の境界線に付された θ の値は境界における位相差 θ の値を表しており、式(2.32)および式(2.33)の導出過程より薄黄色の領域の境界では $\theta = 0$ あるいは $\theta = \pi$ 、灰色の領域の境界では $\theta = -\pi/2$ あるいは $\theta = \pi/2$ である。図 2.4(a)および図 2.4(b)の横軸を無次元電圧 ε_1 に変換し、それらを図 2.2(a)の近似解の解分枝（青色）とともに示したものが図 2.5 であり、薄黄色および灰色の両方の領域に含まれる橙色の領域が同期可能領域となる。なお、上記のような ε_1 への変換に伴い、図 2.5 では図 2.4(a)と図 2.4(b)の領域がそれぞれ左と右にモータ 2 の無次元電圧の値 $\varepsilon_2 = 0.005$ だけ平行移動している。

図 2.4(a)の薄黄色の領域は、 $\nu \gg 1$ において ν と $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ がほぼ正比例の関係にある 2 本の線に挟まれた領域と、 $\nu = 1$ において $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ の広い範囲に存在する領域から構成されている。これらの領域はそれぞれ図 2.2 の領域 R_1 および領域 R_2 に対応しており、図 2.3 の波形からわかるように、領域 R_1 では系が高い振動数で運動することで、領域 R_2 ではブロックが大振幅で振動することで、散逸エネルギーの条件が満たされる。もう一方の図 2.4(b)の灰色の領域は、 $\nu = 1$ の領域を除いて $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ を中心とした軸対称に近い形をしており、基本的には 2 つのモータの無次元電圧が等しい状態である $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ に近いほどやり取りすべきエネルギーが小さく済み、同期発生が容易であることがわかる。



(a) Dissipated energy



(b) Self-synchronization energy

Fig. 2.4 Areas for voltage and synchronous frequency ratio satisfying each energetic condition

図 2.5 より，同期解はすべて橙色の同期可能領域に含まれており，この領域でのみ自己同期現象が発生しうることを確認できる．さらに，解分枝は橙色の同期可能領域の境界に貼りつくような形状をしている．これは，図 2.2 の下図に示すように解分枝中の位相差 θ が上述の図 2.4(a)および図 2.4(b)の薄黄色および灰色の領域の境界における値である $\theta=0, \pi$ および $\theta=\pm\pi/2$ ，あるいはそれらに近い値を取っているためである．図 2.5 に示す 2 種類のエネルギー条件に基づく考察により，図 2.2 で解分枝が $\nu=1$ を境に上下に分離するのは， $\mu_1 < \mu_2$ であるため図 2.4(b)の拡大図 R_3 に示す $\nu=1$ において灰色の領域が非対称となり，薄黄色の領域と重ならなくなるためであると理解できる．

以上より，同期可能領域を求めることで近似解の形状が予測できることが確認できた．

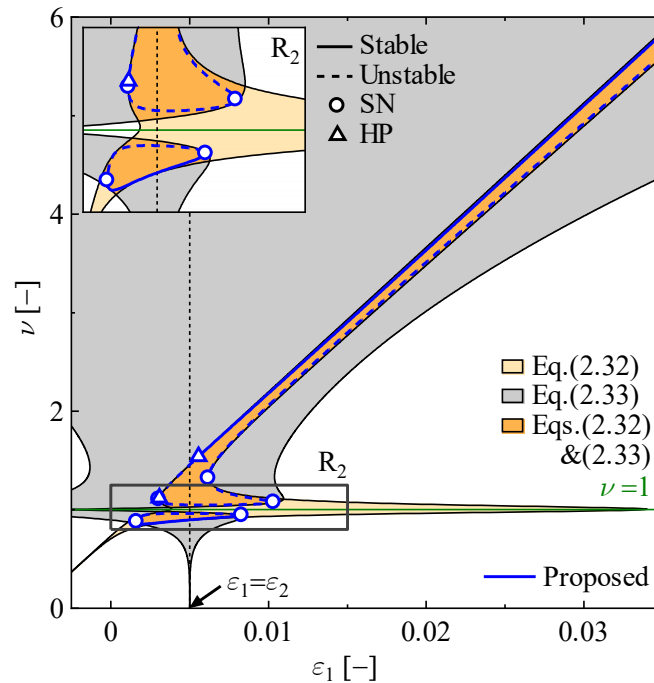


Fig. 2.5 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the area for voltage and synchronous frequency ratio satisfying the two energetic conditions

2・4 第2章のまとめ

本章では、2つの回転型振動子（DC モータ）からなる2振動子3自由度モデルを用いて、自己同期現象の発生条件に関するエネルギー的な考察を行い、散逸エネルギーに関する条件式と同期エネルギーに関する条件式を解析的に導出した。前者はモータに印加される電圧の和に比例する電気エネルギーが励振エネルギーとして系に流入し散逸エネルギーとして消費されるという条件であり、後者は2つのモータからブロックに流れ出るエネルギーの差が励振エネルギーの差と等しくなるようにモータ間でエネルギーのやり取りが行われるという条件である。

これら2つの条件と2つのモータの回転角速度を一定とみなす近似を組み合わせることで、簡潔な計算手続きにより運動方程式の同期解を求める手法と、調和バランスの原理により同期解の安定判別を行う手法を提案した。提案手法により求められた近似解およびその安定判別の結果はシューティング法により得られた高精度解と非常によく一致することを確認した。シューティング法はニュートン法を基盤とする手法であることからすべての解が求められる保証がなく、数値積分を用いているので比較的高い計算コストを要するのに対して、提案手法では少なくとも角速度一定の近似を施した後の解についてはもれなく求められるだけでなく、反復計算や数値積分を必要としないため効率よく解析を実施することが可能である。

さらに、上記2本のエネルギーに関する条件式を元に同期可能領域を求めた。その結果、近似解は同期可能領域の境界に沿うように求められることから、同期可能領域を求めることで近似解の存在領域を把握できることが確認された。

第3章 パラメータの影響

自己同期現象のメカニズムの解明および現象を応用した振動機械の設計には、それぞれのパラメータが同期状態に及ぼす影響の把握が重要となる。しかしながら、従来用いられてきた解析法では、シューティング法のような高精度数値解析手法だけでなく平均法のような近似解析でも数値解しか得られないことが多く、個々のパラメータ設定における同期状態しか把握できないことからパラメータが与える定性的な影響を包括的に把握することは困難であった。そこで、本章では第2章で提案したエネルギーに基づく解析手法を用いることで、パラメータが与える影響を包括的に把握できることを示す。

2.1節における議論より、2振動子3自由度モデルにおけるパラメータは、無次元慣性モーメント α_p ($p=1,2$)、無次元電圧 ε_p 、無次元不釣り合い量 μ_p 、モータの無次元内部減衰 β および基礎支持の減衰比 ζ の5種類である。このうち、実際の系において変更が容易なパラメータは2つの回転型振動子の不釣り合い量およびモータの電圧であるため、初めにこの2種類のパラメータが与える影響を簡潔に把握できることを示す。なお、この2種類のパラメータの影響に関する検討では、提案手法の妥当性を検証するために、提案手法によって得られる結果とシューティング法によって得られる高精度な数値計算結果との比較も併せて示す。その後、モータの無次元内部減衰および基礎支持の減衰比が与える影響についても簡単に検討する。

3・1 不釣り合い量の大きさの影響

本節では、モータ1およびモータ2の無次元不釣り合い量 μ_1 および μ_2 の大きさが自己同期現象に与える影響を調べる。

まず、提案手法によって得られる結果をシューティング法によって得られる数値計算結果と比較する。図3.1は μ_1 および μ_2 以外のパラメータは表2.1に示す値（以下、基準パラメータと呼ぶ）と同一とした上で、 μ_1 および μ_2 を(a) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$ （表2.1と同一）、(b) $\mu_1 = 2.4 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 4 \times 10^{-2}$ （図3.1(a)から2つの不釣り合い量を20%だけ減少させた場合）に設定し、モータ2の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ に固定してモータ1の無次元電圧 ε_1 を変化させることで得られた結果である。なお、本章における議論において、領域 R_1 および R_2 は図2.2および図2.5と同一の領域を示している。横軸はモータ1の無次元電圧 ε_1 、縦軸は同期振動数比 ν であり、図中の線種および記号の意味は図2.2と同一である。図3.1よりいずれの解分枝についても、提案手法で得られた計算結果はシューティング法で得られた高精度の計算結果と安定性を含め非常によく一致しており、高精度に解を求められていることが確認できる。

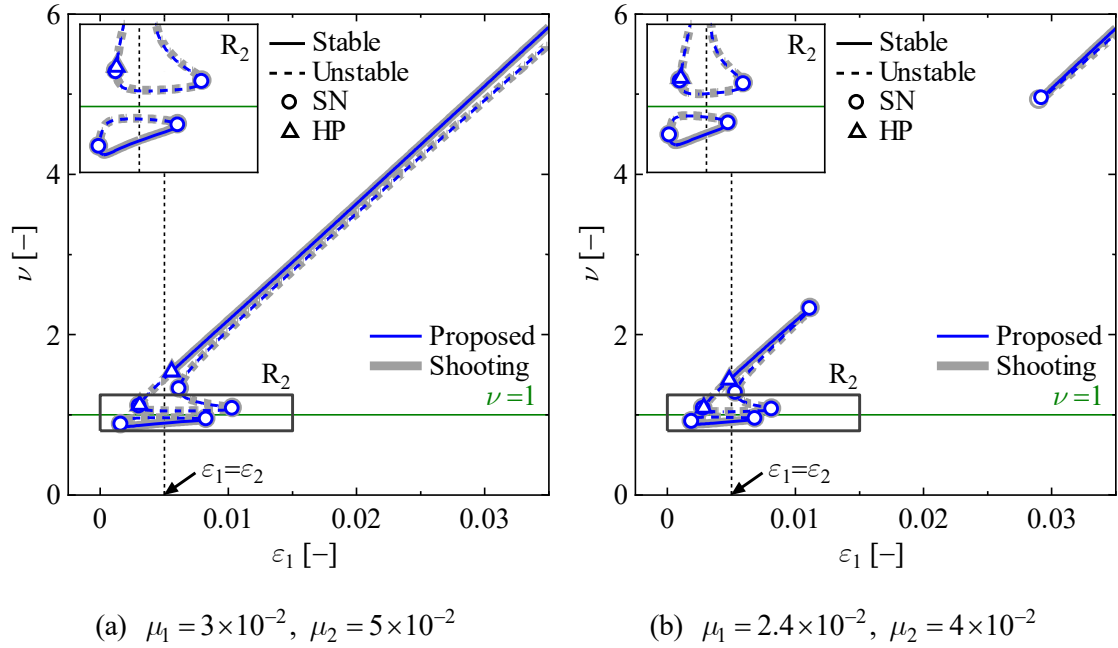


Fig. 3.1 Effects of unbalances μ_1 and μ_2 on synchronous solutions for $\epsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$

次に図 3.1 の解分枝の変化に着目すると、図 3.1(b)では図 3.1(a)と比較して $\nu \gg 1$ （領域 R_1 ）で解分枝の分離が生じ、さらには $\nu = 1$ （領域 R_2 ）で解分枝が電圧方向に縮小している。両モータの不釣り合い量を減少させると、このような同期解分枝の分離・縮小が生じることがわかる。

上記のような不釣り合い量の変化の影響を定性的に把握できることを示すために、図 3.1 のパラメータを用いてエネルギーに関する 2 本の条件式が成立する無次元電圧 ϵ_1 および同期振動数比 ν の範囲を求めた。図 3.2 には図 3.1 で求めた近似解の解分枝（青色）とともに、2 つのエネルギーの条件を満足する領域および同期可能領域を図 2.5 と同様に示した。なお、図 3.2(a)は図 2.5 の再掲である。

図 3.2 に基づいて、図 3.1 における解分枝の変化を以下のように説明できる。図 3.2(b)では図 3.2(a)よりも薄黄色の領域および灰色の領域が縮小しているため、領域 R_1 では灰色の領域の一部が薄黄色の領域を覆わずに同期可能領域が分離し、結果として解分枝の分離が生じる。また、領域 R_2 では灰色の領域の変化に伴い同期可能領域が縮小し、解分枝が小さくなる。

ここで、薄黄色の領域の横幅に着目すると、その大きさは式(2.32)の最右辺から最左辺を引いて得られる $4\mu_1\mu_2\zeta\nu^5 / [(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2]$ で与えられる。これは、2 つの不釣り合い量 μ_1 および μ_2 の積 $\mu_1\mu_2$ が大きいほど薄黄色の領域の横幅が拡大することを意味する。また、

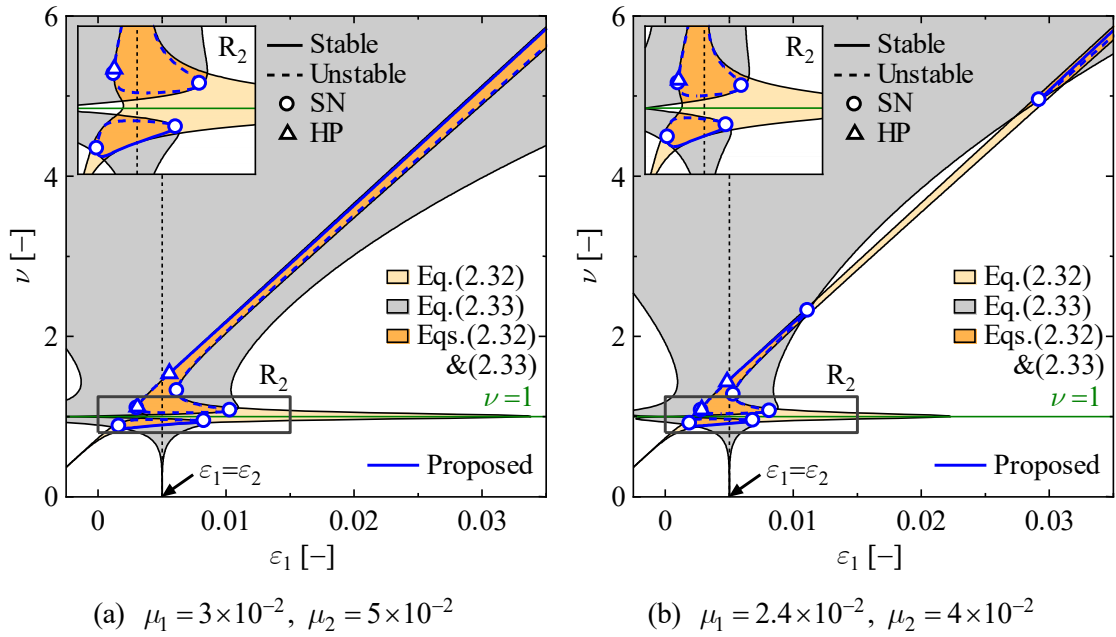


Fig. 3.2 Effects of unbalances μ_1 and μ_2 on synchronous solutions and the area for voltage and synchronous frequency ratio satisfying the two energetic conditions for $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$

灰色の領域の横幅は式(2.33)の最右辺から最左辺を引いて得られる $2\mu_1\mu_2\nu^4|1-\nu^2| / [(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2]$ によって評価でき、灰色の領域の横幅も薄黄色の領域と同様に μ_1 および μ_2 の積 $\mu_1\mu_2$ に比例することがわかる。その結果、無次元不釣り合い量 μ_1 および μ_2 を大きくすることで解分枝の存在領域が拡大してより広範囲の電圧で同期可能となることが予測できるだけでなく、例えば図 3.2(a) から 2 つの不釣り合い量を 20 % だけ減少させると薄黄色および灰色の領域の横幅が 0.64 倍となり、主に灰色の領域の変化に起因して図 3.2(b) のような解の分離が生じることを計算せずとも把握できる。これらはエネルギーの領域に基づいた解析の特長を示すものであり、図 3.1 のような解分枝のみに着目した解析ではこのような不釣り合い量の影響に関する事前の把握は難しい。

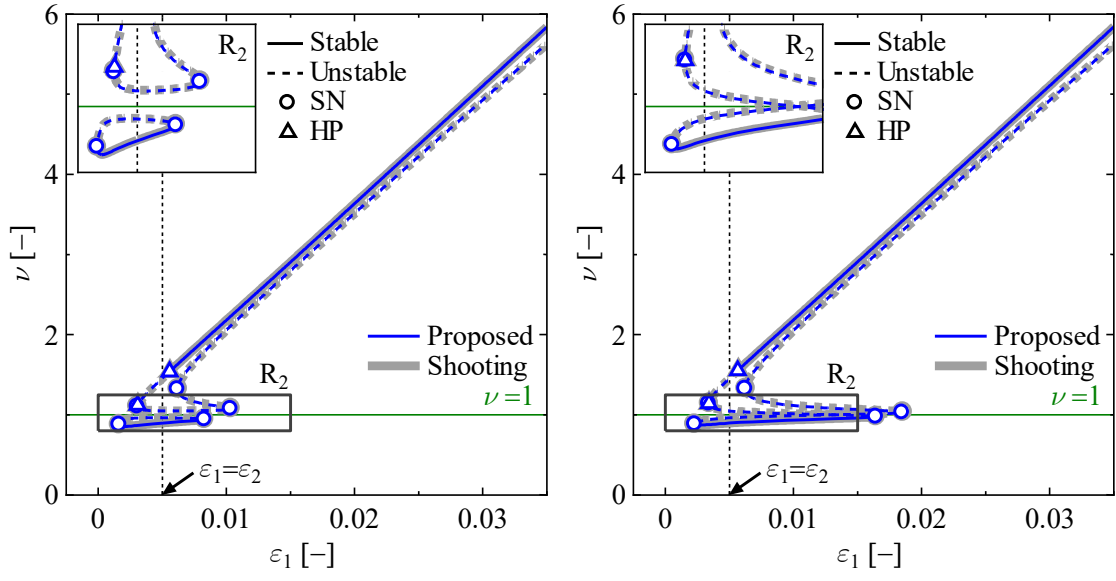
以上より、不釣り合い量の大きさが同期解分枝に与える影響を提案手法により把握できることが示された。なお、一般に図 3.1(b) に現れているような非線形系における分離解については、求めることに困難を伴うだけでなくその存在の把握自体が難しい。これに対して、本節で用いた手法ではその存在を上記のように簡単な解析に基づいて予測することが可能である。

3・2 不釣り合い量の大小関係および固定電圧の影響

図 3.3 では不釣り合い量 μ_1, μ_2 およびモータ 2 の無次元電圧 ε_2 を (a) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ (図 3.1 の再掲), (b) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ (図 3.3(a)の μ_1 と μ_2 の値を入れ替えた場合), (c) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 1.5 \times 10^{-2}$ (ε_2 が 3 倍の場合), (d) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 1.5 \times 10^{-2}$ (μ_1 と μ_2 の値を入れ替え, かつ ε_2 が 3 倍の場合) の 4 通りに設定し, 提案手法およびシューティング法で同期解を求めた. 他のパラメータについては表 2.1 と同様に設定した. 図より, 提案手法で得られた計算結果はシューティング法で得られた計算結果とよく一致していることが確認できる.

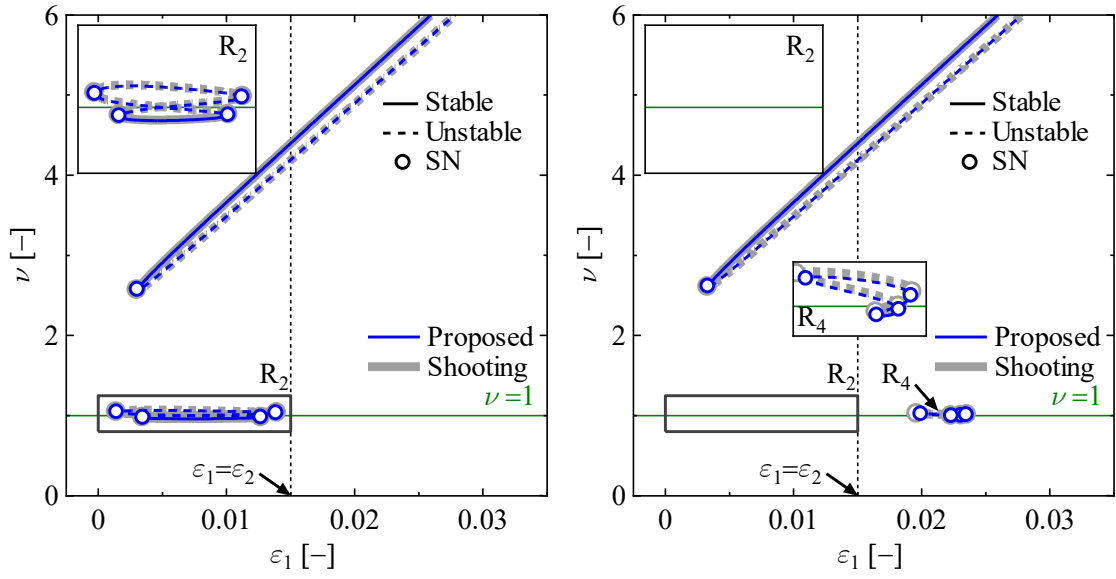
図 3.3 から, 不釣り合い量 μ_1, μ_2 の大小関係およびモータの無次元電圧 ε_2 の変化が同期解分枝に与える以下のような影響を確認できる.

- (i) $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ の場合において不釣り合い量を $\mu_1 > \mu_2$ から $\mu_1 < \mu_2$ に変更した図 3.3(a)から図 3.3(b)への変化では, 領域 R_2 の解分枝が $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ の領域に長く伸びている. 一方, 領域 R_1 における解分枝には殆ど変化がみられない.
- (ii) 図 3.3(a)から図 3.3(c)への ε_2 の増加にともなって, 領域 R_1 の解分枝と領域 R_2 の解分枝との間が途切れ, 領域 R_2 では $\nu = 1$ の上下の解分枝が結合している.
- (iii) $\varepsilon_2 = 15 \times 10^{-3}$ の場合において不釣り合い量を $\mu_1 > \mu_2$ から $\mu_1 < \mu_2$ に変更した図 3.3(c)から図 3.3(d)への変化では領域 R_2 における解分枝は消滅しており, より ε_1 が大きな領域 R_4 に小さな解分枝が存在している. (i)と同様に領域 R_1 における解分枝には殆ど変化がみられない.



(a) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$
 (same as Fig.3.1(a))

(b) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$



(c) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 15 \times 10^{-3}$

(d) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 15 \times 10^{-3}$

Fig. 3.3 Effects of unbalances μ_1, μ_2 and voltage ε_2 on synchronous solutions

不釣り合い量 μ_1, μ_2 の大小関係およびモータの無次元電圧 ε_2 が与える影響を提案手法より定性的に把握できることを示すため、図 3.4 では図 3.3 のパラメータを用いてエネルギーに関する領域を求めた。なお、図 3.4(a)は図 3.2(a)の再掲である。

図 3.4 から、上述した図 3.3 における解分枝の変化は以下のように解の存在領域に基づいて把握できる。

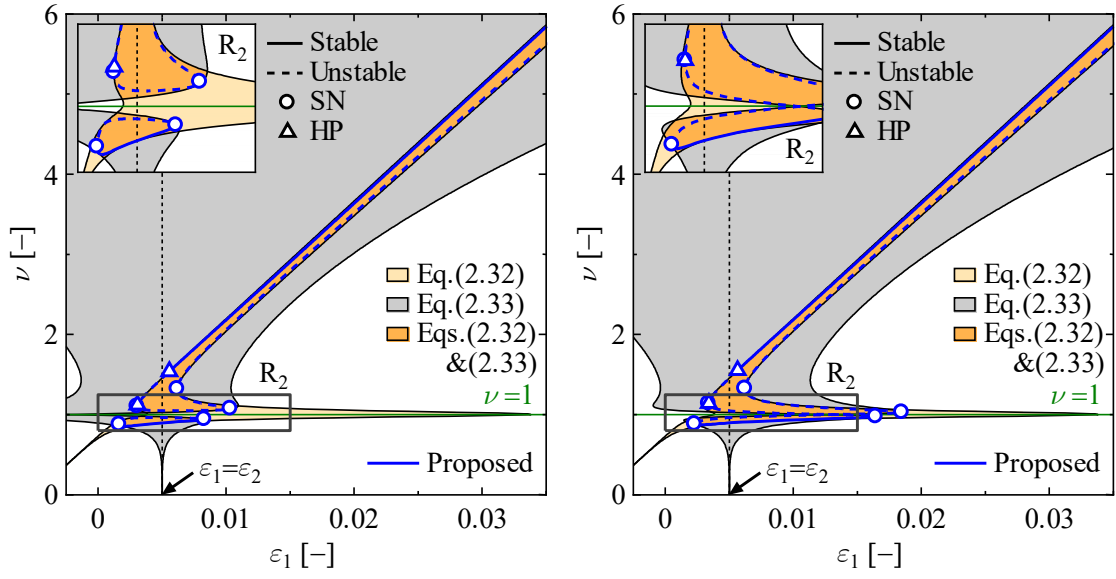
(i) 図 3.4(a)では領域 R_2 で灰色の領域が破線 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の左側に偏っている一方で、図 3.3(b)では不釣り合い量 μ_1, μ_2 の大小関係が逆転したことによって破線 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の右側に偏りが生じている。その結果、図 3.3(b)の解分枝は $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ の領域に大きく伸びている。

(ii) 図 3.4(c)では、図 3.4(a)から薄黄色の領域が左に、灰色の領域が右にそれぞれ ε_2 の増加分 10×10^{-3} だけ平行移動したことで、図 3.4(c)の領域 R_1 では両者の重なる領域が途切れ、反対に領域 R_2 では $\nu=1$ において両者の重なる領域が現れている。その結果、図 3.3(c)では領域 R_1 および領域 R_2 にまたがる解分枝が途切れ、領域 R_2 では $\nu=1$ の上下に分かれていた解分枝が結合する。

(iii) 図 3.3(d)の解分枝については、無次元電圧 ε_2 の増加に伴って図 3.3(b)の解分枝が変化したものと理解できる。すなわち、図 3.4(b)から薄黄色の領域が左に、灰色の領域が右にそれぞれ 10×10^{-3} だけ平行移動したことにより、図 3.3(d)の領域 R_2 近傍では両者が重なった同期可能領域とともに解分枝が消滅したものと考えることができる。また、図 3.3(c)と比較すると、図 3.4(d)は図 3.4(c)よりも領域 R_2 近傍で灰色の領域が破線 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の右側に偏り、さらに灰色の領域と薄黄色の領域が重なる範囲が狭くなるため、領域 R_2 よりも ε_1 が大きな領域に小さな解分枝が存在する。

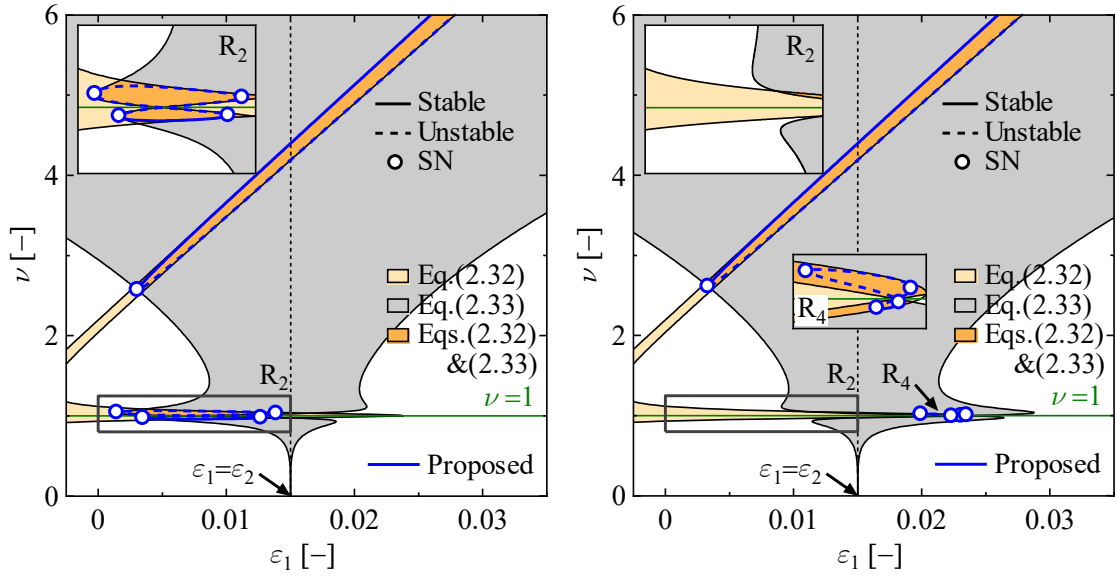
上記の(i)および(iii)より、 $\mu_1 < \mu_2$ であれば $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 、 $\mu_1 > \mu_2$ であれば $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ で灰色の領域が広がることわかる。これは、式(2.33)において $\nu=1$ (領域 R_2) では最左辺および最右辺に含まれる $\zeta \nu^5 (\mu_1^2 - \mu_2^2) / [(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta \nu)^2]$ が支配的であり、この項が不釣り合い量の2乗の差 $(\mu_1^2 - \mu_2^2)$ に比例するためである。

また、(ii)および(iii)に示すように固定電圧 ε_2 の設定値を変更するとその分だけ薄黄色および灰色の領域が平行移動することから、 ε_2 の変更にもなう同期可能領域および解分枝形状の変化を事前に予測することができる。これにより、必要に応じた同期可能領域の位置および大きさの変更もある程度可能となる。例えば、図 3.3(d)の拡大図 R_4 に示す小さな解分枝については、図 3.4(b)のように ε_2 を小さくすることにより解分枝の形状を大きくすることが可能であり、解分枝が ε_1 のどの付近に現れるかという点についても見積もることができる。



(a) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$
(same as Fig. 3.2(a))

(b) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$



(c) $\mu_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 15 \times 10^{-3}$

(d) $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 3 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 15 \times 10^{-3}$

Fig. 3.4 Effects of unbalances μ_1 , μ_2 and voltage ε_2 on synchronous solutions and the area for voltage and synchronous frequency ratio satisfying the two energetic conditions

3・3 モータの内部減衰の影響

2通りの無次元内部減衰 β の値に対する同期解分枝およびエネルギーに関する領域を求めた結果を図3.5に示す。なお、本節と3・4節では提案手法およびシューティング法より求められる同期解分枝の比較は省略するが、両者がよく一致していることを確認している。図3.5ではモータの無次元内部減衰を(a) $\beta = 3.4 \times 10^{-3}$ (図3.2(a)の再掲), (b) $\beta = 4.2 \times 10^{-3}$ (図3.5(a)の無次元内部減衰 β を 0.8×10^{-3} だけ増加させた場合)に設定し、その他のパラメータについては、表2.1に示す値を用いた上でモータ2の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ とした。

図3.5(b)では図3.5(a)よりも無次元内部減衰 β が大きいため、薄黄色の領域の傾きが小さくなっている。その結果、図3.5(b)で $\nu \gg 1$ (領域 R_1)において薄黄色の領域の一部が灰色の領域から外れ、図3.1(b)と同様に解分枝の分離が生じる。

このように、無次元内部減衰 β が大きいかほど $\nu \gg 1$ (領域 R_1)において薄黄色の領域の傾きが小さくなるのは、 $\nu \gg 1$ (領域 R_1)では式(2.32)の最左辺および最右辺においてモータの内部減衰に関する項 $2\beta\nu$ が支配的となるためである。物理的には、 β が大きいかほどモータの内部減衰で消費される散逸エネルギーが増大し、同じ回転数でモータを回転させるためにはより大きな電圧を印加する必要があるためと理解できる。

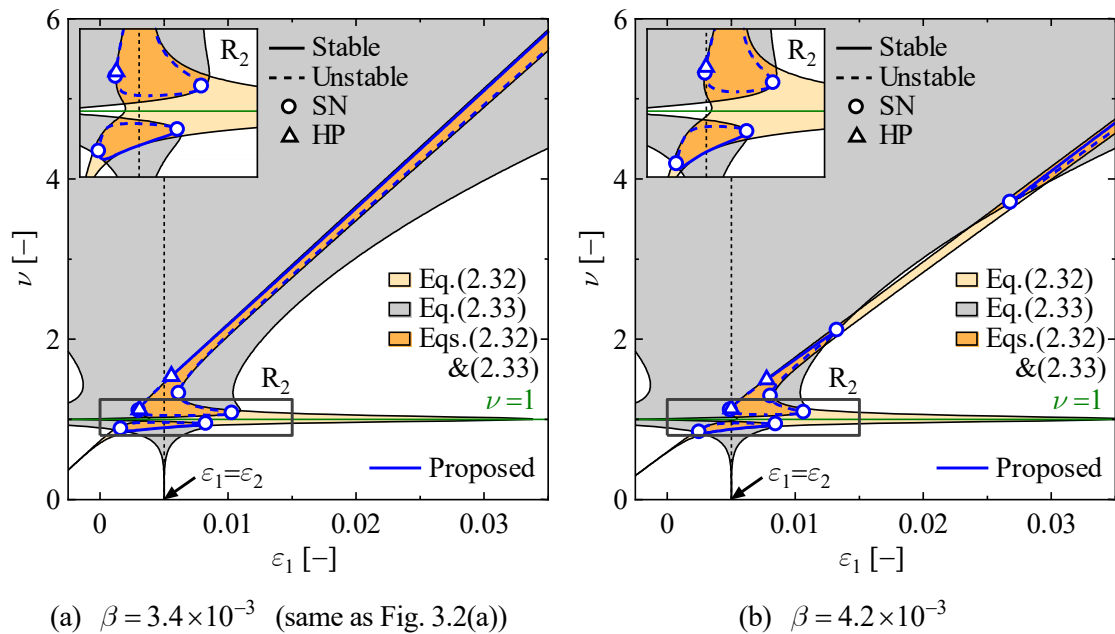


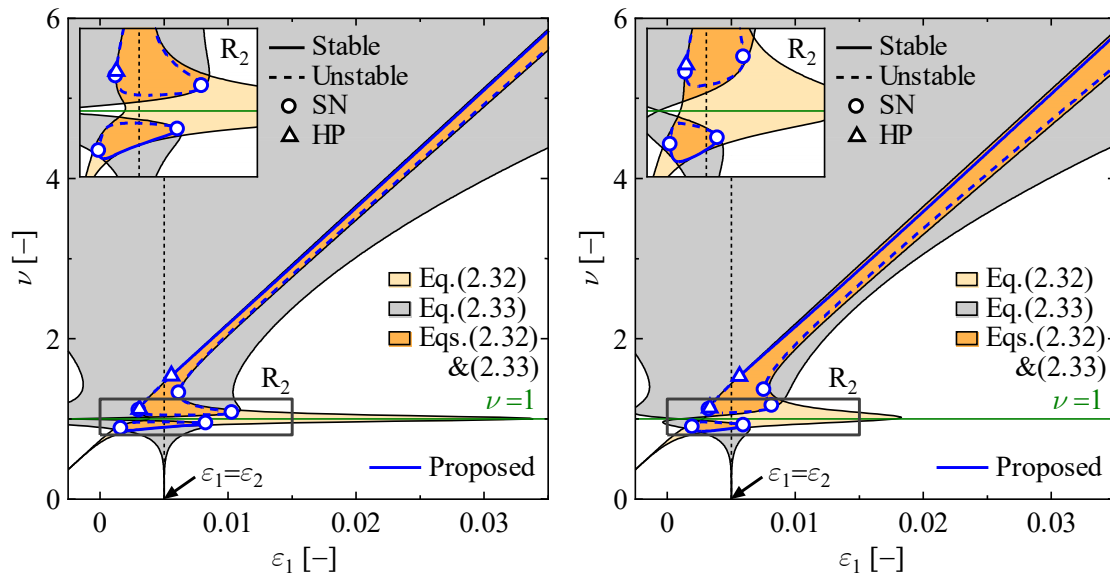
Fig. 3.5 Effects of internal damping β of the motors on synchronous solutions and the area for voltage and synchronous frequency ratio satisfying the two energetic conditions

3・4 基礎支持の減衰の影響

図 3.6 では基礎支持の減衰比 ζ を(a) $\zeta = 5 \times 10^{-2}$ (図 3.2(a)の再掲), (b) $\zeta = 10 \times 10^{-2}$ (ζ を2倍にした場合)に設定し, 同期解分枝およびエネルギーに関する領域を求めた. その他のパラメータについては, 表 2.1 の値に設定しモータ 2 の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3}$ とした.

図 3.6(b)では図 3.6(a)と比較して領域 R_2 では薄黄色および灰色の領域が狭くなり, 領域 R_1 では薄黄色の領域が広がっている. その結果, 図 3.6(b)では領域 R_2 で解分枝が存在する無次元電圧 ε_1 の範囲が狭くなり, 領域 R_1 では安定解と不安定解の間隔が広がっている.

このように薄黄色の領域に対する無次元電圧 ε_1 の範囲が基礎支持の減衰の増加に伴って $\nu=1$ (領域 R_2)では狭くなり $\nu \gg 1$ (領域 R_1)では広がる理由については, 式(2.32)の散逸エネルギーの条件に基づいて解析的に把握することが可能であり, 付録 A3 にその考察を示す. 一方, 同期エネルギーの条件を満たす灰色の領域は $\nu=1$ (領域 R_2)において横軸方向にとくに狭くなっているが, これは灰色の領域の幅を決定する式(2.33)の最左辺第2項および最右辺第2項の値に及ぼす ζ の影響が $\nu=1$ において強く現れるためである.



(a) $\zeta = 5 \times 10^{-2}$ (same as Fig. 3.2(a))

(b) $\zeta = 10 \times 10^{-2}$

Fig. 3.6 Effects of damping ratio ζ on synchronous solutions and the area for voltage and synchronous frequency ratio satisfying the two energetic conditions

3・5 第3章のまとめ

本章では2振動子3自由度モデルを対象として、数種類のパラメータ設定に対して提案手法およびシューティング法により同期解分枝を求めた。両者の結果は安定性を含めよく一致しており、提案手法の精度を検証できた。

また、提案手法により散逸エネルギーおよび同期エネルギーの条件を満足する領域を求め、パラメータがエネルギーの領域に与える影響を考察した。同期解分枝は同期可能領域の境界に貼りつくような形で存在し、同期可能領域を形成する2種類の領域の境界が解析的に求められることから、同期解分枝に及ぼすパラメータの影響はエネルギーの領域に基づいて定性的に把握できることが示された。シューティング法や提案手法により解分枝を都度求めずとも、エネルギーの領域の境界を表す式によってパラメータに対する解分枝の形状の変化を予測できる点は、提案手法の長所の1つであると言える。

3.1節より不釣り合い量 μ_1 および μ_2 を増加させることで2種類のエネルギー領域の横幅を拡大でき、3.2節よりモータ2の無次元電圧 e_2 を変化させることでエネルギー領域を平行移動できる。本論文での記述は省略するが、固有振動数を変化させることで解分枝が存在する同期振動数領域の調整も可能である。以上に示した知見は、解分枝の同期振動数および無次元電圧 e_1 を所望の値に調整し、同期解の存在範囲を広げてロバスト性を向上させるために必要なパラメータの推定に利用できる。このように、提案手法を用いることでより効率的な振動機械の設計が可能となる。

なお、次章以降に示す多自由度を有する剛体に2個の振動子が搭載されたモデルについても、同様にパラメータの影響を考察することが可能である。多自由度系で新たに問題となる固有振動数の影響については第5章で検討する。

第4章 多自由度支持系への拡張

自己同期現象は回転型自励振動子が多自由度支持系に搭載された系^{(63)-(68),(70),(75),(80)}においても発生し、振動機械の中にも多自由度の機械要素を加振して所望の運動を作り出しているものがある。そこで、本章では多自由度振動系に支持された回転型振動子の自己同期現象に対して、第2章で示した提案手法を拡張する。その対象として直交2方向の並進自由度を有する2自由度支持系に2個の回転型振動子が搭載された4自由度モデル、および直交2方向の並進自由度および回転自由度を有する3自由度支持系に2個の回転型振動子が搭載された5自由度モデルを取り扱う。この2つの解析モデルに対して提案手法を拡張し、多自由度支持系においてもパラメータの影響を簡潔に把握できることを示す。

4・1 4自由度系

本節では、直交2方向の並進自由度を有する2自由度支持系に2個の回転型振動子が搭載された2振動子4自由度モデル（以下、4自由度系と呼ぶ）に対して提案手法を適用する。

4・1・1 解析モデルおよび運動方程式

本節で用いる解析モデルを図4.1に示す。ここで、第2章で示した2振動子3自由度モデル（3自由度系）におけるブロックの並進自由度を単純に増やすのではなく y 方向のみ可動な剛体枠を追加しているのは、実機で実現可能な構造を考慮したためである。この構造に起因して、図4.1のモデルには直交2方向に可動な質量が異なるという異方性が存在する。

図4.1のモデルではばね k_y および減衰 c_y によって y 軸方向に支持された質量 M_I の剛体枠から、質量 M_b のブロックがばね k_x および減衰 c_x によって x 軸方向に支持されている。ブロックおよび剛体枠は回転せずに x 軸および y 軸からなる水平面内で並進運動を行い、静的平衡状態を基準としたブロックの中心の右向き変位を x 、上向き変位を y で表す。質量 M_b のブロックには不釣り合いおもりを有する2個のDCモータ（モータ1およびモータ2）が xy 平面内で回転するように設置されており、モータ1およびモータ2の角変位をそれぞれ図のような反時計回りを正とする角度 ϕ_1 および ϕ_2 で表す。これら不釣り合いおもりおよびモータに関するパラメータと記号の意味については2.1節と同様であるため、ここでは省略する。

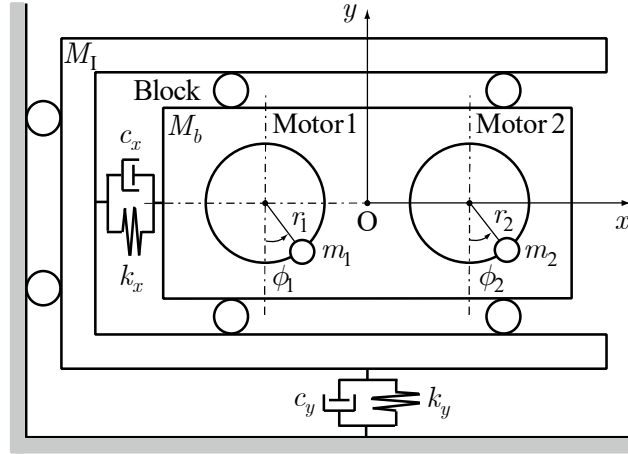


Fig. 4.1 Analytical model of 4DOF system

ブロックおよび剛体枠の並進運動，モータの回転運動に関する運動方程式は次式のように求められる（運動方程式の導出過程については付録 A1 を参照されたい）。

$$\left. \begin{aligned} M_{II}\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\ (M_I + M_{II})\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\ J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 &= A e_1 - m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1) \\ J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 &= \sigma A e_2 - m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} M_{II} &\triangleq M_b + m_1 + m_2, \quad J_1 \triangleq m_1 r_1^2 + J_{r1}, \quad J_2 \triangleq m_2 r_2^2 + J_{r2} \\ A &\triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

である。ただし， $e_1 > 0, e_2 > 0$ であり， $\sigma = 1$ のとき 2 つのモータは同方向に回転し， $\sigma = -1$ のとき逆方向に回転する。

いくつかの無次元パラメータを導入し，式(4.1)を完全に無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi &= -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \\ (1 + \mu) \nu^2 \eta'' + 2(1 + \mu) \zeta_y \nu_y \nu \eta' + (1 + \mu) \nu_y^2 \eta & \\ = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) & \\ \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' &= \varepsilon_1 - \mu_1 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_1 + \eta'' \sin \phi_1) \\ \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' &= \sigma \varepsilon_2 - \mu_2 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_2 + \eta'' \sin \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_p &\triangleq \frac{J_p}{M_{II}r^2}, \quad \varepsilon_p \triangleq \frac{A}{M_{II}r^2\omega_c^2}e_p, \quad \mu_p \triangleq \frac{m_p r_p}{M_{II}r} \quad (p=1,2) \\
\mu &\triangleq \frac{M_I}{M_{II}}, \quad \beta \triangleq \frac{B}{M_{II}r^2\omega_c}, \quad \zeta_x \triangleq \frac{c_x}{2\sqrt{M_{II}k_x}}, \quad \zeta_y \triangleq \frac{c_y}{2\sqrt{(M_I+M_{II})k_y}} \\
\xi &\triangleq \frac{x}{r}, \quad \eta \triangleq \frac{y}{r}, \quad \nu \triangleq \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \nu_x \triangleq \frac{\omega_x}{\omega_c}, \quad \nu_y \triangleq \frac{\omega_y}{\omega_c}, \quad \tau \triangleq \omega t \\
\omega &\triangleq \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_x \triangleq \sqrt{\frac{k_x}{M_{II}}}, \quad \omega_y \triangleq \sqrt{\frac{k_y}{M_I+M_{II}}}, \quad d \triangleq \frac{d}{d\tau}
\end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

である。\$T\$ は式(4.1)の同期解の周期（したがって、式(4.3)の同期解の無次元周期は\$2\pi\$）であり、\$r\$ は代表長さ、\$\omega_c\$ は代表固有角振動数である。また、\$\alpha_p\$ は無次元慣性モーメント、\$\varepsilon_p\$ は無次元電圧、\$\mu_p\$ は無次元不釣り合い量、\$\mu\$ は剛体棒の無次元質量を表す質量比、\$\beta\$ はモータの無次元内部減衰、\$\zeta_x\$ および\$\zeta_y\$ は基礎支持の減衰比、\$\xi\$ および\$\eta\$ はブロックの無次元変位、\$\nu\$ は同期振動数比、\$\nu_x\$ および\$\nu_y\$ は固有振動数比、\$\tau\$ は無次元時間である。

4・1・2 提案手法の適用

本項では、図 4.1 で示した 4 自由度系について自己同期現象が発生するためにエネルギーが満たすべき 2 本の条件式を求め、近似を導入することで積分を実行した後の条件式を解析的に求める。その後、それらの条件式から近似解および同期解の存在限界を表す式を求める。なお、これらの式の導出手続きは 2.2 節で述べた 3 自由度系に関するものと共通する部分も多いことから、ここでは主要な結果のみを述べることにして詳細については付録 A4 に示す。

4・1・2・1 エネルギーに関する条件式の導出

以下の議論において、\$\xi, \eta, \phi_1\$ および\$\phi_2\$ は同期解を表すものとする。式(4.3)をエネルギー積分して整理すると、式(2.10)に対応する次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\
\Delta D_\eta &= \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\
\Delta D_{\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} \\
\Delta D_{\phi_2} + \Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2}
\end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式(4.5)の詳細は付録 A4 の式(A4.3)に示す。\$\Delta D_\xi, \Delta D_\eta, \Delta D_{\phi_1}\$ および\$\Delta D_{\phi_2}\$ はそれぞれ\$x\$ 軸方向および\$y\$ 軸方向の基礎支持の粘性減衰、モータ 1 の内部減衰およびモータ 2 の内部減

衰で消費される（無次元）散逸エネルギー， ΔR_{ϕ_1} および ΔR_{ϕ_2} はそれぞれモータ 1 およびモータ 2 に対して外部電源の印加電圧により供給される（無次元）励振エネルギーを表す。

$\Delta T_{\xi\phi_p}$ および $\Delta T_{\eta\phi_p}$ ($p=1,2$) はそれぞれ，ブロックとモータ p の間に作用する x 方向および y 方向の内力によるモータ p からブロックへのエネルギー移動量を表す。

システム全体の 1 周期あたりのエネルギー積分は，式(4.5)の 4 式の和を取ることによって，次式のように求められる。

$$\Delta D_{\xi} + \Delta D_{\eta} + \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (4.6)$$

一方，式(4.5)の第 3 式から第 4 式を辺々引いて整理すると，次式が求められる。

$$(\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1}) - (\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2}) = (\Delta R_{\phi_1} - \Delta D_{\phi_1}) - (\Delta R_{\phi_2} - \Delta D_{\phi_2}) \quad (4.7)$$

4・1・2・2 近似解の導出

式(4.6)および式(4.7)における各項を解析的に求めるために，同期状態において角速度 ϕ_1 および ϕ_2 が一定であるとみなし，2 つのモータの角変位 ϕ_1 および ϕ_2 に関して式(2.13)に示すような近似を導入する。式(2.13)を式(4.3)に代入すると，第 1 式および第 2 式の右辺は同期振動数比 ν と位相差 θ を含む調和関数となり， ξ および η が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{c1} \cos \tau + \xi_{s1} \sin \tau + \sigma [\xi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \xi_{s2} \sin(\tau + \theta)] \\ \eta &= \eta_{c1} \cos \tau + \eta_{s1} \sin \tau + \eta_{c2} \cos(\tau + \theta) + \eta_{s2} \sin(\tau + \theta) \\ \xi_{c1} &\triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, \quad \xi_{s1} \triangleq \frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\ \xi_{c2} &\triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, \quad \xi_{s2} \triangleq \frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\ \eta_{c1} &\triangleq -\frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]}, \quad \eta_{s1} \triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \\ \eta_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]}, \quad \eta_{s2} \triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

式(2.13)および式(4.8)を式(4.6)に代入することにより，自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2\pi\zeta_x\nu_x\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{2\pi\zeta_y\nu_y\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} + 4\pi\beta\nu \\ & = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

同様に、式(2.13)および式(4.8)を式(4.7)に代入することにより、同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} & 2\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ & - 2\pi\mu_1\mu_2\nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \sin\theta \\ & = 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

式(4.9)および式(4.10)を同期振動数比 ν および位相差 θ について解くことによって同期解が求められる。 ν を設定値として ε_1 および θ について解く場合には、3自由度系の場合と同様に式(2.25)および式(2.23)から同期解が得られる。ただし、4自由度系ではそれらの式に含まれる d_c 、 d_0 、 s_s および s_0 の定義が式(2.24)とは異なっており、それぞれ次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} d_c & \triangleq 2\mu_1\mu_2\nu^5 \left\{ \sigma \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ d_0 & \triangleq (\mu_1^2 + \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ & \quad + 2\beta\nu - \varepsilon_2 \\ s_s & \triangleq -\mu_1\mu_2\nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ s_0 & \triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

4・1・2・3 近似解の安定判別

解の安定判別に必要な式(4.3)の変分方程式は以下のように導出される.

$$\left. \begin{aligned}
 & \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
 & = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & (1+\mu) \nu^2 \delta \eta'' + 2(1+\mu) \zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + (1+\mu) \nu_y^2 \delta \eta \\
 & = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
 & = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 + (-\xi'' \sin \phi_1 + \eta'' \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
 & = -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + (-\xi'' \sin \phi_2 + \eta'' \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

式(4.12)に対して式(2.13)のような一定角速度近似を導入し, 微小変分 $\delta \xi$ および $\delta \eta$ については式(2.29)と同様に $\cos \tau$ および $\sin \tau$ を含む式で仮定する. さらに, 調和バランスの原理を適用し, 第1式と第2式では $\cos \tau$ および $\sin \tau$ の係数の部分を, 第3式と第4式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると, 式(2.30)および式(2.31)に対応する式が次のように得られる.

$$\begin{aligned}
& M\ddot{\xi} + C\dot{\xi} + K\xi = \mathbf{0} \\
& \xi = (\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c, \delta\eta_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T \\
& M \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_1\nu^2 & \mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & \nu^2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & (1+\mu)\nu^2 & 0 & 0 & \sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & (1+\mu)\nu^2 & \mu_1\nu^2 & \sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ \mu_1\nu^2 & 0 & 0 & \mu_1\nu^2 & 2\alpha_1\nu^2 & 0 \\ \mu_2\nu^2 \cos\theta & -\mu_2\nu^2 \sin\theta & \sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & \sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 0 & 2\alpha_2\nu^2 \end{bmatrix} \\
& C \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_x\nu_x\nu & 2\nu^2 & 0 & 0 & 0 & -2\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ -2\nu^2 & 2\zeta_x\nu_x\nu & 0 & 0 & -2\mu_1\nu^2 & -2\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 2(1+\mu)\nu^2 & 2\mu_1\nu^2 & 2\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & 0 & -2(1+\mu)\nu^2 & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 0 & -2\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 2\mu_1\nu^2 & -2\mu_1\nu^2 & 0 & 2\beta\nu & 0 \\ 2\mu_2\nu^2 \sin\theta & 2\mu_2\nu^2 \cos\theta & -2\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 2\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & 0 & 2\beta\nu \end{bmatrix} \\
& K \triangleq \begin{bmatrix} \nu_x^2 - \nu^2 & 2\zeta_x\nu_x\nu & 0 & 0 & -\mu_1\nu^2 & -\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ -2\zeta_x\nu_x\nu & \nu_x^2 - \nu^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & (1+\mu)(\nu_y^2 - \nu^2) & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 0 & -\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & -2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & (1+\mu)(\nu_y^2 - \nu^2) & -\mu_1\nu^2 & -\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ -\mu_1\nu^2 & 0 & 0 & -\mu_1\nu^2 & \mu_1\nu^2 k_1 & 0 \\ -\mu_2\nu^2 \cos\theta & \mu_2\nu^2 \sin\theta & -\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & -\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 0 & \mu_2\nu^2 k_2 \end{bmatrix} \\
& k_1 \triangleq \xi_{s1} + \sigma(\xi_{s2} \cos\theta - \xi_{c2} \sin\theta) - \eta_{c1} - \eta_{c2} \cos\theta - \eta_{s2} \sin\theta \\
& k_2 \triangleq \xi_{s2} + \sigma(\xi_{s1} \cos\theta + \xi_{c1} \sin\theta) - \eta_{c2} - \eta_{c1} \cos\theta + \eta_{s1} \sin\theta
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& \eta' = A\eta \\
& \eta \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

式(4.14)に示す A の固有値を求めることにより、4 自由度系においても安定判別が可能となる。

4・1・2・4 同期可能領域の導出

エネルギーに関する2本の条件式(式(4.9)および式(4.10))を満たす同期解の存在限界を表す関係式は、以下のように求められる。

式(4.9)において、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であることから次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \min(DE_-, DE_+) &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \max(DE_-, DE_+) \\ DE_- &\triangleq (\mu_1 - \sigma\mu_2)^2 \frac{\zeta_x \nu_x \nu^5}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\ &\quad + (\mu_1 - \mu_2)^2 \frac{\zeta_y \nu_y \nu^5}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} + 2\beta\nu \\ DE_+ &\triangleq (\mu_1 + \sigma\mu_2)^2 \frac{\zeta_x \nu_x \nu^5}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\ &\quad + (\mu_1 + \mu_2)^2 \frac{\zeta_y \nu_y \nu^5}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} + 2\beta\nu \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

また、式(4.10)について、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であることから次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \min(SE_-, SE_+) &\leq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq \max(SE_-, SE_+) \\ SE_- &\triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2) \nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \right\} \\ &\quad - \mu_1 \mu_2 \nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \right\} \\ SE_+ &\triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2) \nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \right\} \\ &\quad + \mu_1 \mu_2 \nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

3自由度系に関する議論と同様に、4自由度系においても同期解は無次元電圧 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および同期振動数比 ν が式(4.15)と式(4.16)を同時に満足する同期可能領域にのみ存在しうる。したがって、4自由度系においても式(4.15)、式(4.16)および同期可能領域を用いることでパラメータが自己同期現象に及ぼす影響を把握できる。

4・1・3 解析結果

本項では、4.1.2 項で示した提案手法の計算精度および有効性について検証する。

4・1・3・1 近似精度の検証

ここでは、図 4.1 に示した 4 自由度系を対象として、4.1.2 節で述べた手法によって数種類のパラメータ設定に対する同期解を求めて安定判別を行い、シューティング法の結果と比較することにより計算精度を検証する。4 自由度系の場合は第 2 章で示した 3 自由度系とは異なり、2 つのモータの回転方向によって解分枝の形状が異なるため、これらが同方向に回転する場合（同方向回転）および逆方向に回転する場合（逆方向回転）のそれぞれについて検討を行う。本節に示す解析結果において、とくに明示しないパラメータは表 4.1 に示す値を用いた。これらは実際の系から直接的に求められた値ではないが、実際の系で取りうる範囲を考慮した上で解分枝の形状およびパラメータの影響による変化がわかりやすい値に設定した。

質量比を $\mu = 0.2$ とし、モータ 2 の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 8 \times 10^{-3}$ に固定した状態でモータ 1 の無次元電圧 ε_1 を変化させながら提案手法により同期解の計算を行ったところ、3 本の解分枝が求められた。同方向回転の場合の結果を図 4.2(a)に、逆方向回転の場合の結果を図 4.2(b)に示す。図中の線種および記号の意味は 3 自由度系の結果である図 2.2 における ν の図と同じである。ただし、図 4.2 では自由度の増加にともなって固有振動数比を表す緑色の横線の数が増え、下から順に ν_x および ν_y を示している。

さらに、図 4.2(a)に示した 3 種類の解分枝の詳細を図 4.3(a-1)から図 4.3(a-3)に、図 4.2(b)に示した 3 種類の解分枝の詳細を図 4.3(b-1)から図 4.3(b-3)にそれぞれ個別に示す。これらの図の横軸はいずれもモータ 1 の無次元電圧 ε_1 であり、縦軸は上から順に同期振動数比 ν 、モータ 1 とモータ 2 の位相差 θ 、ブロックの y 方向の無次元振幅 H および x 方向の無次元振幅 E である。なお、図 4.3(b-1)については横軸のスケールが他の図とは異なることに注意されたい。図 4.2 および図 4.3 のように、いずれの解分枝についても提案手法で得られた同期振動数比 ν および位相差 θ は安定性を含めシューティング法で得られた計算結果と非常によく一致している。

Table 4.1 Parameters in 4DOF system

| | | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|---------|-----|
| α_1, α_2 | 3.3×10^{-2} | β | 2.2×10^{-3} | ν_x | 1.0 |
| μ_1, μ_2 | 2×10^{-2} | ζ_x, ζ_y | 2×10^{-2} | ν_y | 1.3 |

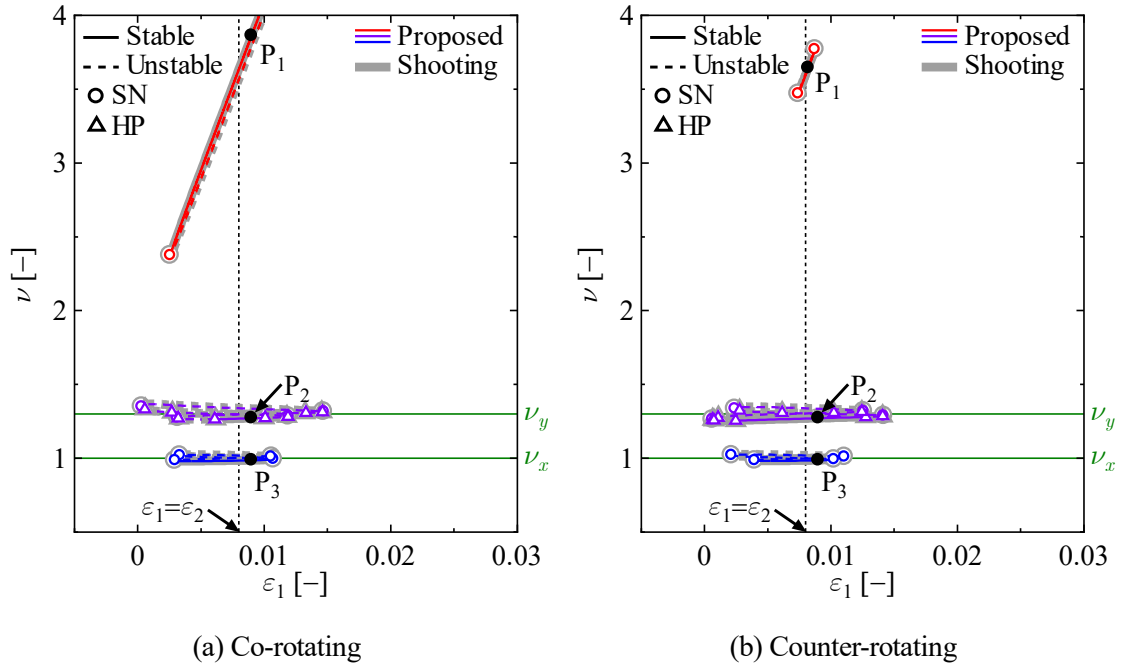
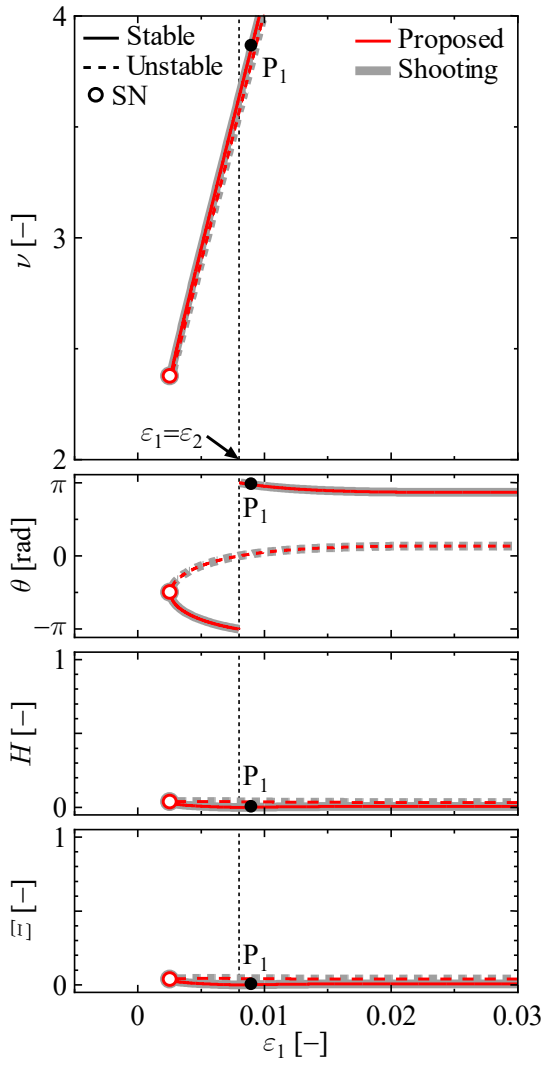
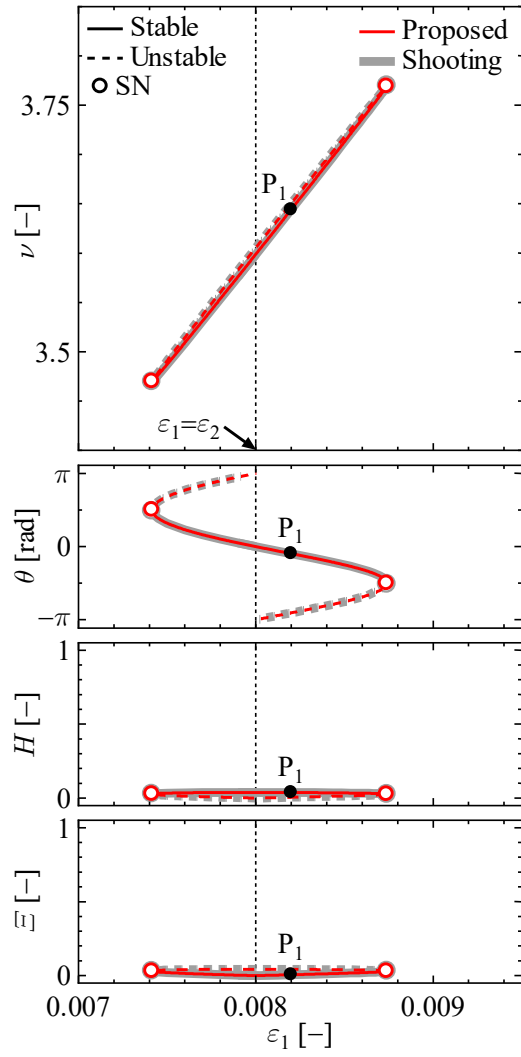


Fig. 4.2 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the shooting method in 4DOF model

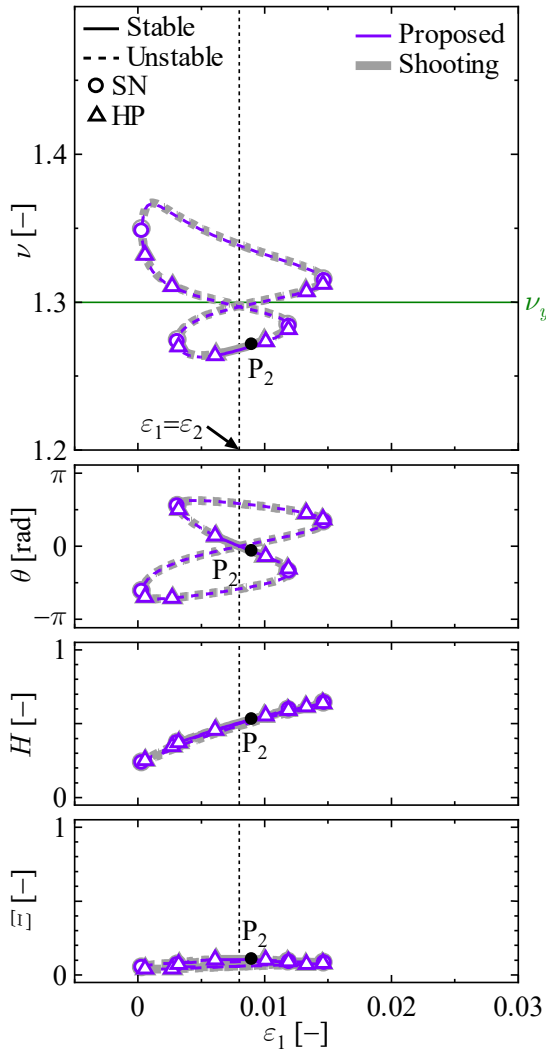
図 4.3 に示す解分枝にはそれぞれ以下の特徴が見られる。赤色で示した図 4.3(a-1)の解分枝は無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν が高い範囲に向かって閉じることなく伸びているのに対して、図 4.3(b-1)の解分枝は $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 近傍にのみ存在し閉曲線を形成する。これら 2 つの解分枝の振幅は x 方向および y 方向ともに小さい。図 4.3(a-2)および図 4.3(b-2)に示す紫色の解分枝は固有振動数比 ν_y 近傍で 8 の字型の閉曲線を形成している。いずれの解分枝においてもブロックは y 方向に大きく振動しており、モータ間の位相差は $\theta = 0$ を中心とした値をとる。図 4.3(a-3)および図 4.3(b-3)に示す青色の解分枝も同様に固有振動数比 ν_x 近傍で 8 の字型の閉曲線を形成する。両者ともブロックは x 方向に大きく振動するが、モータ間の位相差は図 4.3(a-3)では $\theta = 0$ を、図 4.3(b-3)では $\theta = \pi$ を中心とした値をとる。



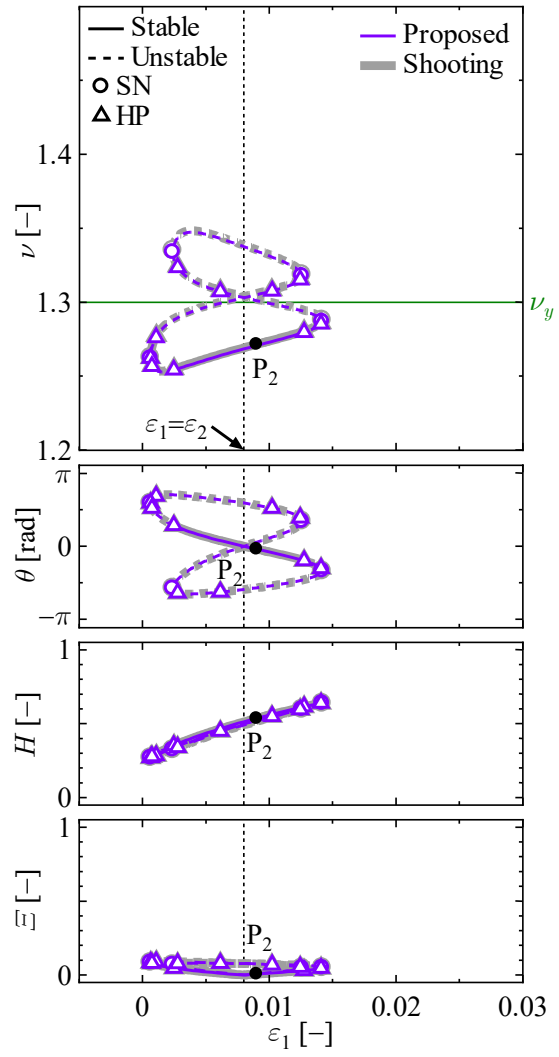
(a-1) Co-rotating ($\nu \gg \nu_x, \nu_y$)



(b-1) Counter-rotating ($\nu \gg \nu_x, \nu_y$)



(a-2) Co-rotating ($\nu \approx \nu_y$)



(b-2) Counter-rotating ($\nu \approx \nu_y$)

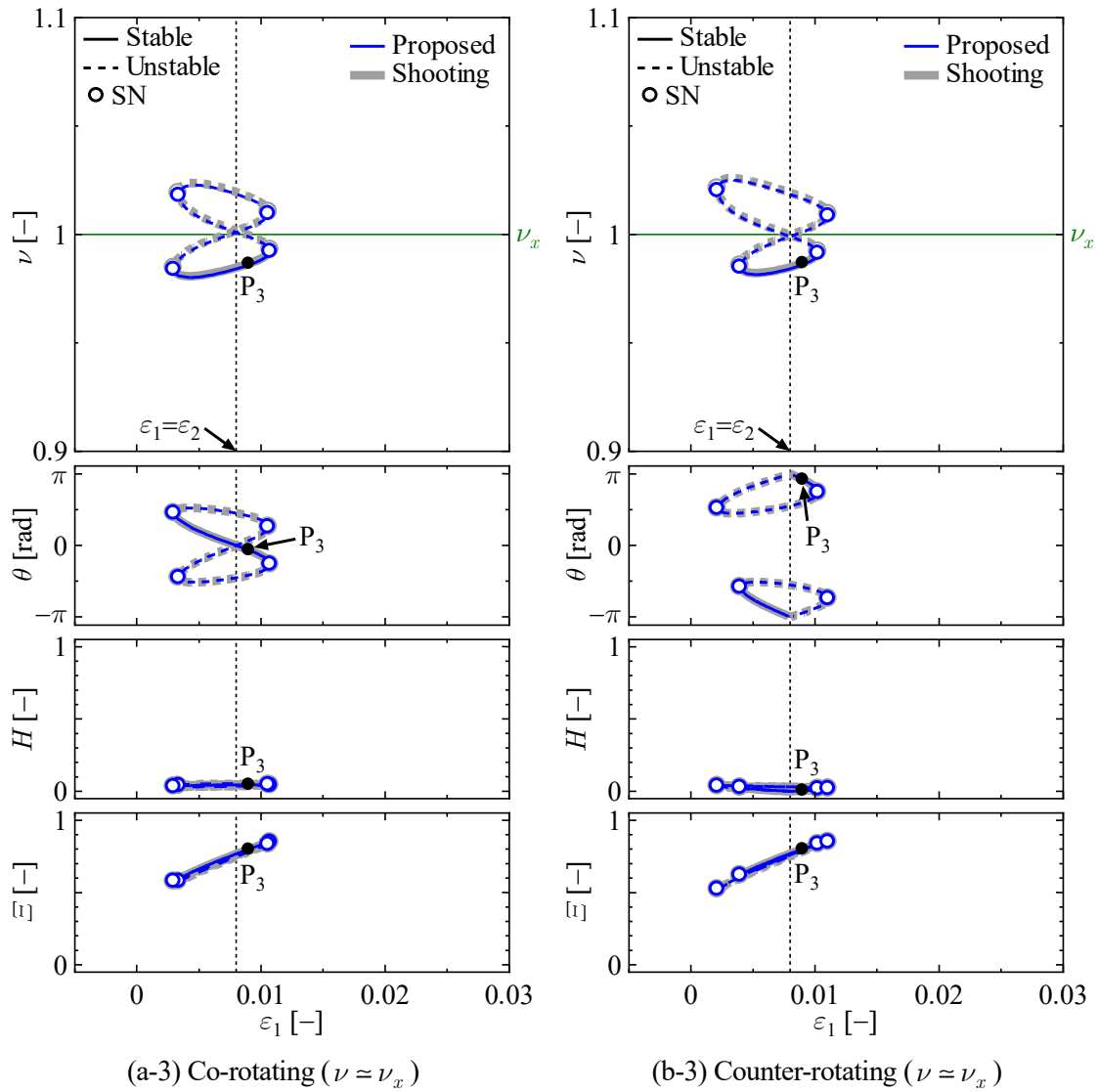
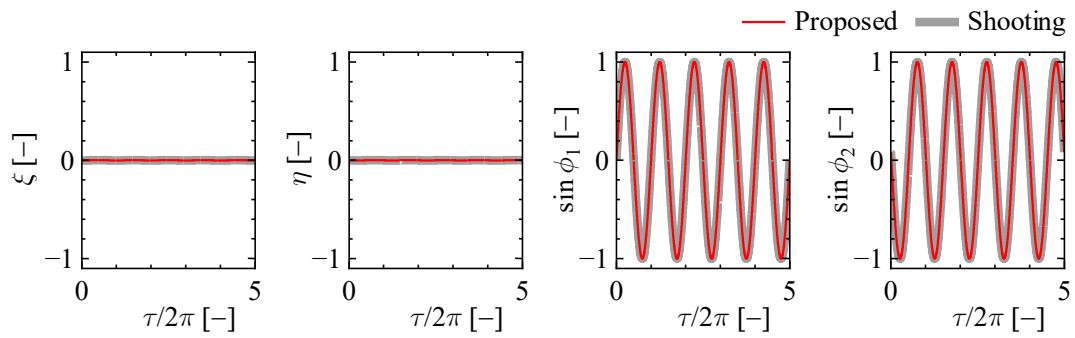


Fig. 4.3 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the shooting method in 4DOF model

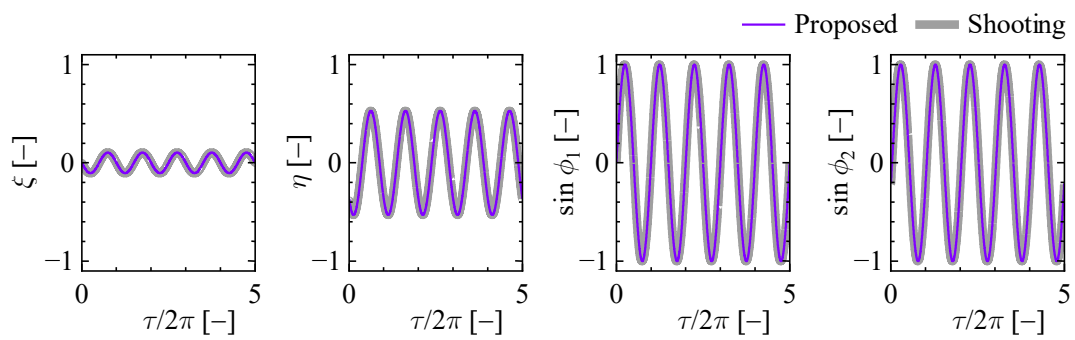
このように、解分枝の種類により振幅の大きさが異なることが確認できる。これは、赤色の解分枝は同期振動数比 ν が固有振動数比 ν_y および ν_x から離れているのに対し、紫色および青色の解分枝はそれぞれ固有振動数比 ν_y および ν_x に近いことに対応している。また回転方向の違いにより、解分枝の形状だけでなく一部の解分枝ではモータ間の位相差にも違いが生じている。このような位相差の違いが生じるのは、同方向回転の場合には x 方向および y 方向のいずれも $\theta=0$ （同位相）のときに2つの不釣り合いおもりからブロックに作用する力が強め合って最も大きく振動するのに対して、逆方向回転の場合には y 方向には $\theta=0$ （同位相）のとき、 x 方向には $\theta=\pi$ （逆位相）のときにブロックに作用する力が強め合って最も大きく振動するためであると考えられる。

図 4.2, 図 4.3 では、それぞれの解分枝に広い範囲で安定解が存在する。この安定解における系の挙動を調べるために、図 4.2(a)および図 4.2(b)の点 P_1 , P_2 および P_3 の安定解の時刻歴波形を提案手法（赤色, 紫色および青色の細線）とシューティング法（灰色の太線）の両方で求めて重ね描きを行った結果をそれぞれ図 4.4 および図 4.5 に示す。なお、シューティング法でも $\tau=0$ においてモータ 1 の角変位が $\phi_1=0$ となるように時間の原点を設定し、提案手法およびシューティング法により得られる時刻歴波形ではそれぞれの周期が 2π となるように τ を設定している。これらの図から、系の挙動についても提案手法により求められる結果はシューティング法による結果とよく一致していることが確認できる。

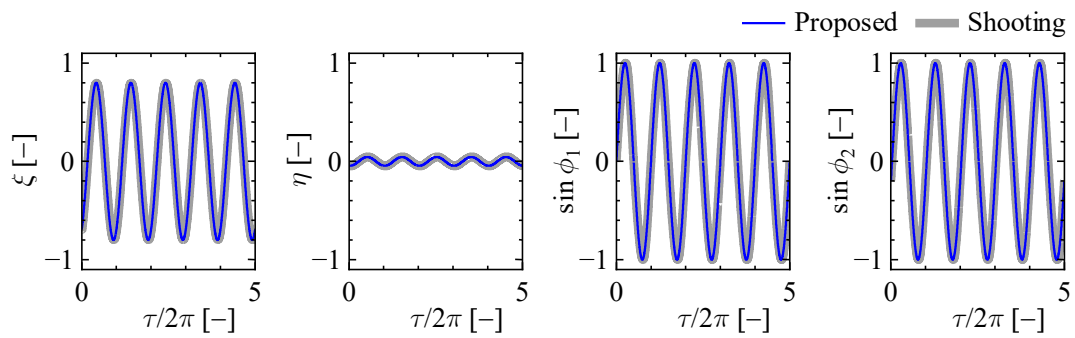
以上より、図 4.1 に示す 4 自由度系に提案手法を拡張した場合においても、求められたすべての解について提案手法の計算結果は回転方向に依らずシューティング法の結果とよく一致していることから、十分に高精度であることが確認できる。



(a) P_1

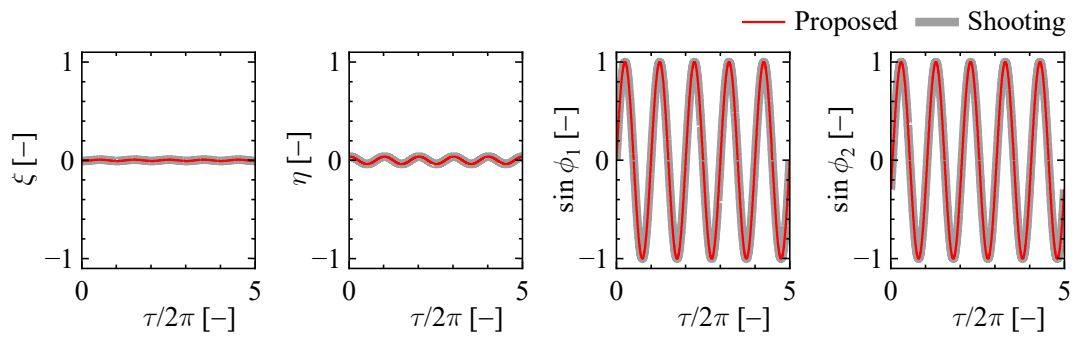


(b) P_2

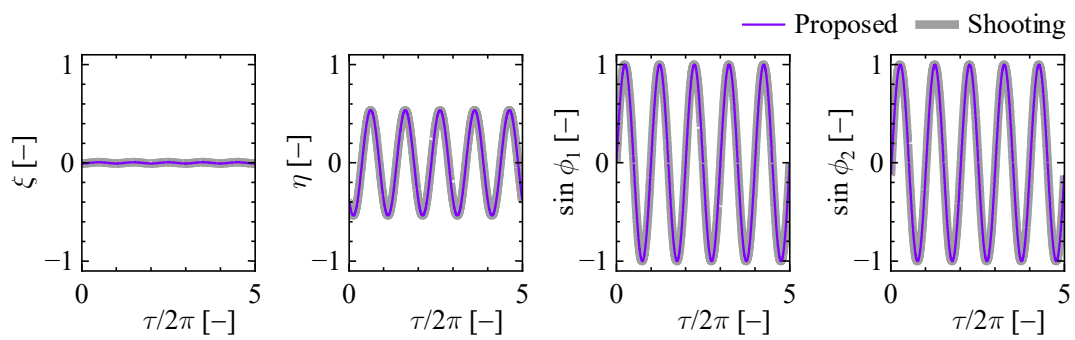


(c) P_3

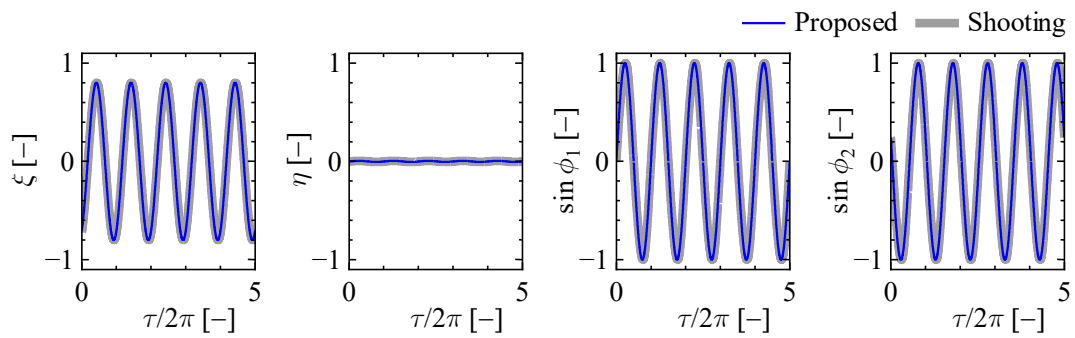
Fig. 4.4 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 4.2(a)



(a) P_1



(b) P_2



(c) P_3

Fig. 4.5 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 4.2(b)

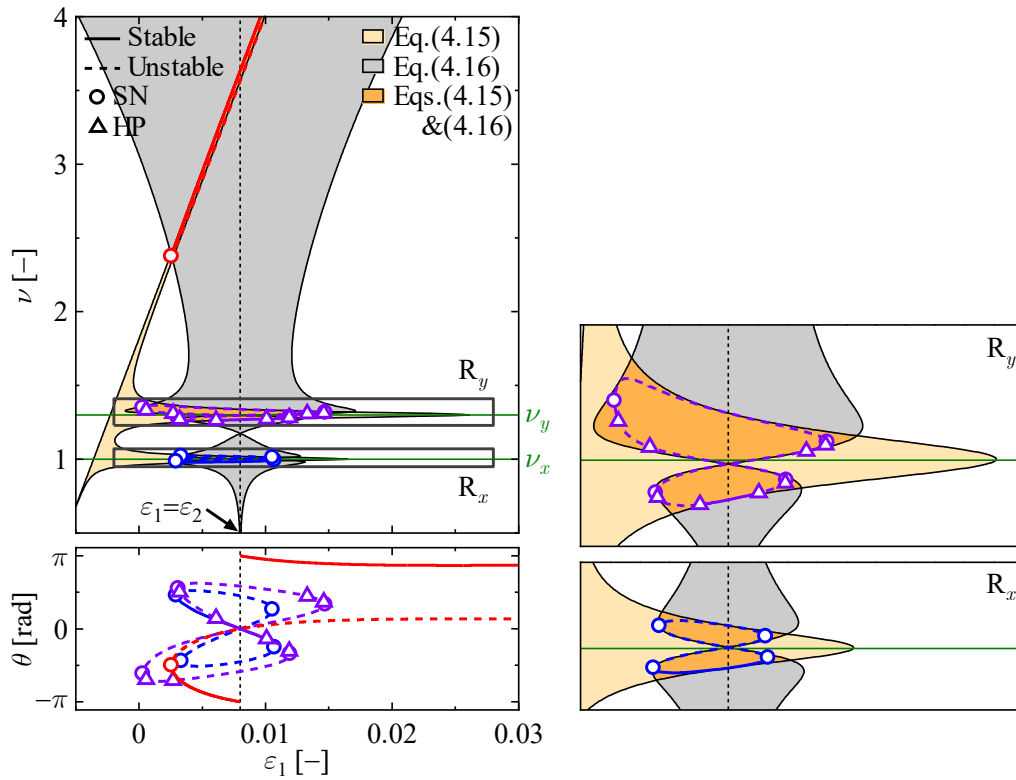
4・1・3・2 同期可能領域を用いた解析

図 4.2 で扱ったパラメータについて、散逸エネルギーの条件 (式(4.15)) および同期エネルギーの条件 (式(4.16)) を満足する無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν の範囲を求めた。同方向回転の場合の結果を図 4.6(a)に、逆方向回転の場合の結果を図 4.6(b)に示す。横軸はモータ 1 の無次元電圧 ε_1 、縦軸は上の図では同期振動数比 ν 、下の図ではモータ 1 とモータ 2 の位相差 θ であり、上の図における領域 R_y および領域 R_x については右側に拡大図を示した。第 3 章と同様に、同期振動数比 ν の図では散逸エネルギーの条件を満足する領域を薄黄色で、同期エネルギーの条件を満足する領域を灰色で、薄黄色および灰色の両方の範囲に含まれる同期可能領域を橙色で示しており、赤色、紫色、および青色の細線は図 4.2 および図 4.3 でも示した近似解である。さらに、3 自由度系には存在しなかったパラメータである質量比 μ の影響を調べるために、同方向回転と逆方向回転のそれぞれについて図 4.6 で使用したパラメータのうち質量比のみを $\mu = 1.0$ と変更した場合 (μ を 5 倍にした場合) に求められた結果を図 4.7(a)および図 4.7(b)に示す。

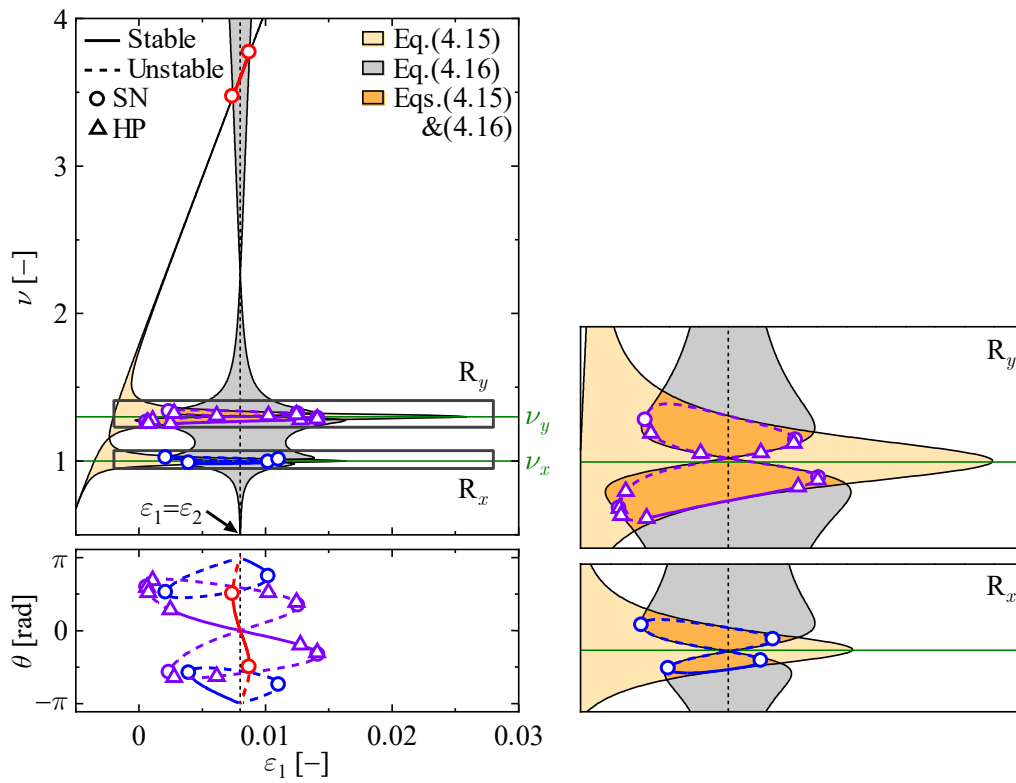
図 4.6 および図 4.7 より、同期解はすべて橙色の同期可能領域に含まれており、この領域でのみ自己同期現象が発生しうることを確認できる。さらに、3 自由度系と同様に解分枝は橙色の同期可能領域の境界に貼りつくような形状をしている。したがって、図 4.1 に示す 4 自由度系に提案手法を適用した場合においても、以下に示すように解分枝に及ぼすパラメータの影響は解の存在領域に基づいて把握できる。

- (i) 図 4.2(a)と図 4.2(b)で赤色の解分枝の形状が異なるのは、図 4.6(a)および図 4.6(b)より同期振動数比 ν の高い領域において灰色の領域の広がり方が異なるためである。
- (ii) 同方向回転に関する結果である図 4.7(a)では、図 4.6(a)に比べ赤色および紫色で示す解分枝が小さくなっている。これは質量比 μ の増加に伴って式(4.15)および式(4.16)の y 方向に関する項の影響が小さくなり、同期振動数比 ν の高い領域および固有振動数比 ν_y 近傍で薄黄色および灰色の領域がともに縮小したためである。一方、逆方向回転に関する結果である図 4.7(b)では、図 4.6(b)に比べ紫色の解分枝が小さいのに対して、赤い解分枝の存在領域は拡大している。こちらについても同様に、 y 方向に関する項の影響が小さくなったためと説明ができる。なお、 ν_x 近傍の解分枝については殆ど変化が見られない。これは、この解分枝に対して支配的な影響を及ぼす x 方向に関する項には質量比 μ が含まれていないことによる。

以上のように, エネルギー条件に基づく提案手法は 4 自由度系に対して拡張可能であり, その有効性が確認できた. なお, 拡張した手法による 4 自由度系の解析結果については, 固有振動数比が自己同期現象に及ぼす影響に着目して第 5 章でも議論を行う.

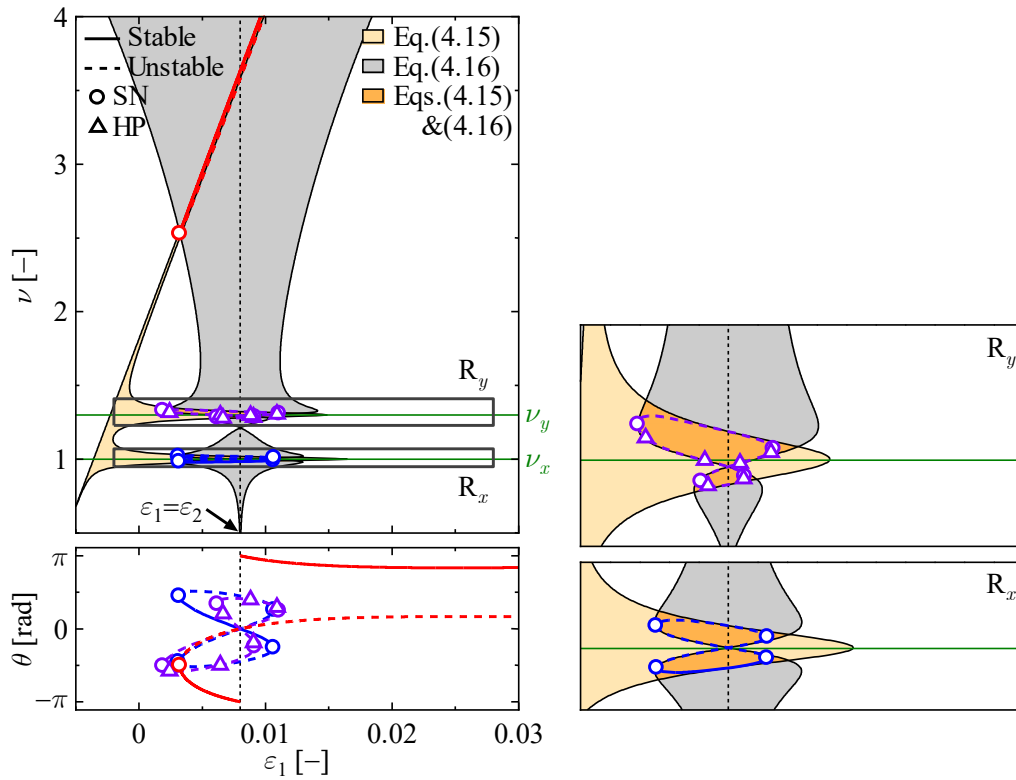


(a) Co-rotating

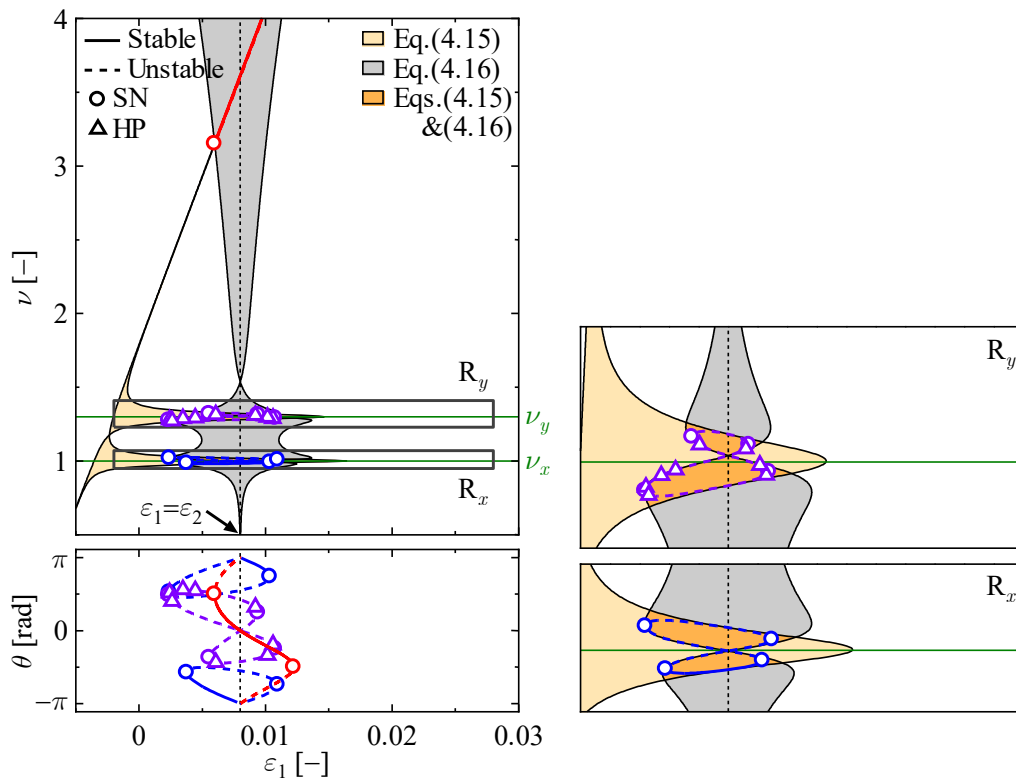


(b) Counter-rotating

Fig. 4.6 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the area satisfying the two energetic conditions in 4DOF system for $\mu = 0.2$



(a) Co-rotating



(b) Counter-rotating

Fig. 4.7 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the area satisfying the two energetic conditions in 4DOF system for $\mu = 1.0$

4・2 5自由度系

本節では、直交2方向の並進自由度と回転自由度を有する3自由度支持系に2個の回転型振動子が搭載された2振動子5自由度モデル（以下、5自由度系と呼ぶ）に対して提案手法を拡張する。

4・2・1 解析モデルおよび運動方程式

本節で扱う解析モデルを図4.8に示す。これは図2.1の3自由度系におけるブロックに対して、新たに y 方向の並進自由度と ψ 方向の回転自由度を追加した系である。ブロックは並進ばね k_x, k_y および回転ばね k_ψ 、ならびに並進方向の減衰 c_x, c_y および回転方向の減衰 c_ψ に支持されており、ブロックの重心および系全体の重心は支持点と一致しているものとする。この系ではブロックの重心まわりの慣性モーメント J_b 、不釣り合いおもりを付加する回転体の質量 m_{r1}, m_{r2} 、モータ1およびモータ2の回転軸とブロックの重心の距離 l_1 および l_2 が新たなパラメータとして加わるが、それ以外のパラメータの記号と意味については図2.1の3自由度系と同様である。

静的平衡状態を基準としたブロックの支持点の右向き変位を x 、上向き変位を y 、ブロックの角変位を図のような反時計回りを正とする角度 ψ で表し、モータ1およびモータ2の角変位をそれぞれ図のような反時計回りを正とする角度 ϕ_1 および ϕ_2 で表す。ブロックの並進運動および回転運動、モータの回転運動に関する運動方程式は次式のように求められる（導出過程の詳細については付録A1を参照されたい）。

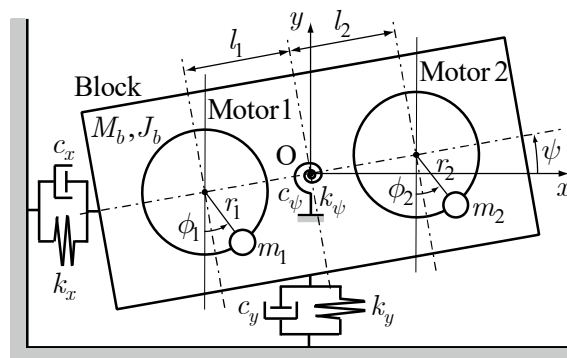


Fig. 4.8 Analytical model of 5DOF system

$$\begin{aligned}
& M\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\
& M\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\
& J\ddot{\psi} + (c_\psi + 2B)\dot{\psi} + k_\psi \psi \\
& = m_1 r_1 l_1 [\ddot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \psi) + \dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_1 - \psi)] - m_2 r_2 l_2 [\ddot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \psi) + \dot{\phi}_2^2 \cos(\phi_2 - \psi)] \\
& \quad - A(e_1 + \sigma e_2) + B(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \\
& J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 = A e_1 - m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1) \\
& \quad + m_1 r_1 l_1 [\ddot{\psi} \sin(\phi_1 - \psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\phi_1 - \psi)] + B \dot{\psi} \\
& J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 = \sigma A e_2 - m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2) \\
& \quad - m_2 r_2 l_2 [\ddot{\psi} \sin(\phi_2 - \psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\phi_2 - \psi)] + B \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
& M \triangleq M_b + m_{r_1} + m_{r_2} + m_1 + m_2 \\
& J \triangleq J_b + (m_{r_1} + m_1) l_1^2 + (m_{r_2} + m_2) l_2^2, \quad J_1 \triangleq m_1 r_1^2 + J_{r_1}, \quad J_2 \triangleq m_2 r_2^2 + J_{r_2} \\
& A \triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

であり, ブロックの支持点は系全体の重心と一致していることから,

$$(m_{r_1} + m_1) l_1 = (m_{r_2} + m_2) l_2 \tag{4.19}$$

が成立する.

いくつかの無次元パラメータを導入し, 式(4.17)を完全に無次元化する.

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \\
& \nu^2 \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \eta' + \nu_y^2 \eta = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \\
& \nu^2 \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \psi' + \nu_\psi^2 \psi \\
& = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 [\phi_1'' \sin(\phi_1 - \psi) + \phi_1'^2 \cos(\phi_1 - \psi)] \\
& \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 [\phi_2'' \sin(\phi_2 - \psi) + \phi_2'^2 \cos(\phi_2 - \psi)] - (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + \beta \nu (\phi_1' + \phi_2') \\
& \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' \\
& = \varepsilon_1 - \mu_1 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_1 + \eta'' \sin \phi_1) \\
& \quad + \mu_1 \gamma_1 \nu^2 [\psi'' \sin(\phi_1 - \psi) - \psi'^2 \cos(\phi_1 - \psi)] + \beta \nu \psi' \\
& \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' \\
& = \sigma \varepsilon_2 - \mu_2 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_2 + \eta'' \sin \phi_2) \\
& \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 [\psi'' \sin(\phi_2 - \psi) - \psi'^2 \cos(\phi_2 - \psi)] + \beta \nu \psi'
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
& \alpha_p \triangleq \frac{J_p}{Mr^2}, \quad \varepsilon_p \triangleq \frac{A}{Mr^2\omega_c^2}e_p, \quad \mu_p \triangleq \frac{m_p r_p}{Mr}, \quad \gamma_p \triangleq \frac{l_p}{r} \quad (p=1,2) \\
& r \triangleq \sqrt{\frac{J}{M}}, \quad \beta \triangleq \frac{B}{Mr^2\omega_c}, \quad \zeta_x \triangleq \frac{c_x}{2\sqrt{Mk_x}}, \quad \zeta_y \triangleq \frac{c_y}{2\sqrt{Mk_y}}, \quad \zeta_\psi \triangleq \frac{c_\psi + 2B}{2\sqrt{Jk_\psi}} \\
& \xi \triangleq \frac{x}{r}, \quad \eta \triangleq \frac{y}{r}, \quad \nu \triangleq \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \nu_x \triangleq \frac{\omega_x}{\omega_c}, \quad \nu_y \triangleq \frac{\omega_y}{\omega_c}, \quad \nu_\psi \triangleq \frac{\omega_\psi}{\omega_c}, \quad \tau \triangleq \omega t \\
& \omega \triangleq \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_x \triangleq \sqrt{\frac{k_x}{M}}, \quad \omega_y \triangleq \sqrt{\frac{k_y}{M}}, \quad \omega_\psi \triangleq \sqrt{\frac{k_\psi}{J}}, \quad ' \triangleq \frac{d}{d\tau}
\end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

である。\$T\$ は式(4.17)の同期解の周期（したがって、式(4.20)の同期解の無次元周期は\$2\pi\$），\$r\$ は回転半径，\$\omega_c\$ は代表固有角振動数である。また，\$\zeta_\psi\$ は基礎支持の回転方向の減衰比，\$\psi\$ はブロックの無次元角変位，\$\nu_\psi\$ は回転方向の固有振動数比である。その他のパラメータについては，一部に系の構造の違いによる定義式の変更はあるものの，それらの物理的意味は2.1節と4・1・1項でそれぞれ述べた3自由度系および4自由度系と同様である。

4・2・2 提案手法の適用

本項では，図4.8で示した5自由度系についてエネルギーが満たすべき2本の条件式を求め，近似を導入することで積分を実行した後の条件式を解析的に求める。その後，それらの条件式から近似解および同期解の存在限界を表す式を求める。なお，式の導出の詳細については付録A4に示す。

4・2・2・1 エネルギーに関する条件式の導出

以下の議論において，\$\xi, \eta, \psi, \phi_1\$ および \$\phi_2\$ は同期解を表すものとする。式(4.20)をエネルギー積分し整理すると，式(2.10)に対応する式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
& \Delta D_\xi = \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\
& \Delta D_\eta = \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\
& \Delta D_\psi = \Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_2} \\
& \Delta D_{\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_1} = \Delta R_{\phi_1} \\
& \Delta D_{\phi_2} + \Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\psi\phi_2} = \Delta R_{\phi_2}
\end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

式(4.22)の詳細は付録A4の式(A4.29)に示す。\$\Delta D_\xi, \Delta D_\eta, \Delta D_\psi, \Delta D_{\phi_1}\$ および \$\Delta D_{\phi_2}\$ はそれぞれ \$x, y\$ および \$\psi\$ 軸方向の基礎支持の粘性減衰，モータ1の内部減衰およびモータ2の内部減衰で消費される（無次元）散逸エネルギー，\$\Delta R_{\phi_1}\$ および \$\Delta R_{\phi_2}\$ はそれぞれモータ1

およびモータ 2 に対して外部電源の印加電圧により供給される（無次元）励振エネルギーを表す。 $\Delta T_{\xi\phi_p}$, $\Delta T_{\eta\phi_p}$ および $\Delta T_{\psi\phi_p}$ ($p=1,2$) はブロックとモータ p の間に作用する x 方向, y 方向および ψ 方向の内力および内力トルクによるモータ p からブロックへのエネルギー移動量を表す。

システム全体の 1 周期あたりのエネルギー積分は, 式(4.22)の 5 式の和を取ることによって, 次式のように求められる。

$$\Delta D_{\xi} + \Delta D_{\eta} + \Delta D_{\psi} + \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (4.23)$$

一方, 式(4.22)の第 4 式から第 5 式を辺々引いて整理すると, 次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} & (\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_1}) - (\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\psi\phi_2}) \\ & = (\Delta R_{\phi_1} - \Delta D_{\phi_1}) - (\Delta R_{\phi_2} - \Delta D_{\phi_2}) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

4・2・2・2 近似解の導出

3 自由度系および 4 自由度系では式(2.13)に示した近似に基づいて式(4.23)および式(4.24)に対応するエネルギー条件式 (3 自由度系では式(2.11)および式(2.12), 4 自由度系では式(4.6)および式(4.7)) の各項を解析的に求めることができた。しかしながら, 5 自由度系においては運動方程式(4.20)に ψ の非線形項が含まれるため, 式(2.13)に示す近似のみでは式(4.23)および式(4.24)における各項を解析的に求めることができない。そこで, ブロックの角変位 ψ が十分に小さい ($\psi \approx 0$) とみなし, 式(4.20)を次式のように ψ について線形化する。

$$\left. \begin{aligned} & \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \\ & \nu^2 \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \eta' + \nu_y^2 \eta = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \\ & \nu^2 \psi'' + 2\zeta_{\psi} \nu_{\psi} \nu \psi' + \nu_{\psi}^2 \psi \\ & = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left[\phi_1'' (\sin \phi_1 - \psi \cos \phi_1) + \phi_1'^2 (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) \right] \\ & \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left[\phi_2'' (\sin \phi_2 - \psi \cos \phi_2) + \phi_2'^2 (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) \right] \\ & \quad - (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + \beta \nu (\phi_1' + \phi_2') \\ & \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' = \varepsilon_1 - \mu_1 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_1 + \eta'' \sin \phi_1) + \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \psi'' \sin \phi_1 + \beta \nu \psi' \\ & \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' = \sigma \varepsilon_2 - \mu_2 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_2 + \eta'' \sin \phi_2) - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \psi'' \sin \phi_2 + \beta \nu \psi' \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

次に, 2 つのモータの角変位 ϕ_1 および ϕ_2 に関して式(2.13)の一定角速度近似を導入する。式(2.13)を式(4.25)に代入するとブロックの運動方程式 (式(4.25)の第 1 式, 第 2 式および第 3 式) は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
& \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi = \mu_1 \nu^2 \sin \tau + \sigma \mu_2 \nu^2 \sin(\tau + \theta) \\
& \nu^2 \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \eta' + \nu_y^2 \eta = -\mu_1 \nu^2 \cos \tau - \mu_2 \nu^2 \cos(\tau + \theta) \\
& \nu^2 \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \psi' + \nu_\psi^2 \psi \\
& = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 (\cos \tau + \psi \sin \tau) - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 [\cos(\tau + \theta) + \sigma \psi \sin(\tau + \theta)] \\
& \quad - (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + (1 + \sigma) \beta \nu
\end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

ξ , η および ψ を調和関数で近似し, 式(4.26)の第1式, 第2式および第3式に調和バランス法を適用することで, ξ , η および ψ の近似解が次式のように求められる.

$$\left. \begin{aligned}
\xi_{c1} &\triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, & \xi_{s1} &\triangleq \frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\
\xi_{c2} &\triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, & \xi_{s2} &\triangleq \frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\
\eta_{c1} &\triangleq -\frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2}, & \eta_{s1} &\triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \\
\eta_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2}, & \eta_{s2} &\triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \\
\psi_{c1} &\triangleq \frac{\mu_1 \gamma_1 \nu^2 (\nu_\psi^2 - \nu^2)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2}, & \psi_{s1} &\triangleq \frac{2\mu_1 \gamma_1 \zeta_\psi \nu_\psi \nu^3}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \\
\psi_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2 \gamma_2 \nu^2 (\nu_\psi^2 - \nu^2)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2}, & \psi_{s2} &\triangleq -\frac{2\mu_2 \gamma_2 \zeta_\psi \nu_\psi \nu^3}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2}
\end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

ブロックの角変位 ψ の無次元化および式(2.13)に示す ϕ_1 および ϕ_2 の近似により式(4.22)の各項は式(A4.38)で表され, 得られた ξ , η , ψ を式(A4.38)に代入すると式(4.23)および式(4.24)を満足する. 式(2.13)の ϕ_1 , ϕ_2 および得られた ξ , η , ψ を式(A4.38)に代入し, これを式(4.23)に代入することによって, 式(4.23)に対応する散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式が得られる.

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{2\pi \zeta_x \nu_x \nu^5 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma \mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{2\pi \zeta_y \nu_y \nu^5 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \\
& + \frac{2\pi \zeta_\psi \nu_\psi \nu^5 (\mu_1^2 \gamma_1^2 + \mu_2^2 \gamma_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + 4\pi \beta \nu \\
& = 2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

同様に式(A4.38)を式(4.24)に代入することにより, 同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式が得られる.

$$\begin{aligned}
& 2\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\
& + 2\pi(\mu_1^2 \gamma_1^2 - \mu_2^2 \gamma_2^2)\nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \\
& - 2\pi\mu_1\mu_2\nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\
& \quad \left. - \gamma_1\gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \sin \theta \\
& = 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

式(4.24)および式(4.25)を同期振動数比 ν および位相差 θ について解くことにより同期解が求められる。 ν を設定値として ε_1 および θ について解く場合には、3自由度系および4自由度系の場合と同様に式(2.25)および式(2.23)から同期解が得られる。ただし、5自由度系ではそれらの式に含まれる d_c 、 d_0 、 s_s および s_0 がそれぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned}
d_c & \triangleq 2\mu_1\mu_2\nu^5 \left[\sigma \frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\
& \quad \left. - \gamma_1\gamma_2 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \\
d_0 & \triangleq (\mu_1^2 + \mu_2^2)\nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\
& \quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 + \mu_2^2 \gamma_2^2)\nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + 2\beta\nu - \varepsilon_2 \\
s_s & \triangleq -\mu_1\mu_2\nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\
& \quad \left. - \gamma_1\gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \\
s_0 & \triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\
& \quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 - \mu_2^2 \gamma_2^2)\nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

4・2・2・3 近似解の安定判別

シューティング法で求められる数値解の安定判別に必要な式(4.20)の変分方程式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned}
 & \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & \nu^2 \delta \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + \nu_y^2 \delta \eta \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \delta \psi' + \nu_\psi^2 \delta \psi \\
 &= \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ \delta \phi_1'' \sin(\phi_1 - \psi) + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos(\phi_1 - \psi) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\phi_1'' \cos(\phi_1 - \psi) - \phi_1'^2 \sin(\phi_1 - \psi) \right] (\delta \phi_1 - \delta \psi) \right\} \\
 & \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ \left[\delta \phi_2'' \sin(\phi_2 - \psi) + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos(\phi_2 - \psi) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[\phi_2'' \cos(\phi_2 - \psi) - \phi_2'^2 \sin(\phi_2 - \psi) \right] (\delta \phi_2 - \delta \psi) \right\} \\
 & \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 + (-\xi'' \sin \phi_1 + \eta'' \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad + \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ \delta \psi'' \sin(\phi_1 - \psi) - 2\psi' \delta \psi' \cos(\phi_1 - \psi) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\psi'' \cos(\phi_1 - \psi) + \psi'^2 \sin(\phi_1 - \psi) \right] (\delta \phi_1 - \delta \psi) \right\} + \beta \nu \delta \psi' \\
 & \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
 &= -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + (-\xi'' \sin \phi_2 + \eta'' \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ \delta \psi'' \sin(\phi_2 - \psi) - 2\psi' \delta \psi' \cos(\phi_2 - \psi) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\psi'' \cos(\phi_2 - \psi) + \psi'^2 \sin(\phi_2 - \psi) \right] (\delta \phi_2 - \delta \psi) \right\} + \beta \nu \delta \psi'
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

この変分方程式は提案手法による近似解の精度検証に用いるシューティング法の安定判別で使用される。

一方、5自由度系に提案手法を用いる場合には、運動方程式を式(4.25)のように ψ について線形化しているため、線形化された後の運動方程式に対応した変分方程式を安定判別に用いる必要がある。式(4.25)に対応した変分方程式を次式に示す。

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + \nu_y^2 \delta \eta \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \delta \psi' + \nu_\psi^2 \delta \psi \\
& = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ (-\phi_1'' \cos \phi_1 + \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \psi \right. \\
& \quad \left. + (\sin \phi_1 - \psi \cos \phi_1) \delta \phi_1'' + 2\phi_1' (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) \delta \phi_1' \right. \\
& \quad \left. + [\phi_1'' (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) + \phi_1'^2 (-\sin \phi_1 + \psi \cos \phi_1)] \delta \phi_1 \right\} \\
& - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ (-\phi_2'' \cos \phi_2 + \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \psi \right. \\
& \quad \left. + (\sin \phi_2 - \psi \cos \phi_2) \delta \phi_2'' + 2\phi_2' (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) \delta \phi_2' \right. \\
& \quad \left. + [\phi_2'' (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) + \phi_2'^2 (-\sin \phi_2 + \psi \cos \phi_2)] \delta \phi_2 \right\} \\
& \quad + \beta \nu (\delta \phi_1' + \delta \phi_2') \\
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left\{ \delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 - \gamma_1 \delta \psi'' \sin \phi_1 \right. \\
& \quad \left. + [-\xi'' \sin \phi_1 + (\eta'' - \gamma_1 \psi'') \cos \phi_1] \delta \phi_1 \right\} + \beta \nu \delta \psi' \\
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
& = -\mu_2 \nu^2 \left\{ \delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + \gamma_2 \delta \psi'' \sin \phi_2 \right. \\
& \quad \left. + [-\xi'' \sin \phi_2 + (\eta'' + \gamma_2 \psi'') \cos \phi_2] \delta \phi_2 \right\} + \beta \nu \delta \psi'
\end{aligned} \tag{4.32}$$

式(4.32)に対して式(2.13)のような一定角速度近似を導入した後、微小変分 $\delta \xi$, $\delta \eta$ および $\delta \psi$ については式(2.29)に示すように $\cos \tau$ および $\sin \tau$ を含む項を仮定して調和バランスの原理を適用し、第1式、第2式、および第3式では $\cos \tau$ および $\sin \tau$ の係数の部分を、第4式と第5式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると式(2.30)および式(2.31)に対応する式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}\xi'' + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{K}\xi = \mathbf{0} \\
& \xi = (\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c, \delta\eta_s, \delta\psi_c, \delta\psi_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T \\
& \mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{M}_\mu^T \\ \mathbf{M}_\mu & \mathbf{M}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\zeta & -\mathbf{C}_\mu^T \\ \mathbf{C}_\mu & \mathbf{C}_\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\nu & \mathbf{K}_\mu^T \\ \mathbf{K}_\mu & \mathbf{K}_\beta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{M}_\mu \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mu L} & \mathbf{M}_{\mu R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_1 \nu^2 & 0 & 0 \\ \mu_2 \nu^2 \cos \theta & -\mu_2 \nu^2 \sin \theta & \sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{M}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_1 \nu^2 & 0 & -\mu_1 \gamma_1 \nu^2 \\ \sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta & \sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta & \sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_\alpha \triangleq \text{diag}[2\alpha_1 \nu^2, 2\alpha_2 \nu^2] \\
& \mathbf{C}_\zeta \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_x \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_x \nu_x \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_x \nu_x \nu \end{bmatrix} \\
& \mathbf{C}_y \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_y \nu_y \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_y \nu_y \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\psi \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\mu \triangleq [\mathbf{C}_{\mu L} \quad \mathbf{C}_{\mu R}] \\
& \mathbf{C}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 2\mu_1 \nu^2 & -2\mu_1 \nu^2 \\ 2\mu_2 \nu^2 \sin \theta & 2\mu_2 \nu^2 \cos \theta & -2\sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{C}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 2\mu_1 \gamma_1 \nu^2 & 0 \\ 2\sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta & -2\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta & 2\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{C}_\beta \triangleq \text{diag}[2\beta\nu, 2\beta\nu] \\
& \mathbf{K}_\nu \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_x \triangleq \begin{bmatrix} \nu_x^2 - \nu^2 & 2\zeta_x \nu_x \nu \\ -2\zeta_x \nu_x \nu & \nu_x^2 - \nu^2 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{K}_y \triangleq \begin{bmatrix} \nu_y^2 - \nu^2 & 2\zeta_y \nu_y \nu \\ -2\zeta_y \nu_y \nu & \nu_y^2 - \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\psi \triangleq \begin{bmatrix} \nu_\psi^2 - \nu^2 & 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \\ -2\zeta_\psi \nu_\psi \nu & \nu_\psi^2 - \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\mu \triangleq [\mathbf{K}_{\mu L} \quad \mathbf{K}_{\mu R}] \\
& \mathbf{K}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} -\mu_1 \nu^2 & 0 & 0 \\ -\mu_2 \nu^2 \cos \theta & \mu_2 \nu^2 \sin \theta & -\sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{K}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} -\mu_1 \nu^2 & 0 & \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \\ -\sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta & -\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta & -\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix} \\
& \mathbf{K}_k \triangleq \text{diag}[\mu_1 \nu^2 k_1, \mu_2 \nu^2 k_2] \\
& k_1 \triangleq \xi_{s1} + \sigma(\xi_{s2} \cos \theta - \xi_{c2} \sin \theta) - \eta_{c1} - \eta_{c2} \cos \theta - \eta_{s2} \sin \theta \\
& \quad + \gamma_1 \psi_{c1} + \gamma_1 \psi_{c2} \cos \theta + \gamma_1 \psi_{s2} \sin \theta \\
& k_2 \triangleq \xi_{s2} + \sigma(\xi_{s1} \cos \theta + \xi_{c1} \sin \theta) - \eta_{c2} - \eta_{c1} \cos \theta + \eta_{s1} \sin \theta \\
& \quad - \gamma_2 \psi_{c2} - \gamma_2 \psi_{c1} \cos \theta + \gamma_2 \psi_{s1} \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= A\eta \\ \eta &\triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

式(4.34)の A の固有値を求めることにより, 5 自由度系における安定判別が可能となる.

4・2・2・4 同期可能領域の導出

5 自由度系における 2 本の条件式 (式(4.28), および式(4.29)) を満たす同期解の存在限界を表す関係式も 3 自由度系および 4 自由度系と同様に求められる. 1 本目は式(4.28)において $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であることから次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \min(DE_-, DE_+) &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \max(DE_-, DE_+) \\ DE_- &\triangleq (\mu_1 - \sigma\mu_2)^2 \frac{\zeta_x \nu_x \nu^5}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + (\mu_1 - \mu_2)^2 \frac{\zeta_y \nu_y \nu^5}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \\ &\quad + (\mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \gamma_2)^2 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi \nu^5}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + 2\beta\nu \\ DE_+ &\triangleq (\mu_1 + \sigma\mu_2)^2 \frac{\zeta_x \nu_x \nu^5}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + (\mu_1 + \mu_2)^2 \frac{\zeta_y \nu_y \nu^5}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \\ &\quad + (\mu_1 \gamma_1 - \mu_2 \gamma_2)^2 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi \nu^5}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + 2\beta\nu \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

2 本目は式(4.29)において $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であることから次のようになる.

$$\left. \begin{aligned}
& \min(SE_-, SE_+) \leq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq \max(SE_-, SE_+) \\
& SE_- \triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2) \nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\
& \quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 - \mu_2^2 \gamma_2^2) \nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \\
& \quad - \mu_1 \mu_2 \nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\
& \quad \quad \left. - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \\
& SE_+ \triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2) \nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\
& \quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 - \mu_2^2 \gamma_2^2) \nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \\
& \quad + \mu_1 \mu_2 \nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\
& \quad \quad \left. - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

5自由度系においても、式(4.35)および式(4.36)，ならびにそれらの両方を満たす同期可能領域を用いることでパラメータが自己同期現象に及ぼす影響を把握できる。

4・2・3 解析結果

本項では、4.2.2項で示した提案手法の計算精度および有効性について検証する。

4・2・3・1 近似精度の検証

数種類のパラメータ設定に対する同期解を4.2.2節で述べた手法で求めて安定判別を行い、シューティング法の結果と比較することにより計算精度を検証する。4自由度系の場合と同様に5自由度系の場合においても2つのモータの回転方向によって解分枝の形状が異なるため、同方向回転および逆方向回転のそれぞれについて検討を行う。本節に示す解析結果において、とくに明示しないパラメータは表4.2に示すとおりであり、4自由度系との対応がわかりやすいように共通するパラメータは同一のものを用いた。

モータとブロックの無次元重心間距離が $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0$ であり、モータ2の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 8 \times 10^{-3}$ に固定した状態でモータ1の無次元電圧 ε_1 を変化させながら提案手法により

Table 4.2 Parameters in 5DOF system

| | | | | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|---------|-----|------------|-----|
| α_1, α_2 | 3.3×10^{-2} | β | 2.2×10^{-3} | ν_x | 1.0 | ν_ψ | 1.8 |
| μ_1, μ_2 | 2×10^{-2} | $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_\psi$ | 2×10^{-2} | ν_y | 1.3 | | |

同期解の計算を行ったところ、4本の解分枝が求められた。同方向回転の場合の結果を図4.9(a)に、逆方向回転の場合の結果を図4.9(b)に示す。図中の線種および記号の意味は4自由度系について述べた図4.2と同じである。ただし、図4.9では自由度の増加にともない ν_ψ を表す緑色の横線が追加され、解分枝上に▽印で示した周期倍分岐点が新たに現れている。また、図4.10(a-1)から図4.10(a-4)には図4.9(a)の解分枝、図4.10(b-1)から図4.10(b-4)には図4.9(b)の解分枝の詳細をそれぞれ個別に示している。上下の図の横軸はいずれもモータ1の無次元電圧 ε_1 であり、縦軸は上図では同期振動数比 ν 、下図ではモータ1とモータ2の位相差 θ 、ブロックの ψ 方向の振幅 Ψ 、 y 方向の振幅 H および x 方向の振幅 E である。図4.9および図4.10のように、提案手法で得られた解分枝の形状についてはシューティング法で得られた計算結果とよく一致している。安定性については、一部正確に求められていないものの概ね精度良く求められている。

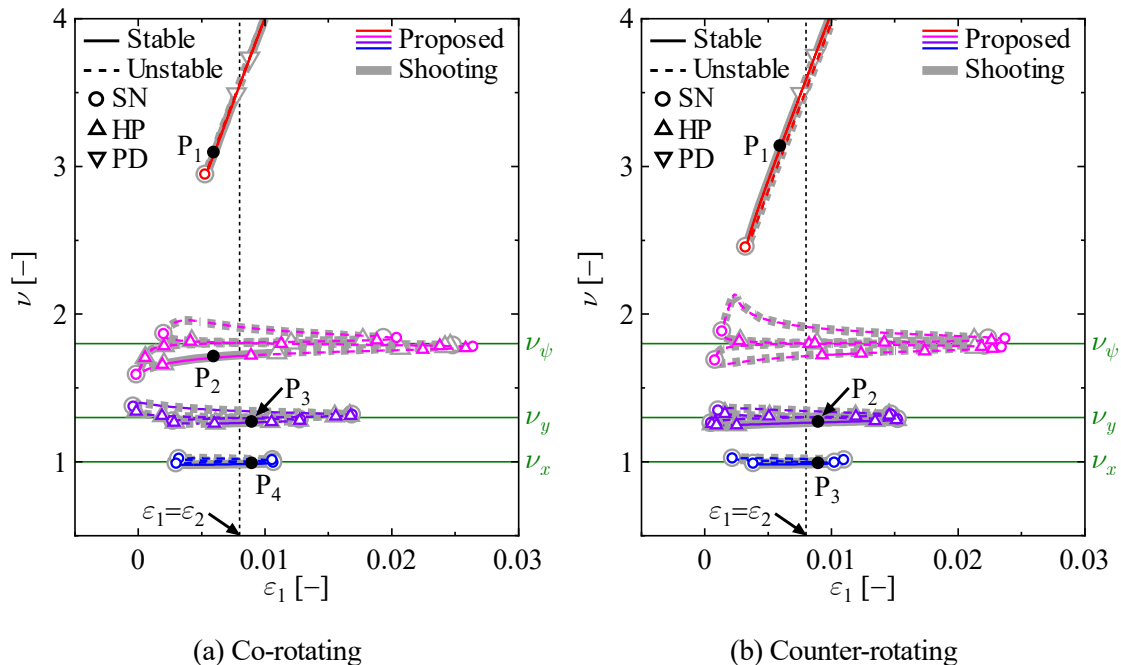
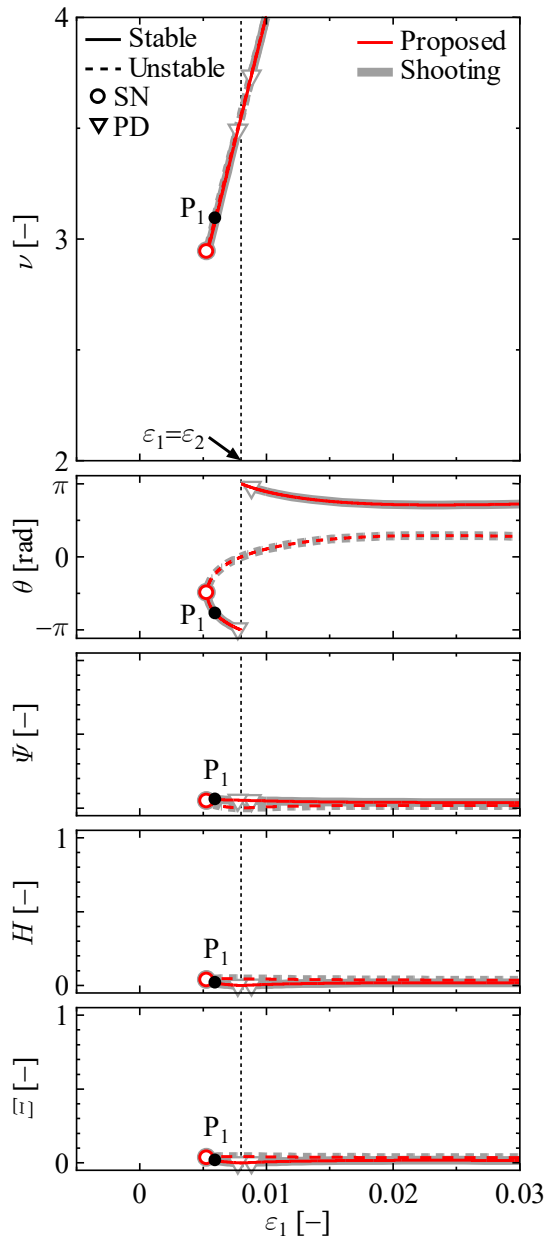
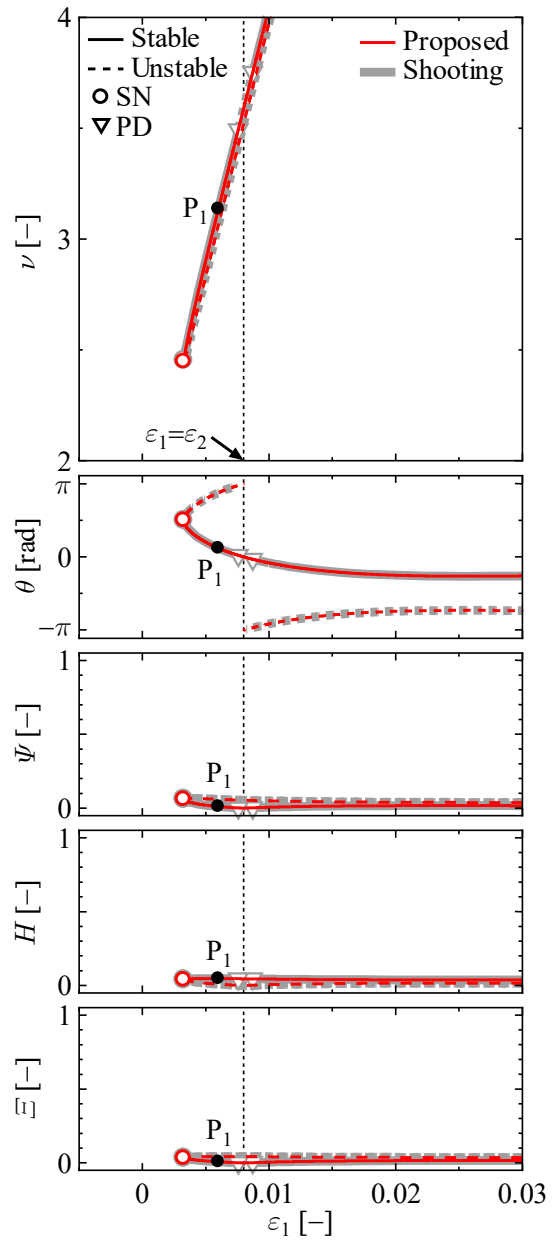


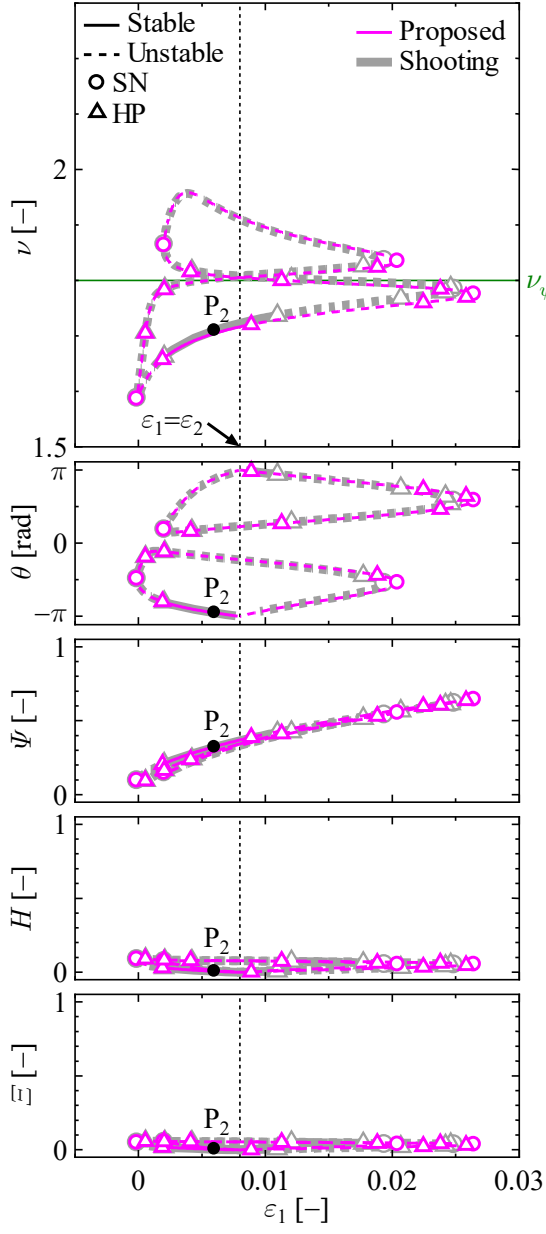
Fig. 4.9 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the shooting method in 5DOF model



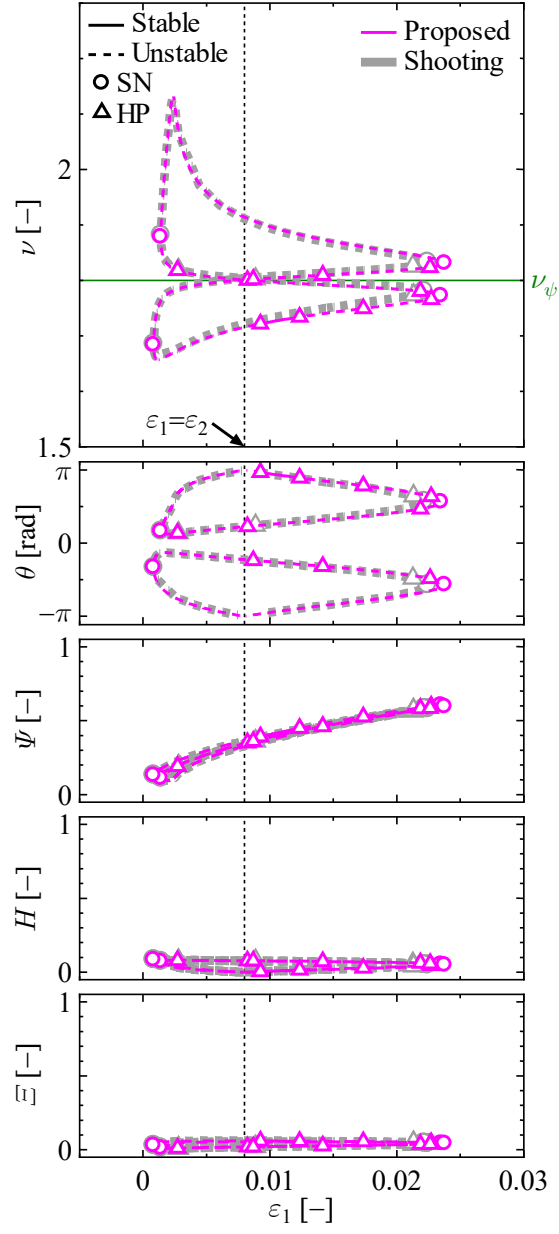
(a-1) Co-rotating ($\nu \gg \nu_x, \nu_y, \nu_\psi$)



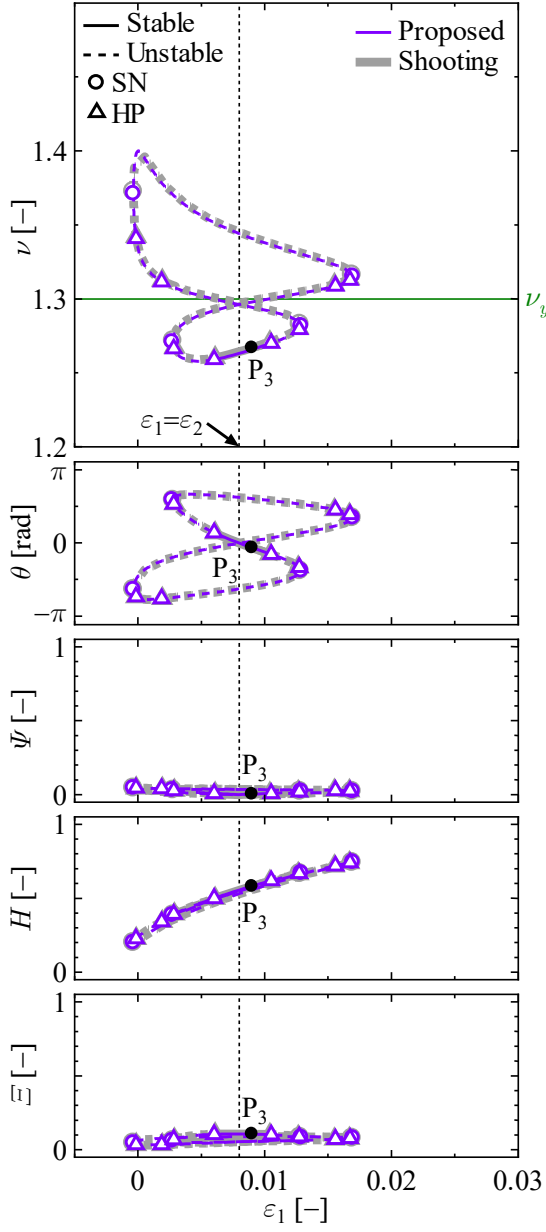
(b-1) Counter-rotating ($\nu \gg \nu_x, \nu_y, \nu_\psi$)



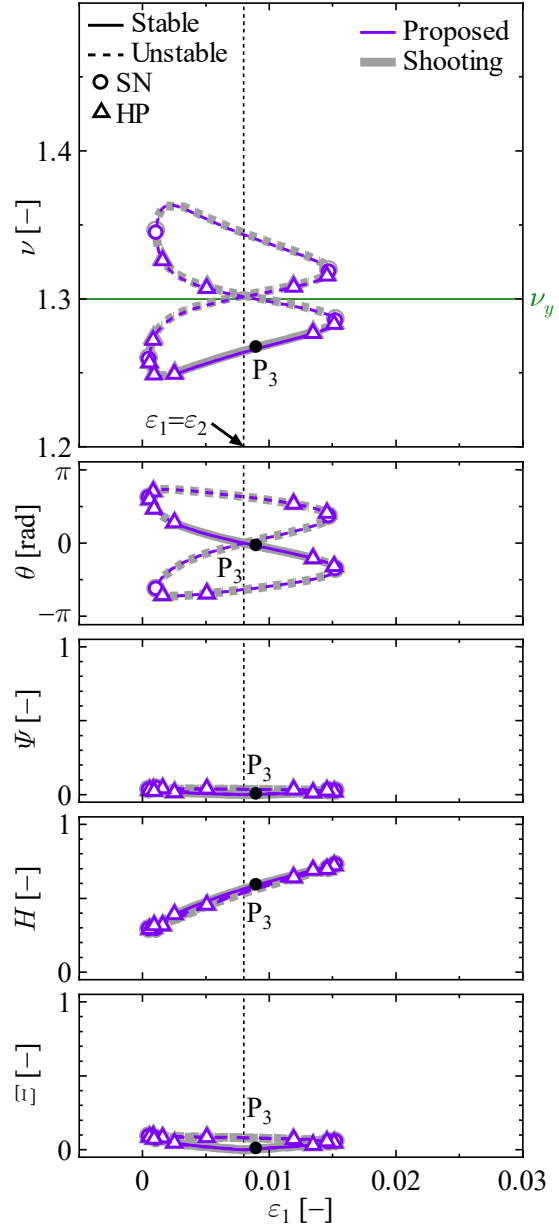
(a-2) Co-rotating ($\nu \approx \nu_\psi$)



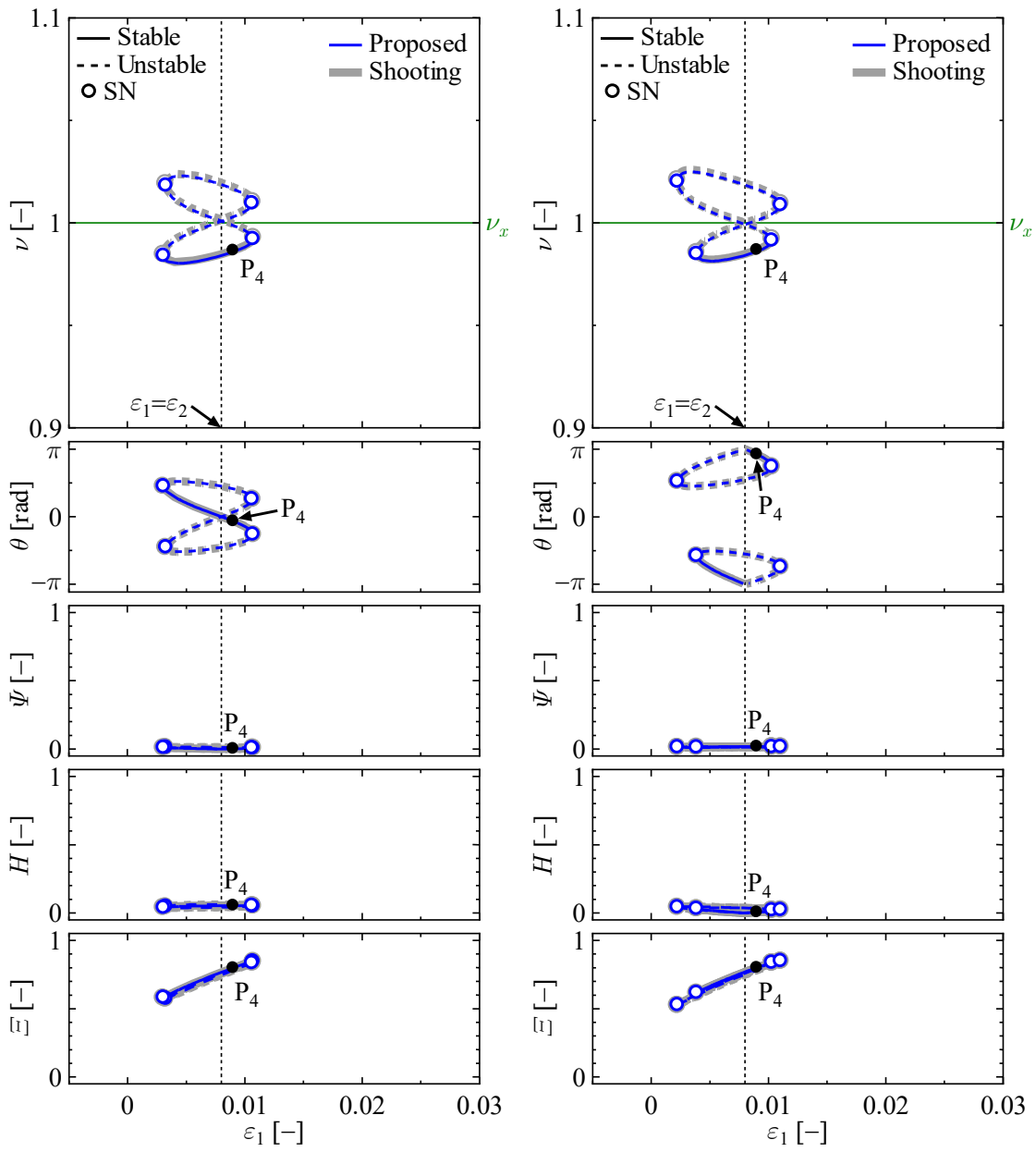
(b-2) Counter-rotating ($\nu \approx \nu_\psi$)



(a-3) Co-rotating ($\nu \approx \nu_y$)



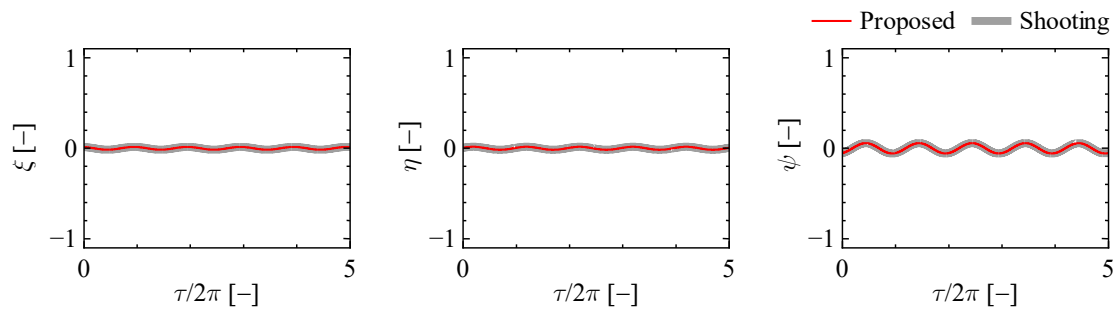
(b-3) Counter-rotating ($\nu \approx \nu_y$)



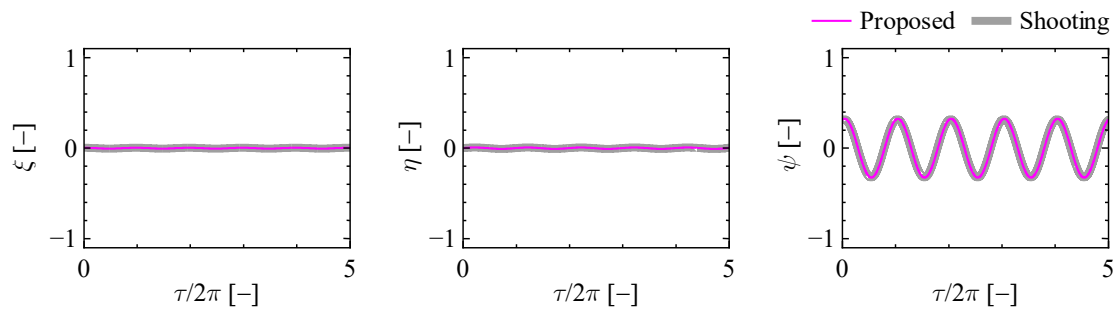
(a-4) Co-rotating ($\nu \approx \nu_x$)

(b-4) Counter-rotating ($\nu \approx \nu_x$)

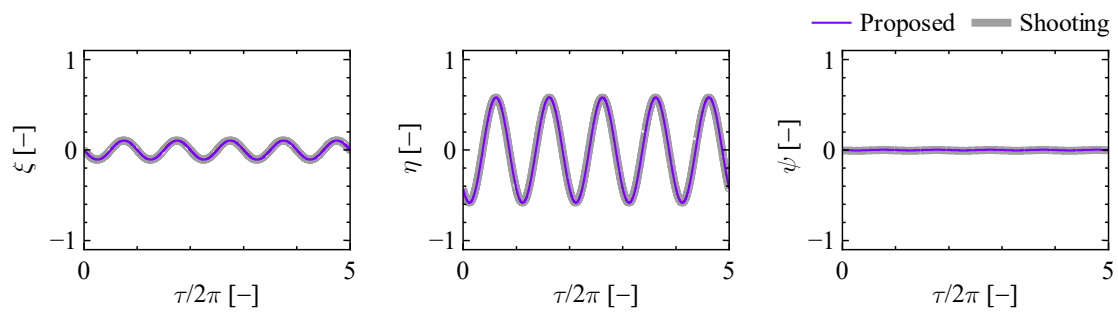
Fig. 4.10 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the shooting method in 5DOF model



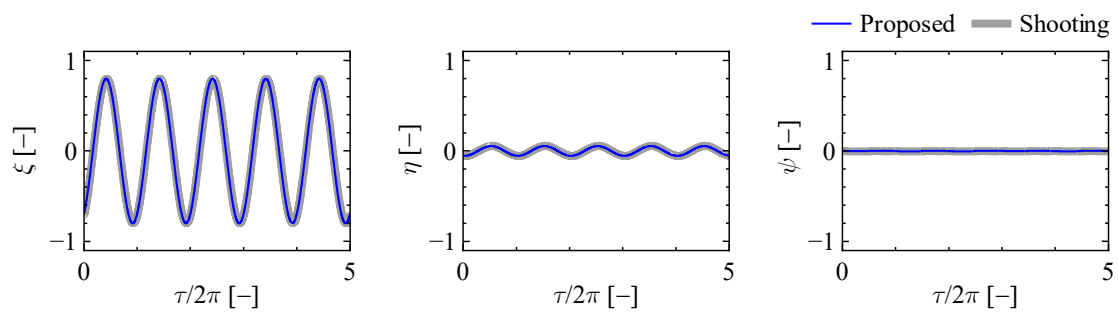
(a) P_1 (anti-phase)



(b) P_2 (anti-phase)

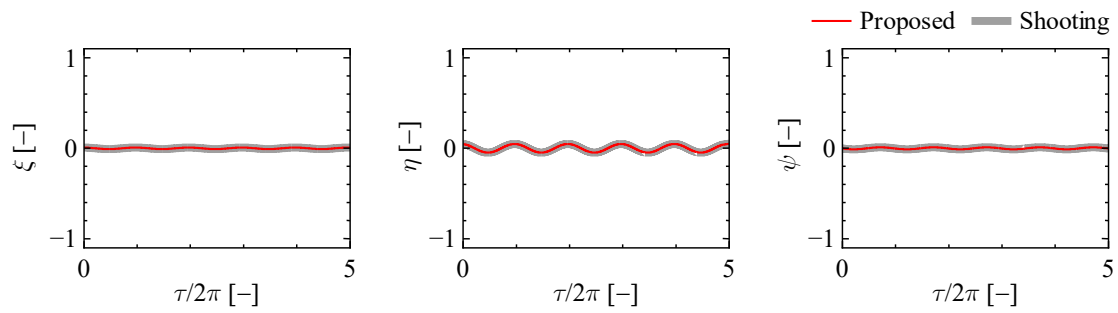


(c) P_3 (in-phase)

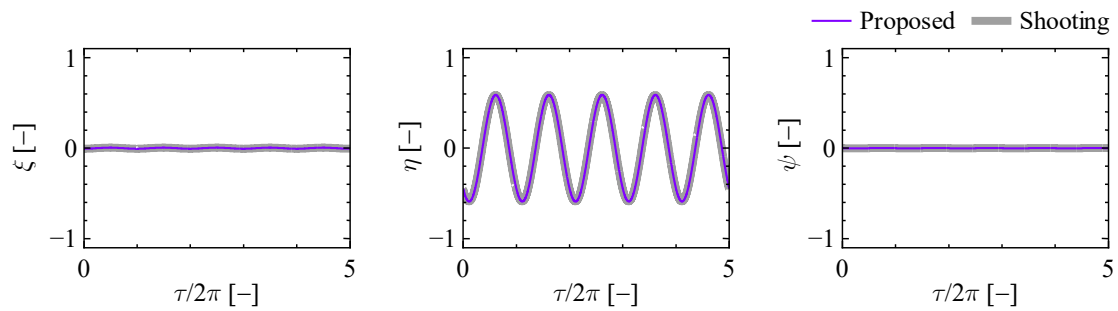


(d) P_4 (in-phase)

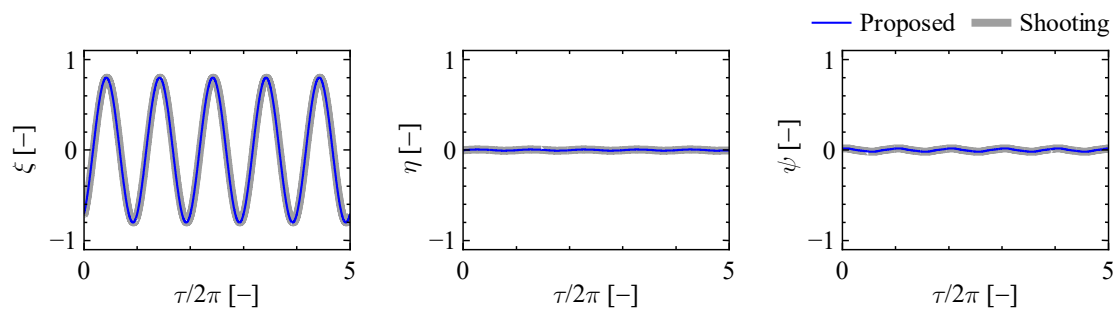
Fig. 4.11 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 4.9(a)



(a) P_1 (in-phase)



(b) P_3 (in-phase)



(c) P_4 (anti-phase)

Fig. 4.12 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 4.9(b)

図 4.10 に示す解分枝の特徴を以下に述べる．図 4.10(a-1)および図 4.10(b-1)の赤色で示した解分枝は，無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν が高い範囲に向かって閉じることなく伸びている．2つの解分枝の振幅は x, y 方向および ψ 方向ともに小さい．図 4.10(a-2)および図 4.10(b-2)に示す桃色の解分枝は，固有振動数比 ν_ψ 近傍で 8 の字型をした閉曲線となっている．回転方向に依らず ψ 方向で大振幅となり，モータ間の位相差は $\theta = \pi$ を中心とした値をとる．図 4.10(a-3)および図 4.10(b-3)に示す紫色の解分枝は，固有振動数比 ν_y 近傍で 8 の字型の閉曲線となっている．回転方向に依らず y 方向に大きく振動し，モータ間の位相差は $\theta = 0$ を中心とした値をとる．図 4.10(a-4)および図 4.10(b-4)に示す青色の解分枝も同様に固有振動数比 ν_x 近傍で 8 の字型の閉曲線を形成する．両者とも x 方向に大きく振動するが，モータ間の位相差は図 4.10(a-4)では $\theta = 0$ を，図 4.10(b-4)では $\theta = \pi$ を中心とした値をとる．

このように，解分枝の種類により振幅の大きさが異なることが確認できる．これは，赤色の解分枝は同期振動数比 ν が固有振動数比 ν_ψ, ν_y および ν_x から離れているのに対し，桃色，紫色および青色の解分枝はそれぞれ固有振動数比 ν_ψ, ν_y および ν_x に近いことに対応している．また回転方向の違いにより，解分枝の形状だけでなくモータ間の位相差の違いが生じる場合がある．この位相差の違いについては，同方向回転の場合， x および y 方向は $\theta = 0$ （同位相）のとき， ψ 方向では $\theta = \pi$ （逆位相）のときに最も大きく振動しやすい一方で，逆方向回転の場合， y 方向は $\theta = 0$ （同位相）のとき， x および ψ 方向は $\theta = \pi$ （逆位相）のときに最も大きく振動しやすいためであると理解できる．

図 4.9 および図 4.10 では，それぞれの解分枝に広い範囲で安定解が存在する．ここで，図 4.11 では図 4.9(a)の点 P_1, P_2, P_3 および P_4 の安定解の時刻歴波形を，図 4.12 では，図 4.9(b)の点 P_1, P_3 および P_4 の安定解の時刻歴波形を提案手法（赤色，桃色，紫色および青色の細線）とシューティング法（灰色の太線）で求め重ね描きを行った．ここでは，図 4.4 および図 4.5 と同様に無次元時間 τ を設定し，モータ 1 およびモータ 2 の角変位については省略した．これらの図から，提案手法により求められる系の挙動についてもシューティング法による結果とよく一致していることが確認できる．

以上より，図 4.8 に示す 5 自由度系に提案手法を拡張した場合においても，求められたすべての解について提案手法の計算結果はシューティング法の計算結果とよく一致しており，提案手法の精度を検証できた．

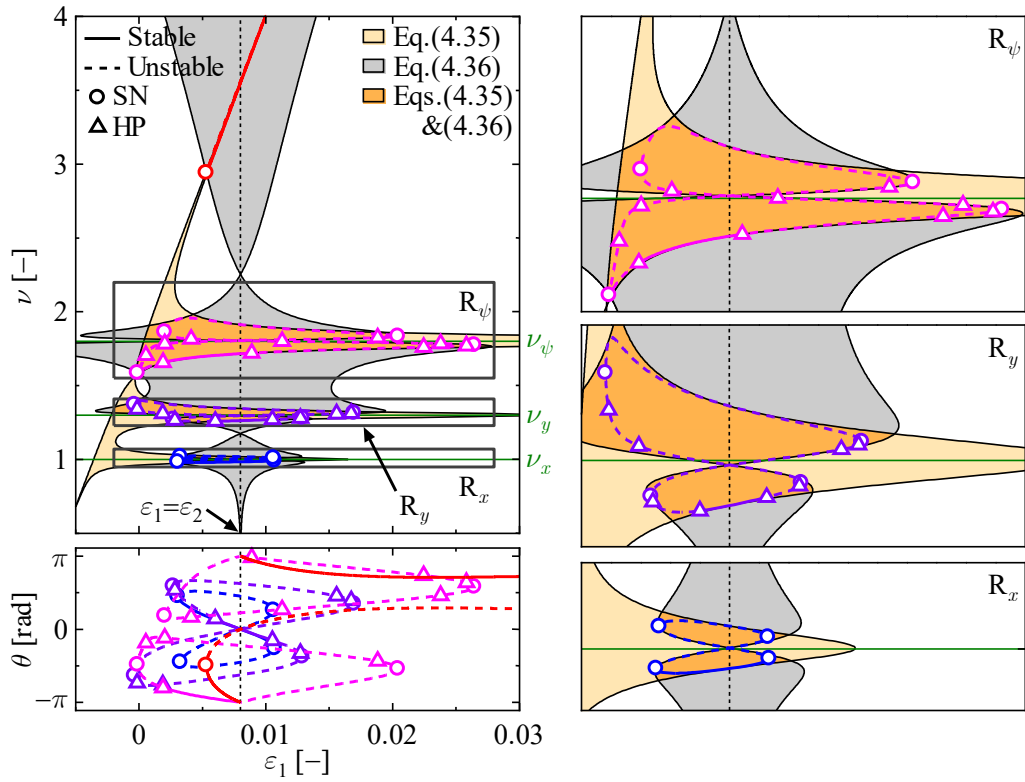
4・2・3・2 同期可能領域を用いた解析

図 4.9 で扱ったパラメータについて、散逸エネルギーの条件 (式(4.35)) および同期エネルギーの条件 (式(4.36)) を満足する無次元電圧 ε_1 および同期振動数比 ν の範囲を求めた。同方向回転の場合の結果を図 4.13(a)に、逆方向回転の場合の結果を図 4.13(b)に示す。横軸および縦軸は図 4.6 および図 4.7 と同一であり、領域 R_ψ , R_y および領域 R_x の拡大図を右側に示した。散逸エネルギーおよび同期エネルギーの条件を満足する領域を薄黄色および灰色で、両方の条件を満足する同期可能領域を橙色で示している。4.2.3.1 目で示した近似解も桃色、赤色、紫色、および青色の細線で示している。また、3 自由度系および 4 自由度系には存在しなかったパラメータであるモータとブロックの無次元重心間距離 γ_1, γ_2 の影響を調べるために、図 4.13 で使用したパラメータのうち重心間距離 γ_1, γ_2 を $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ とした場合 (γ_1, γ_2 をそれぞれ 50%小さくした場合) を図 4.14(a) (同方向回転) および図 4.14(b) (逆方向回転) に示す。

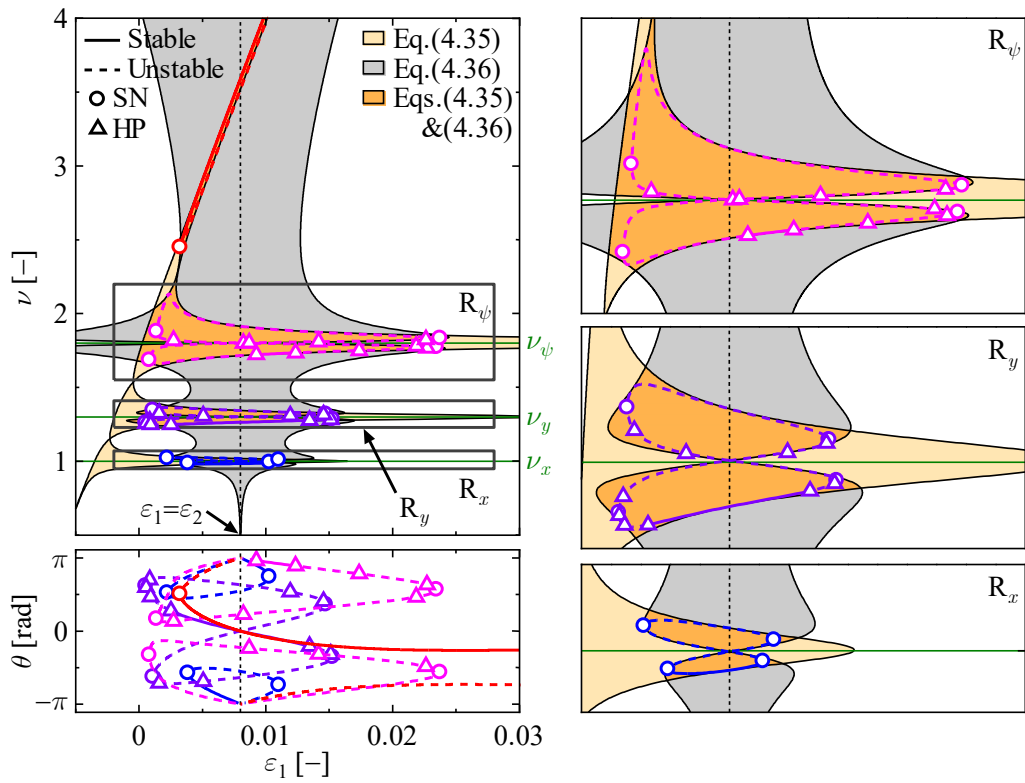
図 4.13 および図 4.14 より、同期解はすべて橙色の同期可能領域に含まれており、この領域でのみ自己同期現象が発生しうることを確認できる。さらに、3 自由度系および 4 自由度系と同様に解分枝は橙色の同期可能領域の境界に貼りつくような形状をしている。したがって、図 4.8 に示す解析モデルに提案手法を適用した場合においても、以下に示すように解分枝に及ぼすパラメータの影響は解の存在領域に基づいて把握できる。

- (i) 図 4.9(a)と図 4.9(b)で桃色および赤色の解分枝の形状が異なるのは、図 4.13(a)および図 4.13(b)より同期振動数比 ν の高い領域において薄黄色および灰色の領域の形状が異なるためである。
- (ii) 図 4.14(a)は図 4.13(a)に比べ桃色の解分枝が縮小している。また、図 4.14(d)は図 4.13(b)に比べ赤色と桃色の解分枝が縮小し、赤色の解分枝は $\varepsilon_1 = 1 \times 10^{-2}$ 付近で途切れている。これは重心間距離 γ_1, γ_2 の減少に伴い式(4.35)および式(4.36)の ψ 方向に関する項の影響が小さくなり、薄黄色および灰色の領域が変化したためである。

なお、5 自由度系における固有振動数比の影響についても 4 自由度系と同様に第 5 章で議論を行う。

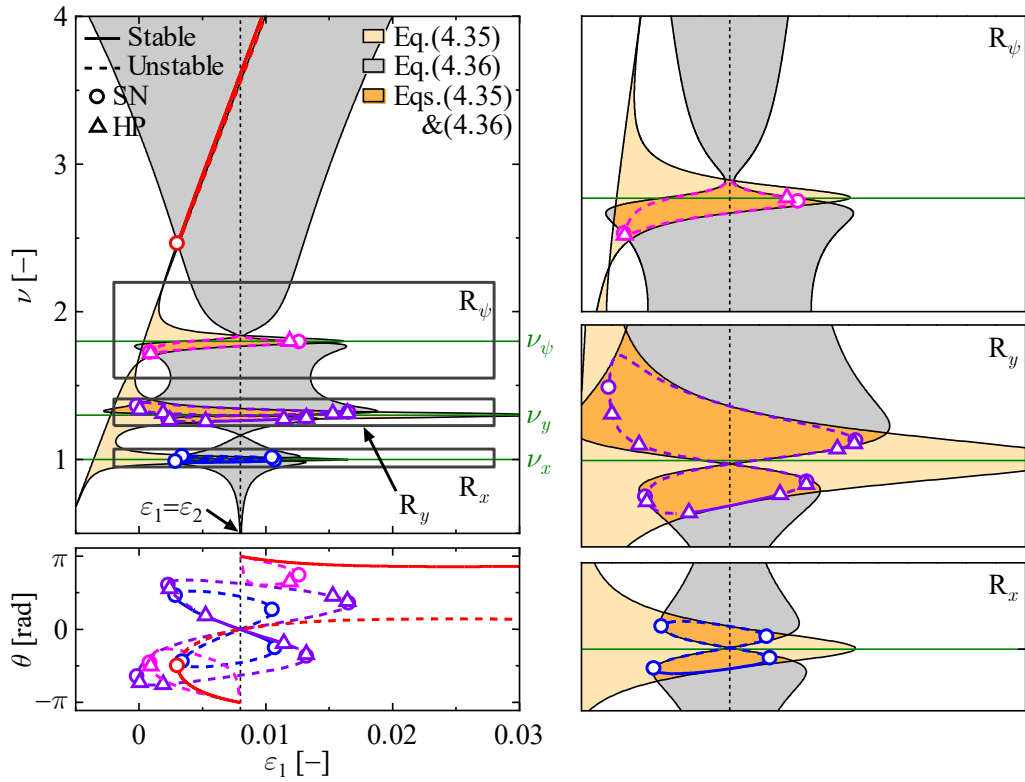


(a) Co-rotating

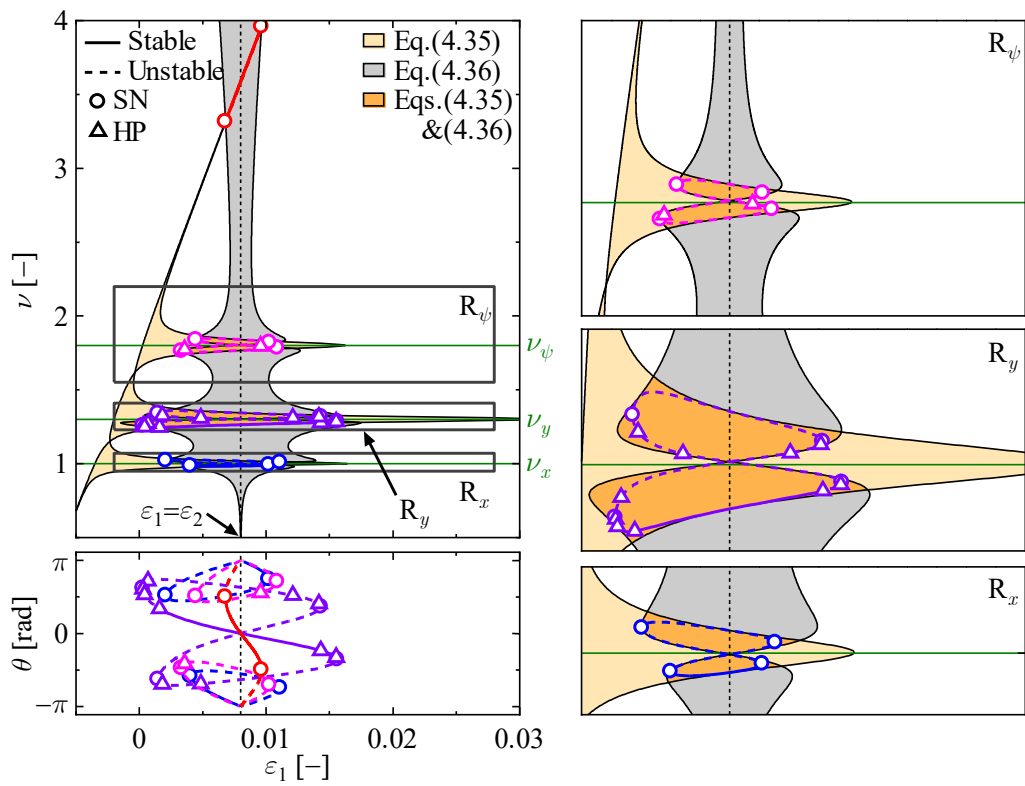


(b) Counter-rotating

Fig. 4.13 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$



(a) Co-rotating



(b) Counter-rotating

Fig. 4.14 Synchronous solutions obtained from the proposed method and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$

4・3 第4章のまとめ

本章では，多自由度振動系に支持された回転型振動子の自己同期現象に対し第2章で示した提案手法を適用するために，2振動子4自由度モデルおよび2振動子5自由度モデルを対して提案手法を拡張した．

直交2方向で質量が異なる4自由度系においては，3自由度系と同様にモータの一定角速度近似を用いることにより，近似解を安定性も含めて高精度に求められた．さらに，3自由度系と同様に同期解分枝に及ぼすパラメータの影響を同期可能領域に基づいて把握できることを確認した．

ブロックの回転自由度を考慮する5自由度系においては，一定角速度近似に加えブロックの角変位 ψ について線形化を施し，ブロックの自由度 ξ ， η および ψ の解析解を調和バランス法によって求めることで，3自由度系および4自由度系の場合と同様に近似解を精度良く求められた．また，同期可能領域を求めることでパラメータの影響を把握できることを確認した．

以上より，回転型振動子が多自由度支持系に搭載された系においても提案手法を拡張できることが示せた．

第5章 多自由度支持系における固有振動数の影響

回転型振動子が多自由度支持系に搭載された系に発生する自己同期現象では、第3章で述べたような個々のパラメータだけでなく、支持系におけるそれぞれの自由度のモード特性が自己同期現象に与える影響の把握も重要である。一般に、振動現象においては固有振動数が特に重要な影響を及ぼすことが知られており、実際に自己同期現象においてもそれぞれの固有振動数の変化が大きな影響を及ぼす。そこで、本章では第4章で示した2振動子5自由度モデル(5自由度系)および4自由度モデル(4自由度系)を対象として、提案手法を用いて固有振動数が解の存在領域および解分枝に与える影響を考察する。

まず、回転型振動子の支持系が有する固有振動数の大小関係が自己同期現象に与える影響を検討する。これについては5自由度系のみを対象として、4自由度系における議論は省略する。その理由は、4自由度系については剛体および剛体枠からなる支持系が有する2つの固有振動数の大小関係を入れ替えた場合においても座標軸を入れ替えることで同一の系とみなせることから、自己同期現象の特性に本質的な影響を与えないためである。次に、5自由度系および4自由度系のそれぞれについて、支持系の固有振動数を近づけることで異方性を小さくした場合の影響を検討する。

5・1 固有振動数の大小関係の影響

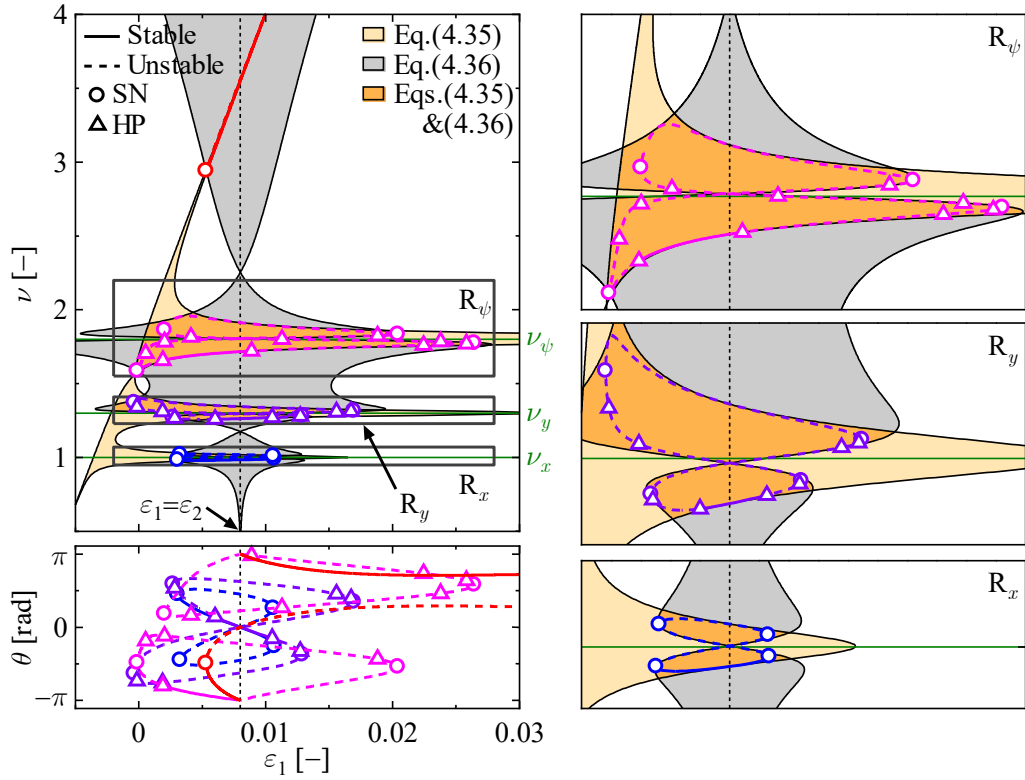
本節では、5自由度系を対象として固有振動数の大小関係が自己同期現象に及ぼす影響を調べる。本章では固有振動数以外の影響を排除するために、減衰比は全ての自由度で同一の値 $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_\psi = 2 \times 10^{-2}$ とした。ブロックとモータの重心間距離 γ_1 および γ_2 については、エネルギーに関する2本の条件式(式(4.28)および式(4.29))において $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ とすることで並進自由度だけでなく回転自由度に関する項にも一定の相似性が現れるため、ここでは $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ とした。同期振動数比以外のパラメータについては、第4章と同じく表4.2の値を用いた上でモータ2の無次元電圧を $\varepsilon_2 = 8 \times 10^{-3}$ とした。

図5.1から図5.3は、固有振動数比 $\nu_x = 1.0$, $\nu_y = 1.3$, $\nu_\psi = 1.8$ を基準として数種類の固有振動数比における同期解分枝および同期可能領域を求めた結果である。図5.1は基準パラメータ($\nu_x = 1.0$, $\nu_y = 1.3$, $\nu_\psi = 1.8$)の場合、図5.2は ν_x と ν_y を入れ替えた場合($\nu_x = 1.3$, $\nu_y = 1.0$, $\nu_\psi = 1.8$)、図5.3は ν_x と ν_ψ を入れ替えた場合($\nu_x = 1.8$, $\nu_y = 1.3$, $\nu_\psi = 1.0$)であり、それぞれの(a)と(b)に同方向回転と逆方向回転の結果を示した。図の横軸はいずれもモータ1の無次元電圧 ε_1 であり、縦軸は左上図では同期振動数比 ν 、左下図ではモータ1とモータ2の位相差 θ である。右側には領域 R_ψ , R_y および領域 R_x の拡大図を示した。赤色($\nu \gg \nu_x, \nu_y, \nu_\psi$)、桃色($\nu = \nu_\psi$)、紫色($\nu = \nu_y$)および青色($\nu = \nu_x$)の細線は提案手法で

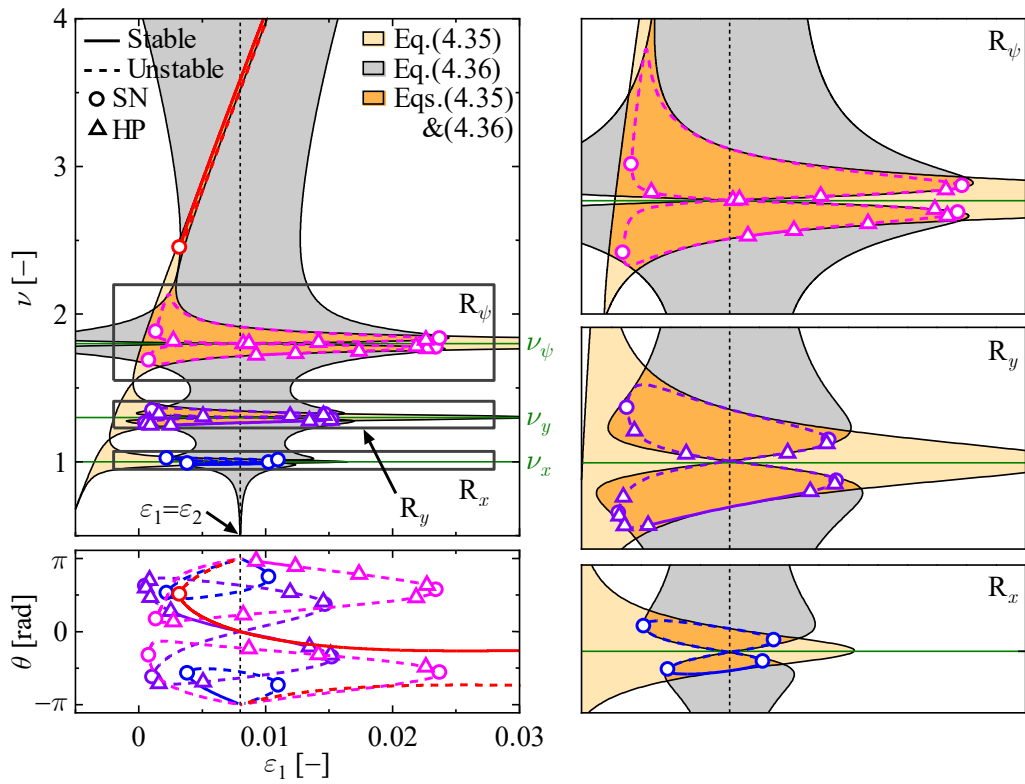
求められた同期解分枝であり、実線および破線は安定解および不安定解を、○印はサドル・ノード分岐点、△印はホップ分岐点を表している。縦の破線は $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 (= 8 \times 10^{-3})$ を満たす無次元電圧 ε_1 の値を、緑色の横線は固有振動数比 ν_x , ν_y および ν_ψ を示している。また、散逸エネルギーの条件を満足する領域(式(4.35))を薄黄色で、同期エネルギーの条件を満足する領域(式(4.36))を灰色で、薄黄色および灰色の両方の範囲に含まれる同期可能領域を橙色で示している。

図 5.1, 図 5.2 および図 5.3 より、3 種類の固有振動数比の近傍に存在する解分枝の大きさに着目すると、固有振動数比の値が高くなるほどエネルギーの領域が拡大しており、その結果として解分枝がより大きくなることがわかる。

さらに、図 5.1(a)と図 5.2(a), 図 5.1(b)と図 5.3(b), および図 5.2(b)と図 5.3(a)をそれぞれ比較すると、同期振動数比 ν の図における解分枝の形状およびエネルギーの領域の形状が同一となっている。支持系の自由度の間に見られるこのような対称性の存在は、同期解分枝の特性は必ずしも固有振動数の大小関係やモータの回転方向の組み合わせごとに個別に考える必要がなく、特定の統一的な視点から把握できることを示唆している。

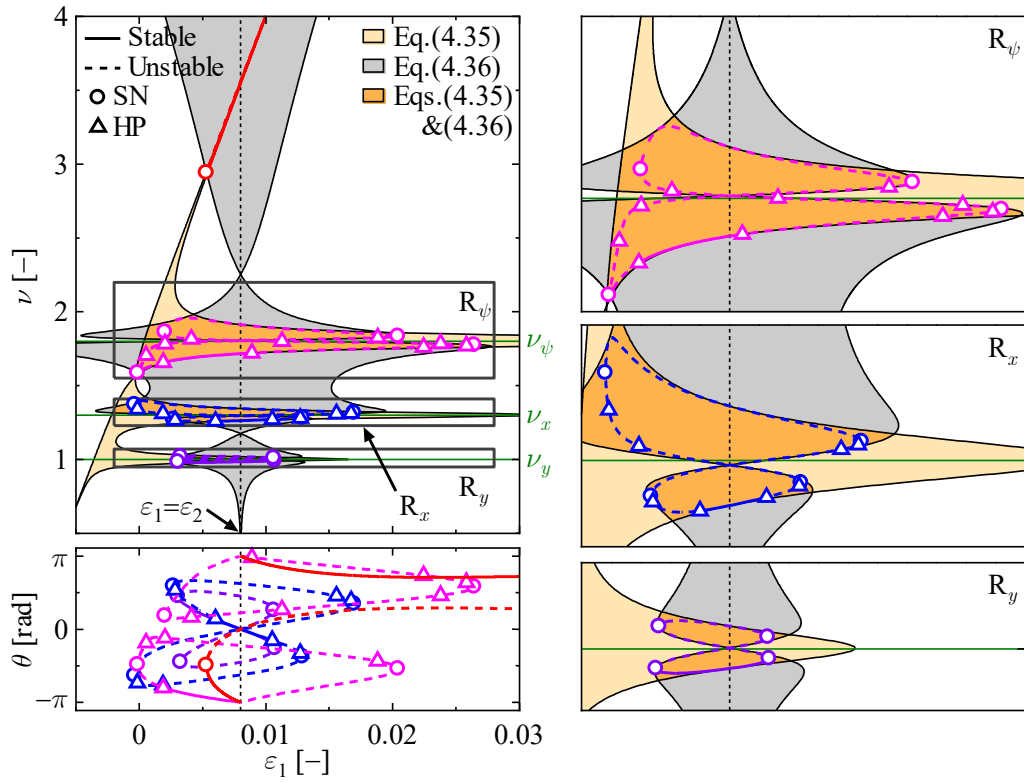


(a) Co-rotating

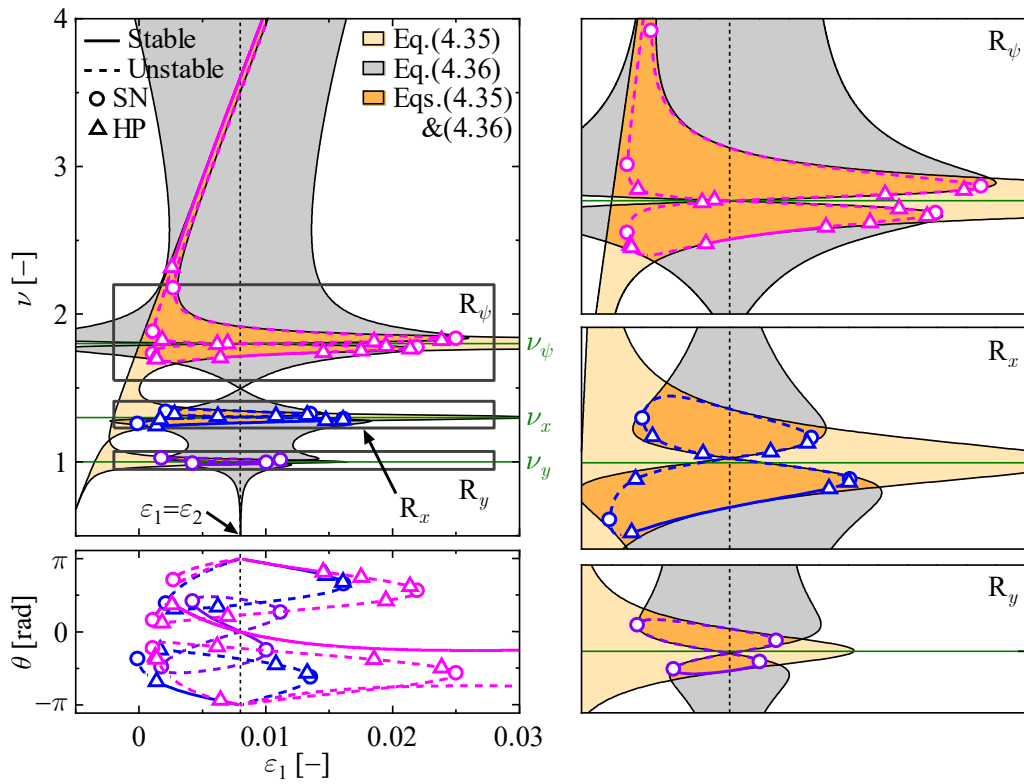


(b) Counter-rotating

Fig. 5.1 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\nu_x = 1.0$, $\nu_y = 1.3$, and $\nu_\psi = 1.8$

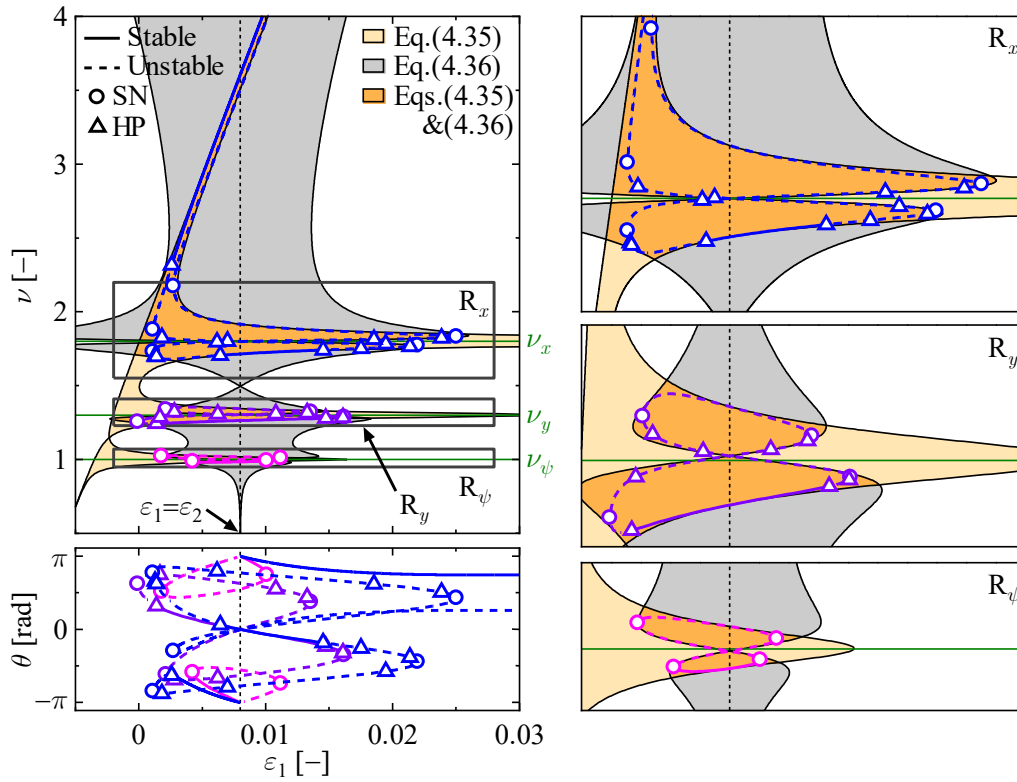


(a) Co-rotating

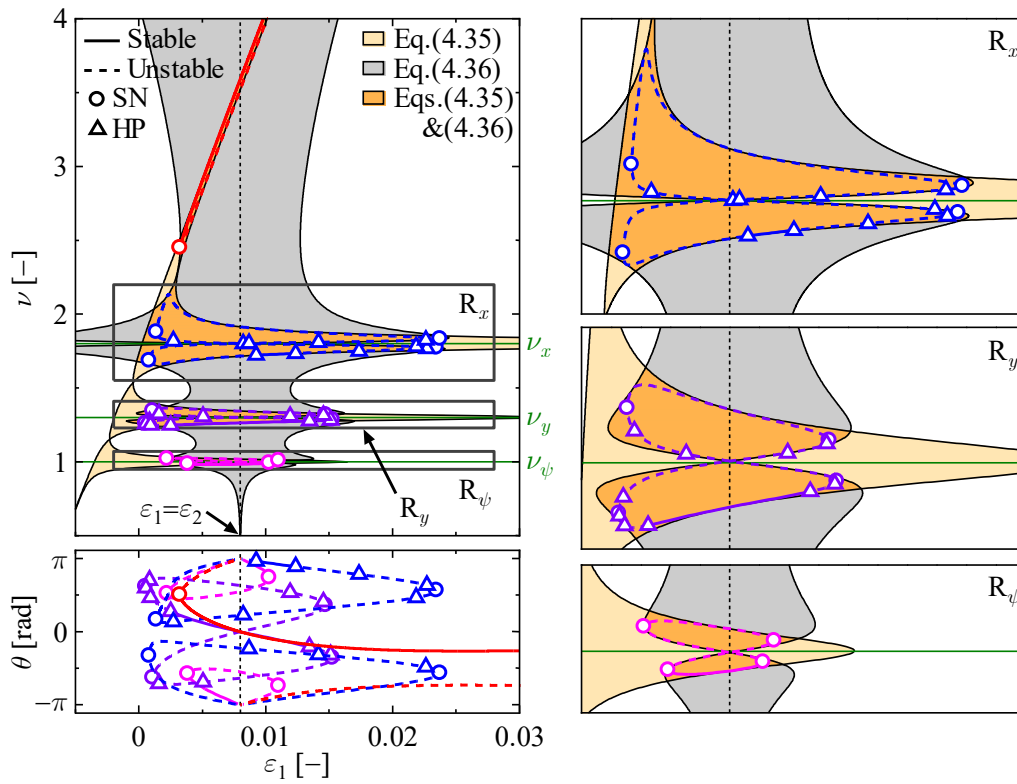


(b) Counter-rotating

Fig. 5.2 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\nu_x = 1.3$, $\nu_y = 1.0$, and $\nu_\psi = 1.8$



(a) Co-rotating



(b) Counter-rotating

Fig. 5.3 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\nu_x = 1.8$, $\nu_y = 1.3$, and $\nu_\psi = 1.0$

式(4.28)および式(4.29)のエネルギー条件を用いれば、上記のような自由度間の対称性を次のような視点から把握できる。これらの式には自由度 x 、 y および ψ に関する項（それぞれ、 ν_x や ζ_x を含む項、 ν_y や ζ_y を含む項、および ν_ψ や ζ_ψ を含む項）が線形結合的に含まれており、いまの例のように $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_\psi$ および $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の条件下ではこれらの項が式(4.28)では $\cos\theta$ の係数、式(4.29)では $\sin\theta$ の係数の符号の正負を除いて完全に同じ形式となる。

ここで、 x 、 y および ψ の3つの自由度を式(4.28)における $\cos\theta$ の係数の正負によって2つのグループに分類することを考える。例えば、式(4.28)において自由度 x に関する左辺第1項に含まれる $\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma\mu_1\mu_2 \cos\theta$ は同方向回転 ($\sigma=1$) のときには $\theta=0$ (同位相) で、逆方向回転 ($\sigma=-1$) のときには $\theta=\pi$ (逆位相) で最大となる。そこで、自由度 x を前者では Group I、後者では Group A に分類する。I は In-phase (同位相)、A は Anti-phase (逆位相) の頭文字をとったものである。自由度 y および ψ も同様に分類すると、その結果は表 5.1 のように整理できる。さらに、式(4.29)における $\sin\theta$ の係数に着目すると、表 5.1 で同じグループに所属する自由度は $\sin\theta$ の係数の符号についても同じである。

したがって、表 5.1 で同じグループに所属する自由度間では固有振動数の値を入れ替えても ν 、 θ 、 ε_1 および ε_2 の間の関係に影響を及ぼさず、解分枝およびエネルギーの領域の形状は位相差 θ の図も含めて変化しない。ただし、固有振動数とともに振幅の値も自由度間で入れ替わることから、解分枝の色には入れ替わりが生じる。

図 5.1 から図 5.3 における固有振動数比の大小関係を整理した上で、その値が小さい順に自由度と所属するグループを書き表すと表 5.2 のようになる。例えば、表 5.2 において図 5.1(a) および図 5.2(a) に対応する欄を確認すると、いずれも IIA となっている。このような場合には、同一のグループに含まれる自由度の間で固有振動数比の値が入れ替わっており、解分枝の形状は位相差 θ の図も含めて同一となる。一方、図 5.2(b) と図 5.2(a) に対応する欄を確認するとそれぞれ IAA と AII と記されており、Group I と Group A が完全に逆になっている。このような場合にはエネルギーに関する領域と同期振動数比 ν の形状は完全に等しくなり、位相差 θ は π だけシフトした形状となる。

Table 5.1 Groups of degrees freedom in 5 DOF model

| | Group I | Group A |
|----------------------|---------|-----------|
| (a) Co-rotating | x, y | ψ |
| (b) Counter-rotating | y | x, ψ |

Table 5.2 Order of natural frequency ratios and corresponding groups (I or A given by Table 5.1)

| Figure number | | Fig. 5.1 | Fig.5.2 | Fig.5.3 |
|--|----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Magnitude relation of ν_x , ν_y , and ν_ψ | | $\nu_x < \nu_y < \nu_\psi$ | $\nu_y < \nu_x < \nu_\psi$ | $\nu_\psi < \nu_y < \nu_x$ |
| DOF order (from smallest natural frequency ratio) | | $xy\psi$ | $yx\psi$ | ψyx |
| Groups corresponding to DOF order | (a) Co-rotating | IIA | IIA | AII |
| | (b) Counter-rotating | AIA | IAA | AIA |

以上の考察に基づいて、例えば同期振動数比 ν に関する解分枝およびエネルギーの領域の形状は3種類しか存在しないことがわかる。なお、このような Group I と Group A への分類は、第4章の図4.10において各自由度の方向に大きく振動する解分枝（例えば自由度 x であれば図4.10(a-4)および図4.10(b-4)）における安定解の位相差 θ とも一致している。

5・2 異方性の影響

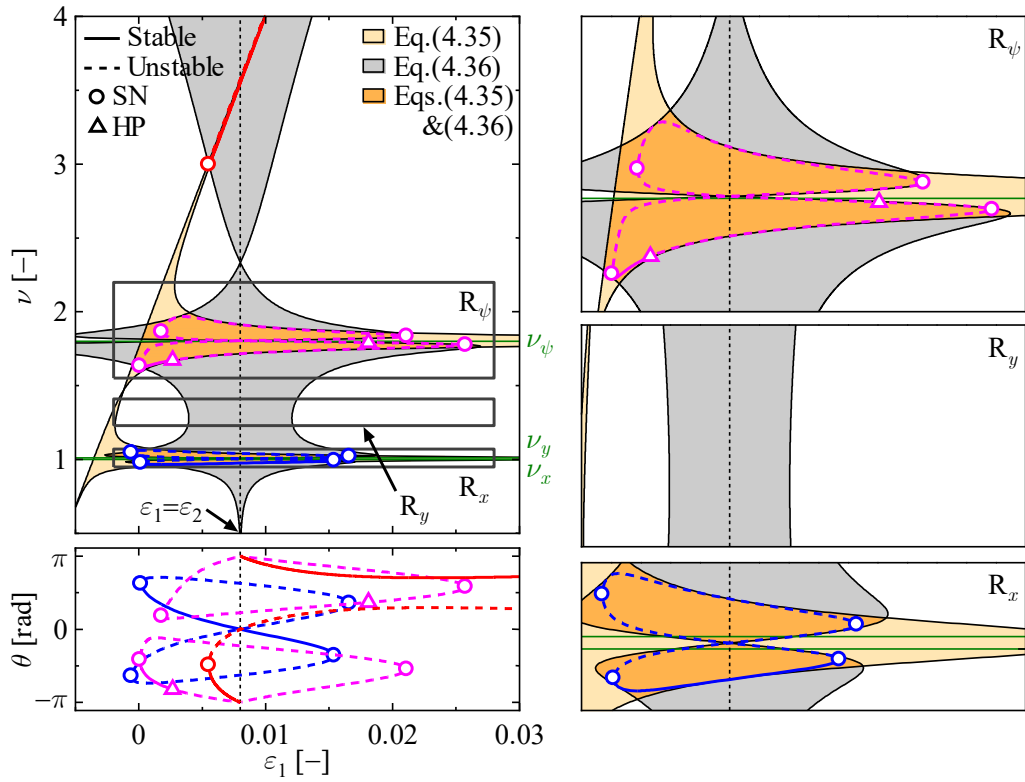
本節では、5自由度および4自由度系を対象として、固有振動数を近づけ異方性を小さくした場合に自己同期現象に与える影響について述べる。

5・2・1 5自由度系の場合

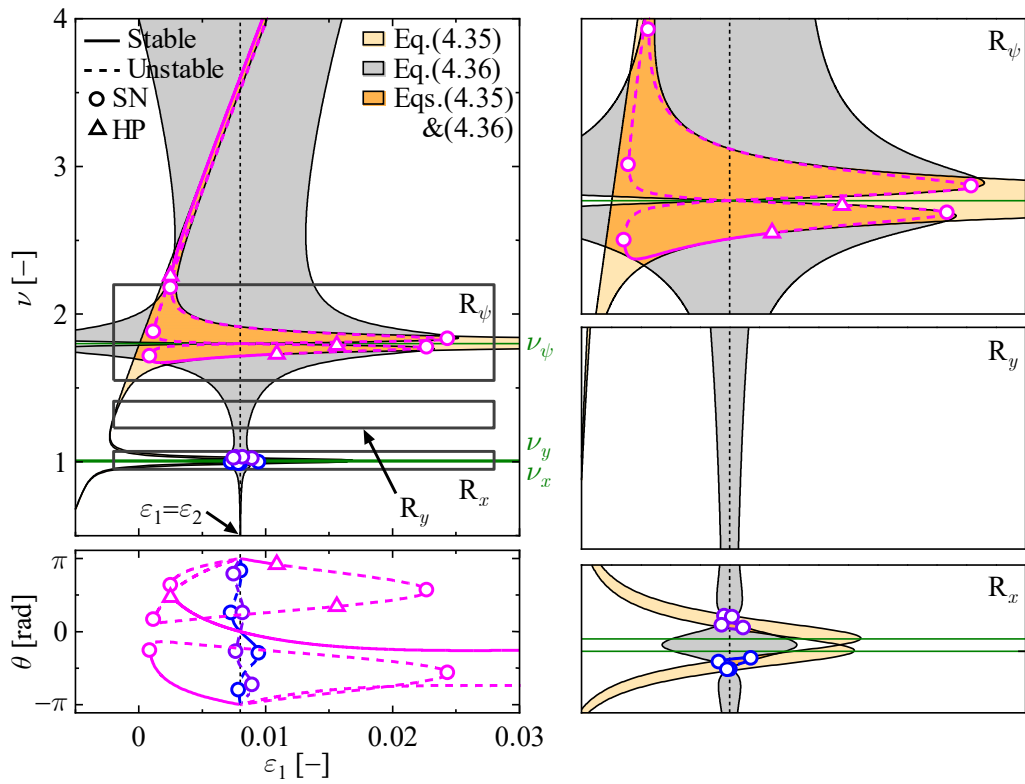
まず、5自由度系を対象に異方性が与える影響を調べるために、図5.4では基準パラメータ（図5.1）のうち、固有振動数比 ν_y を ν_x の101%に設定（ $\nu_x = 1.0$, $\nu_y = 1.01$, $\nu_\psi = 1.8$ ）することで支持系の異方性を小さくしたときの同期解分枝および同期可能領域を求めた。同方向回転の場合の結果を図5.4(a)に、逆方向回転の場合の結果を図5.4(b)に示す。なお、これ以降の議論が $\nu_x = \nu_y$ の条件が完全に成立する理想的な場合に限定されることを避けるために、図5.4では ν_x と ν_y との間に1%のわずかな差異をもたせた。

図5.1(a)と図5.4(a)を比較すると、図5.4(a)では ν_y を ν_x に近づけることで領域 R_x の解分枝が大きくなっていることがわかる。これは、前節で述べたように同方向回転の場合には x および y 方向は同じ Group I に属し、式(4.28)および式(4.29)で互いの影響を強め合うことで散逸エネルギーおよび同期エネルギーの領域が広がるためである。一方で図5.1(b)に比べ図5.4(b)では領域 R_x の解分枝が小さくなっている。これは、逆方向回転の場合には x および y 方向で所属するグループが異なり、式(4.28)および式(4.29)で互いの影響を打ち消し合うことでエネルギーの領域が狭まるためである。

以上より、同じグループに所属する自由度の間の固有振動数を近づけると、エネルギーの領域が広がるため図5.4(a)のように固有振動数比付近の解分枝が大きくなる。一方で、



(a) Co-rotating



(b) Counter-rotating

Fig. 5.4 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 5DOF system for $\nu_x = 1.0$, $\nu_y = 1.01$, and $\nu_\psi = 1.8$

異なるグループに所属する自由度の間の固有振動数を近づけると、エネルギーの領域は狭まり図 5.4(b)のように固有振動数比付近における解分枝は小さくなる。

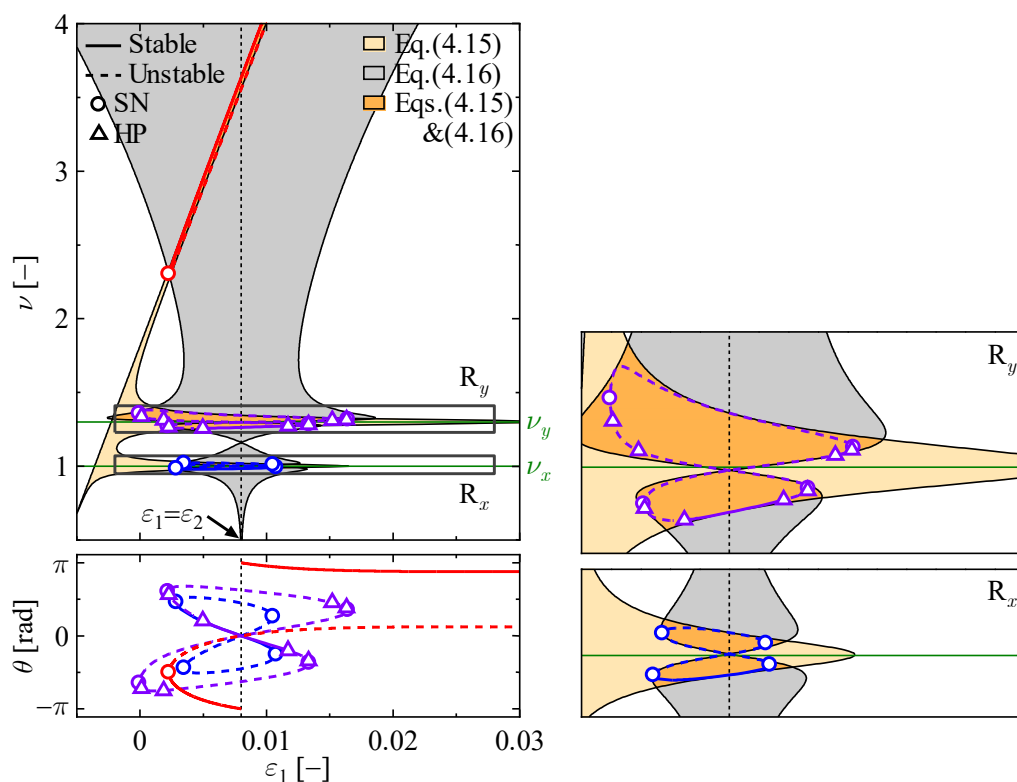
5・2・2 4 自由度系の場合

次に、4 自由度系を対象に異方性が与える影響を調べた。ここでは固有振動数以外の影響を排除するために質量比を $\mu=0$ とし、固有振動数以外のパラメータを 5 自由度系と同様の値に設定した。図 5.5 は固有振動数比を $\nu_x=1.0$, $\nu_y=1.3$ に設定した場合、図 5.6 は $\nu_x=1.0$, $\nu_y=1.01$ (ν_y は ν_x の 101%) に設定した場合に求められた同期解分枝および同期可能領域である。同方向回転の場合の結果を図 5.5(a)および図 5.6(a)に、逆方向回転の場合の結果を図 5.5(b)および図 5.6(b)に示している。なお、4 自由度系における自由度のグループ分けは表 5.3 に示すとおりである。

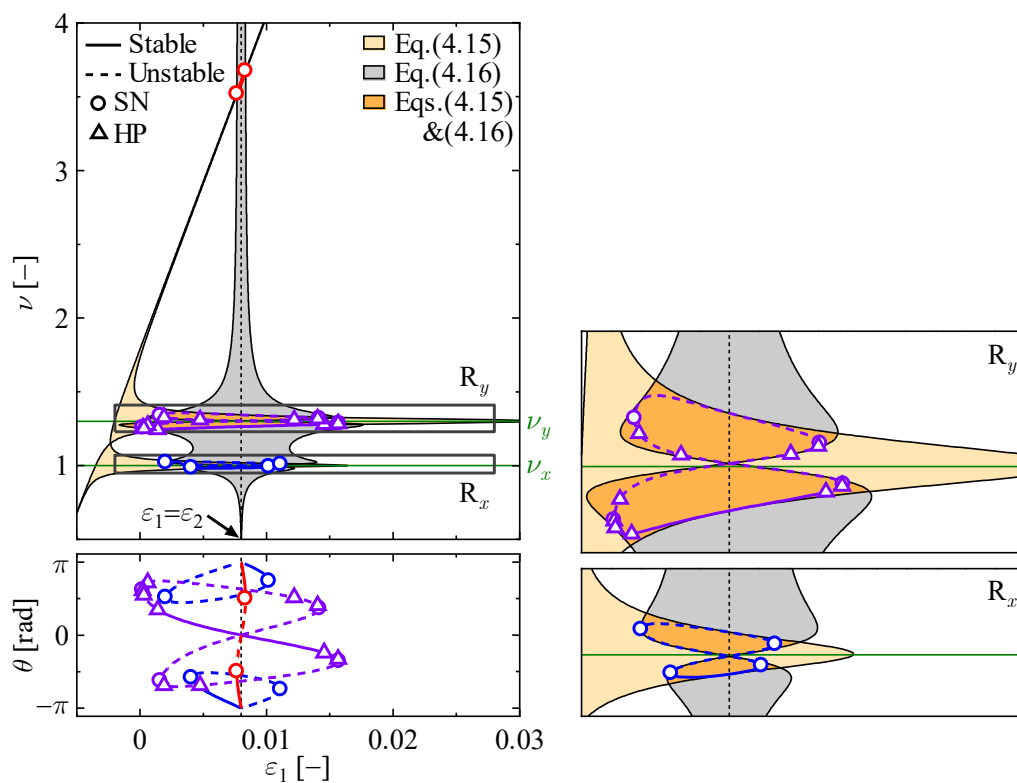
5 自由度系の場合と同様に、同じグループに所属する自由度の間の固有振動数を近づけるとエネルギーに関する 2 本の条件式 (式(4.9)および式(4.10)) において互いの影響を強め合うので、図 5.5(a)に比べ図 5.6(a)は領域 R_x で解分枝およびエネルギーの領域が大きくなることを確認できる。一方で異なるグループに所属する自由度の間の固有振動数を近づけると、式(4.9)および式(4.10)において互いの影響を打ち消し合うため、図 5.5(b)に対して図 5.6(b)では領域 R_x の解分枝およびエネルギーの領域は小さくなる。また、4 自由度系において所属するグループが異なる場合には、2 種類の項が互いに打ち消し合うことで式(4.9)および式(4.10)における剛体の散逸エネルギーおよび同期エネルギーが零に近づくため、高振動数比領域においても解分枝の縮小が確認できる。

Table 5.3 Groups of degrees freedom in 4 DOF model

| | Group I | Group A |
|----------------------|---------|---------|
| (a) Co-rotating | x, y | None |
| (b) Counter-rotating | y | x |

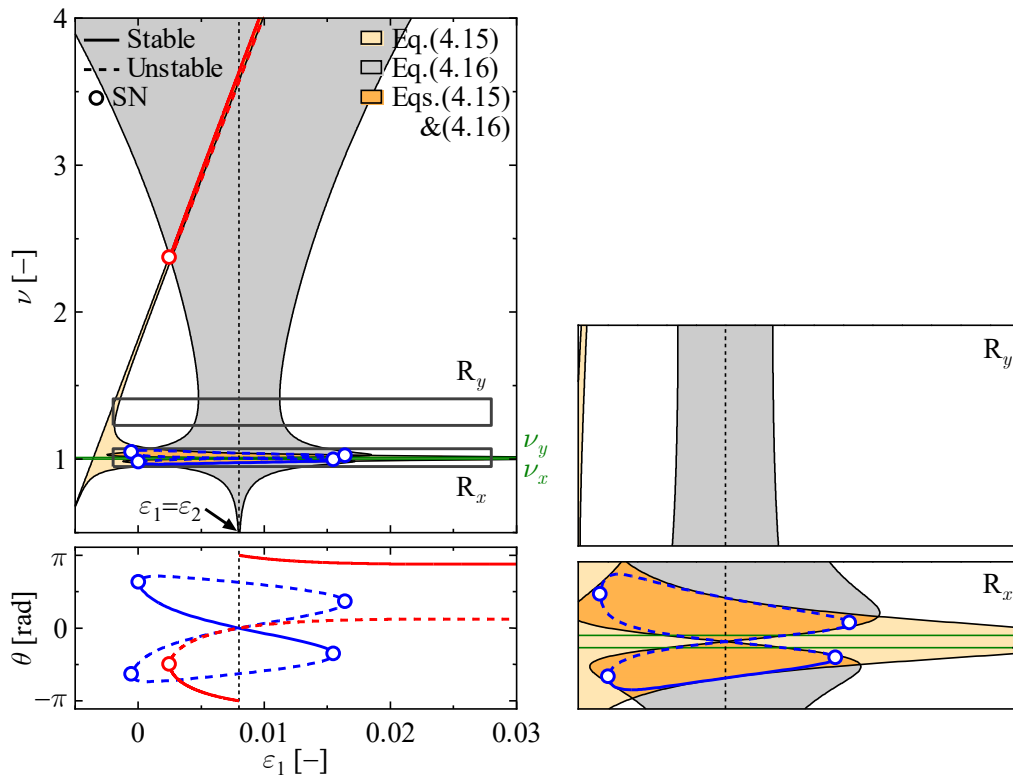


(a) Co-rotating

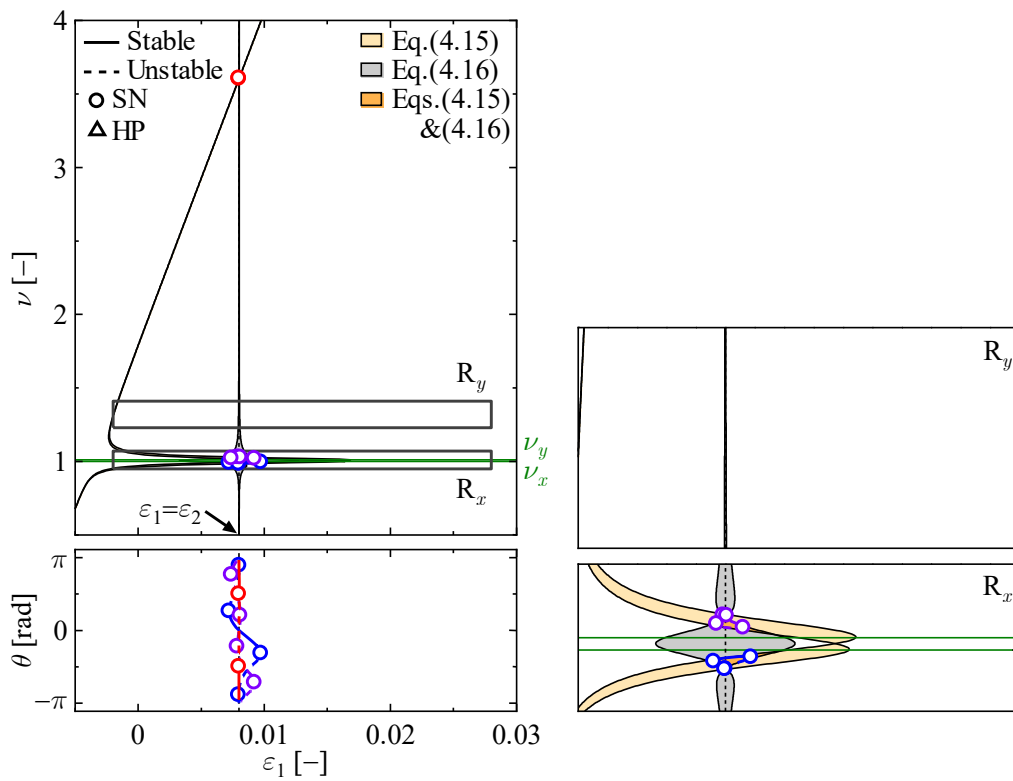


(b) Counter-rotating

Fig. 5.5 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 4DOF system for $\nu_x = 1.0$ and $\nu_y = 1.3$



(a) Co-rotating



(b) Counter-rotating

Fig. 5.6 Effects of natural frequency ratios on synchronous solutions and the area satisfying the two energetic conditions in 4DOF system for $\nu_x = 1.0$ and $\nu_y = 1.01$

5・3 第5章のまとめ

本章では、2振動子5自由度モデルおよび2振動子4自由度モデルを対象とし、固有振動数が自己同期現象に及ぼす影響について提案手法により考察した。

固有振動数の大小関係については、以下のような影響を及ぼすことが確認できた。

- (1) 固有振動数の値が高くなるほどエネルギーの領域が拡大し、同期解分枝がより大きくなる。
- (2) 式(4.28)において $\cos\theta$ の符号が+となる自由度を Group I、-となる自由度を Group A とすると、同じグループ間の自由度の固有振動数を入れ替えた場合には、同一形状の同期解分枝およびエネルギーの領域が得られる。
- (3) 固有振動数の小さい順に対応するようにグループの順番を示して IAA となる場合は、Group I と Group A を入れ替えた AII の場合と同期振動数比 ν について同一形状の同期解分枝およびエネルギーの領域が得られる。

また、固有振動数を近づけることで異方性を小さくした場合の影響については以下に示すとおりである。

- (4) 同じグループ間の自由度の固有振動数同士が近づく場合には互いの影響を強め合うため、解分枝およびエネルギーの領域は拡大する。
- (5) 異なるグループ間の自由度の固有振動数が近づく場合には互いの影響を打ち消し合い、解分枝およびエネルギーの領域は小さくなる。

以上より、自由度毎に自己同期現象に与える影響を考えるのではなく、式(4.28)における $\cos\theta$ の係数の符号に着目することによって、固有振動数が自己同期現象に及ぼす影響を包括的に把握できる。

第6章 実機への応用

自己同期現象には特別な制御や機械的結合を用いることなく複数の振動子を同一の振動数に揃えられるという特長があり、この特長を生かして振動搬送機や振動ふるい等の振動機械に応用されてきた。しかしながら、現状では所望の同期状態とするためには最適なパラメータを試行錯誤的に探すほかなく、現象を応用した振動機械の効率的な設計方法が確立されていない。

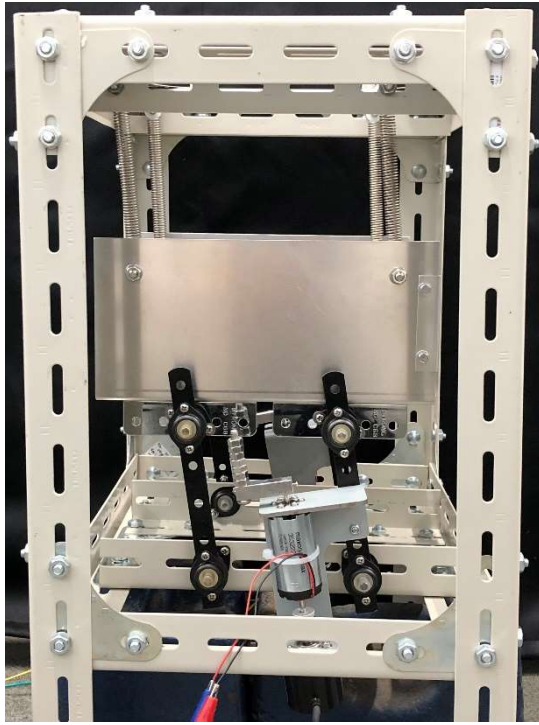
そこで本章では、同期状態とパラメータの関係を簡潔に把握できる提案手法を振動機械へ応用するために、提案手法の有効性に関する実験的な検証を行う。そのためには、より実機に近い構造の実験装置とそれに対応した解析モデルを対象として、実験との比較による解析モデルの妥当性と、提案手法で用いられる近似の妥当性の両方が検証できればよい。

そこで、まず、振動搬送機を模して作製した実験装置を用いて実験を行い、その結果をシューティング法により得られる数値解析結果と比較することで解析モデルの妥当性を検証する。その後、上記の数値計算結果を提案手法により得られる同期可能領域と比較することで、提案手法の有効性を確認する。

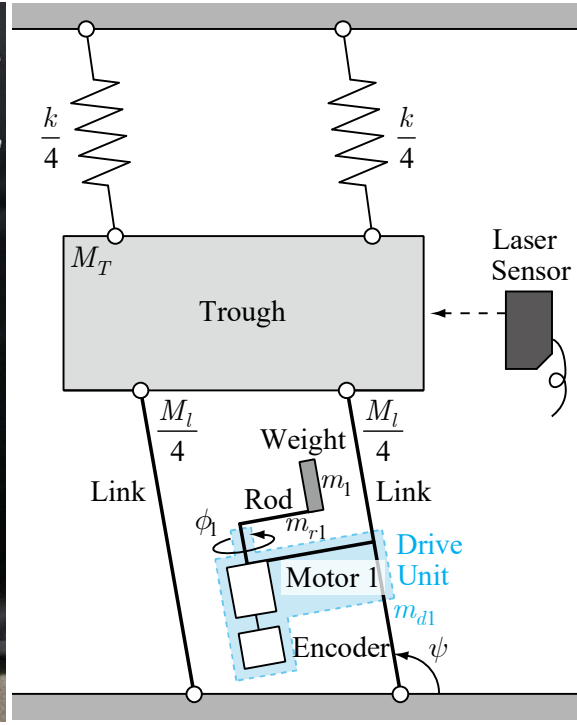
ところで、自己同期現象を応用した振動機械では、機能面・安全面の観点から振幅の把握も重要となる。そこで、本章では振幅についても把握できるように提案手法の拡張も行う。

6・1 実験装置

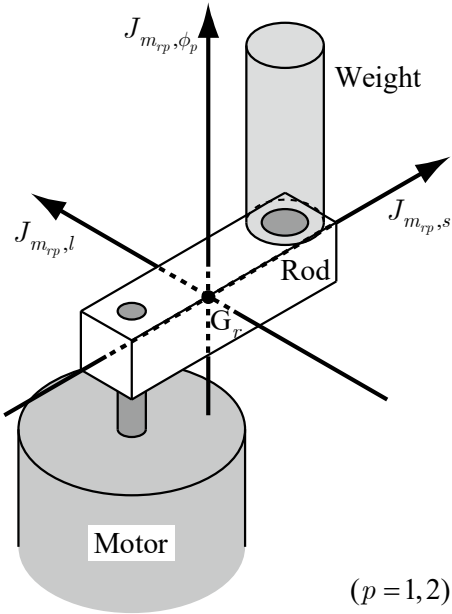
本章では、実際の振動搬送機の機構を考慮した図 6.1(a)に示すような実験装置を用いる。振動搬送機では、偏心モータなどの振動体を加振源としてトラフを振動させることにより物が搬送される。この実験装置では被搬送物を載せるアルミ製のトラフが4本のリンク(剛体棒) および4本のコイルばねで基礎に支持されている。図 6.1(a)の正面および背面の両方において、トラフ、2本のリンク、基礎によってリンク機構が構成されており、トラフは回転せずに鉛直面内における並進運動のみを行う。トラフの右側面には並進運動の変位測定に用いる反射板を取り付けている。正面および背面の右側のリンクには、不釣り合いおもりを有する同一のDCモータ(マクソン社製, A-max32, 定格出力16W)がリンクと回転軸が平行となるように剛に固定されている。正面側のモータ(以下、モータ1と呼ぶ)は上から見て反時計回りに、背面側のモータ(以下、モータ2と呼ぶ)は上から見て時計回りに回転する。



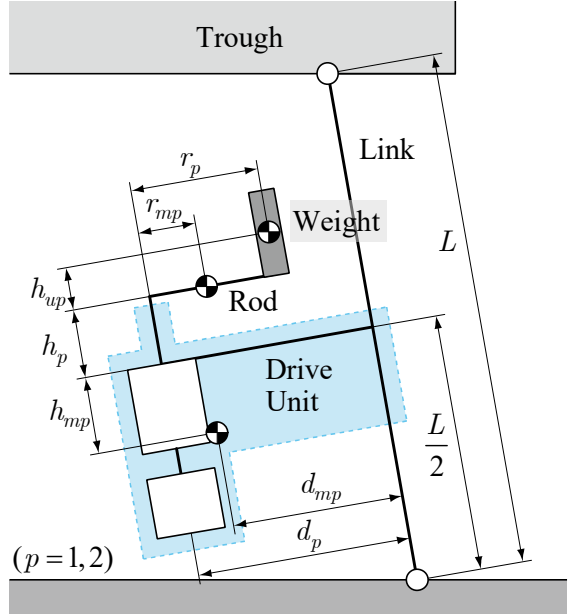
(a) Experimental apparatus



(b) Analytical model and measuring equipment



(c) Rod with weight



(d) Enlarged view of analytical model

Fig. 6.1 Experimental apparatus and analytical model of vibration conveyor

実験装置を元に構成した 2 振動子 3 自由度の解析モデルを実験における測定システムの概要とともに図 6.1(b)に示す。図 6.1(b)では正面のリンクに設置されたモータ 1 のみが描かれているが、背面にはモータ 2 が存在することに留意されたい。実験では、それぞれの DC モータに印加電圧を与えて不釣り合いおもりを回転させ、モータに取り付けたエンコーダによりモータの角変位を、レーザー変位計によりトラフの水平方向変位を測定する。同期発生の有無については、エンコーダおよびレーザー変位計から出力される信号の周波数分析結果に基づいて判定する。

6・2 解析モデルおよび運動方程式

図 6.1(b)の解析モデルにおいて、水平方向を基準としたリンクの角変位を ψ 、静的平衡状態の角変位を ψ_0 ($\psi_0 > \pi/2$) とする。モータ 1 およびモータ 2 の角変位はそれぞれ反時計回りおよび時計回りを正としておもりが最上点にあるときを基準とした角度 ϕ_1 および ϕ_2 で表す。したがって、おもりが最下点にある静的平衡状態においては $\phi_1 = \phi_2 = \pi$ となる。

解析にあたり、モータとエンコーダおよびその固定金具をまとめて駆動部と呼び、駆動部におけるモータとエンコーダの回転子、駆動部のそれ以外の要素、トラフ、リンク、不釣り合いおもりおよびそれを取り付けたロッドはいずれも剛体とする。ここで、トラフの質量を M_T 、リンクの質量を 1 本あたり $M_l/4$ 、モータ 1 およびモータ 2 に関する駆動部の質量を m_{d1} および m_{d2} 、不釣り合いおもりの質量を m_1 および m_2 、ロッドの質量を m_{r1} および m_{r2} とする。また、いずれも重心を基準として、リンクに平行な軸まわりに関する駆動部の回転子および不釣り合いおもりの慣性モーメントをそれぞれ J_{r1} 、 J_{r2} および J_{m1,ϕ_1} 、 J_{m2,ϕ_2} とし、リンクの回転軸に平行な軸まわりに関するリンク、駆動部および不釣り合いおもりの慣性モーメントをそれぞれ $J_l/4$ 、 J_d および $J_{m1,\psi}$ 、 $J_{m2,\psi}$ とする。さらに、ロッドの主慣性モーメントを図 6.1(c)に示すように J_{m_{ri},ϕ_i} 、 $J_{m_{ri},l}$ および $J_{m_{ri},s}$ ($i=1,2$) とする。駆動部に関する各種の寸法および距離は図 6.1(d)に示す記号を用いて表す。

コイルばねのばね定数を 1 本あたり $k/4$ 、自然長を l_0 とし、静的平衡状態においてコイルばねの下端は自然長かつ鉛直下向きの状態から水平右向きに x_{ψ_0} 、鉛直下向きに y_{ψ_0} だけ変位しているものとする。また、リンクとトラフおよびリンクと基礎の間には粘性減衰トルクが作用するものと仮定し、それらを合計したトルクの粘性減衰係数を c_ψ とする。モータ 1 およびモータ 2 の回転軸にはクーロン摩擦トルクが作用するものと仮定し、それぞれのクーロン摩擦トルクの大きさを $T_{c,1}$ および $T_{c,2}$ とする。さらに、モータ 1 およびモータ 2 の印加電圧をそれぞれ e_1 および e_2 で表し、モータの電機子抵抗 r_a 、トルク定数 K_t 、逆起電力定数 K_E の値はモータ 1 およびモータ 2 で等しいものとする。なお、各モータの回転軸

に作用するクーロン摩擦トルクの向きは $\dot{\phi}_1$ および $\dot{\phi}_2$ の符号に依存するが、ここでは常に $\dot{\phi}_1 > 0$ および $\dot{\phi}_2 > 0$ を満たす場合のみを考察の対象とする。

図 6.1(b)の系について、変数 ψ 、 ϕ_1 および ϕ_2 に関する無次元化された運動方程式は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 & \nu^2 \psi'' + 2\zeta\nu\psi' + F(\psi) \\
 & = -\nu^2 \psi'' \left[\left(\frac{\mu_1}{2} \cos 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \cos \phi_1 \right) + \left(\frac{\mu_2}{2} \cos 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \cos \phi_2 \right) \right] \\
 & \quad + \nu^2 \psi' \phi_1' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) + \nu^2 \psi' \phi_2' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \\
 & \quad - \rho_{r1} \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \rho_{r2} \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \\
 & \quad - (\rho_{g1} + \rho_{g2} + \rho_{d1} + \rho_{d2}) \tan \psi_0 \cos \psi \\
 & \quad - [\rho_{g1} \cos \phi_1 + \rho_{g2} \cos \phi_2 - (\rho_{d1} + \rho_{d2})] \sin \psi
 \end{aligned} \tag{6.1a}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' \\
 & = \varepsilon_1 - \chi_1 - \rho_{r1} \nu^2 \psi'' \sin \phi_1 - \nu^2 \psi'^2 \left(\frac{\mu_1}{2} \sin 2\phi_1 - \mu_{d1} \sin \phi_1 \right) - \rho_{g1} \cos \psi \sin \phi_1
 \end{aligned} \tag{6.1b}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' \\
 & = \varepsilon_2 - \chi_2 - \rho_{r2} \nu^2 \psi'' \sin \phi_2 - \nu^2 \psi'^2 \left(\frac{\mu_2}{2} \sin 2\phi_2 - \mu_{d2} \sin \phi_2 \right) - \rho_{g2} \cos \psi \sin \phi_2
 \end{aligned} \tag{6.1c}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\omega_\psi &\triangleq \sqrt{\frac{K}{J}}, \quad \zeta \triangleq \frac{c}{2\sqrt{JK}}, \quad \nu \triangleq \frac{\omega}{\omega_\psi} \\
\mu_1 &\triangleq \frac{m_1 r_1^2 + m_{r1} r_{m1}^2 + (J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}})}{J}, \quad \mu_2 \triangleq \frac{m_2 r_2^2 + m_{r2} r_{m2}^2 + (J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}})}{J} \\
\mu_{d1} &\triangleq \frac{(m_1 r_1 + m_{r1} r_{m1}) d_1}{J}, \quad \mu_{d2} \triangleq \frac{(m_2 r_2 + m_{r2} r_{m2}) d_2}{J} \\
\rho_{r1} &\triangleq \frac{m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1}}{J} \\
\rho_{r2} &\triangleq \frac{m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2}}{J} \\
\rho_{g1} &\triangleq \frac{(m_1 r_1 + m_{r1} r_{m1}) g}{J \omega_\psi^2}, \quad \rho_{g2} \triangleq \frac{(m_2 r_2 + m_{r2} r_{m2}) g}{J \omega_\psi^2} \\
\rho_{d1} &\triangleq \frac{(m_1 d_1 + m_{r1} d_1 + m_{d1} d_{m1}) g}{J \omega_\psi^2}, \quad \rho_{d2} \triangleq \frac{(m_2 d_2 + m_{r2} d_2 + m_{d2} d_{m2}) g}{J \omega_\psi^2} \\
\alpha_1 &\triangleq \frac{J_1}{J}, \quad \alpha_2 \triangleq \frac{J_2}{J}, \quad \beta \triangleq \frac{B}{J \omega_\psi}, \quad \varepsilon_1 \triangleq \frac{A e_1}{J \omega_\psi^2}, \quad \varepsilon_2 \triangleq \frac{A e_2}{J \omega_\psi^2}, \quad \chi_1 \triangleq \frac{T_{c,1}}{J \omega_\psi^2}, \quad \chi_2 \triangleq \frac{T_{c,2}}{J \omega_\psi^2}
\end{aligned} \right\} \quad (6.2a)$$

$$\left. \begin{aligned}
K &\triangleq -\frac{\partial F_y(\psi_0)}{\partial \psi} L \cos \psi_0 - \frac{\partial F_x(\psi_0)}{\partial \psi} L \sin \psi_0 - F_x(\psi_0) \frac{L}{\cos \psi_0} \\
&\quad - \left[(m_1 d_1 + m_{r1} d_1 + m_{d1} d_{m1}) + (m_2 d_2 + m_{r2} d_2 + m_{d2} d_{m2}) \right] \frac{g}{\cos \psi_0} \\
&\quad - \left[(m_1 r_1 + m_{r1} r_{m1}) + (m_2 r_2 + m_{r2} r_{m2}) \right] g \tan \psi_0 \sin \psi_0 \\
F(\psi) &\triangleq \frac{-\left[F_y(\psi) - F_y(\psi_0) \right] L \cos \psi - F_x(\psi) L \sin \psi + F_x(\psi_0) L \tan \psi_0 \cos \psi}{J \omega_\psi^2}
\end{aligned} \right\} \quad (6.2b)$$

である。ここでは煩雑を避けるために省略したが、無次元化を行う前の運動方程式については付録 A1 の式(A1.60), 式(A1.57)および式(A1.58)を参照されたい。なお、図 6.1(b)の解析モデルでは、同方向回転と逆方向回転で同一の運動方程式が得られ、第 2 章および第 4 章で示した 3 種類の解析モデルとは異なり式(6.1)に σ は含まれない。

6・3 提案手法の適用

本節では、図 6.1 で示した実験装置の解析モデルに対して提案手法を適用する際に得られる式を示す。ただし、その適用手続は基本的に第 2 章および第 4 章で述べた内容と同じであることから、本解析モデルで新たに必要となる対応を除いて主要な結果の記述に留める。式の導出の詳細については付録 A4 に示す。

6・3・1 エネルギーに関する条件式の導出

ψ , ϕ_1 および ϕ_2 の同期解 (周期解) について式(6.1)のエネルギー積分を行い前述の系と同様に整理すると、3 自由度系の式(2.11)に対応するシステム全体の散逸エネルギーと励振エネルギーのバランスを表す式が次のように求められる。

$$\Delta D_{v,\psi} + \Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (6.3)$$

一方、式(2.12)に対応するモータ間のエネルギーバランスを表す式が次のように求められる。

$$\Delta T_{\psi\phi_1} - \Delta T_{\psi\phi_2} = \left[\Delta R_{\phi_1} - (\Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_1}) \right] - \left[\Delta R_{\phi_2} - (\Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_2}) \right] \quad (6.4)$$

ここに、 $\Delta D_{v,\psi}$, $\Delta D_{v,\phi_1}$, $\Delta D_{v,\phi_2}$, $\Delta D_{c,\phi_1}$ および $\Delta D_{c,\phi_2}$ は ψ 軸方向の基礎支持の粘性減衰トルク、モータ 1 およびモータ 2 の内部減衰、モータ 1 およびモータ 2 の回転軸に作用するクーロン摩擦トルクで消費される (無次元) 散逸エネルギー、 ΔR_{ϕ_1} および ΔR_{ϕ_2} はそれぞれモータ 1 およびモータ 2 に対して外部電源の印加電圧により供給される (無次元) 励振エネルギーを表す。 $\Delta T_{\psi\phi_p}$ ($p=1,2$) はリンクとモータ p の間に作用する内力による、モータ p からリンクの ψ 軸方向へのエネルギー移動量を表す。これらの項に関する詳細については付録 A4 の式(A4.57)に示す。

6・3・2 近似解の導出

式(6.3)および式(6.4)における各項を解析的に求めるために近似を導入するが、その結果として得られる式はできるだけ簡潔であることが望ましい。そこで、以下の仮定および近似を導入する。

- (i) 静的平衡状態を基準としたリンクの角変位を $\Delta\psi = \psi - \psi_0$ とおき、その大きさは十分に小さい ($\Delta\psi = 0$) ものとする。すなわち、式(6.1)を ψ_0 近傍で線形化する。
- (ii) 値の小さい μ_1 , μ_2 , μ_{d1} および μ_{d2} が含まれる項を無視する。

この結果、変数 ψ は $\Delta\psi$ に変換され、運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
& \nu^2 \Delta\psi'' + 2\zeta\nu\Delta\psi' + \Delta\psi \\
& = -\rho_{r1}\nu^2(\phi_1'' \sin\phi_1 + \phi_1'^2 \cos\phi_1) - \rho_{r2}\nu^2(\phi_2'' \sin\phi_2 + \phi_2'^2 \cos\phi_2) \\
& \quad - (\rho_{g1} + \rho_{g2})\sin\psi_0 - (\rho_{g1}\cos\phi_1 + \rho_{g2}\cos\phi_2)(\sin\psi_0 + \Delta\psi\cos\psi_0) \\
& \alpha_1\nu^2\phi_1'' + \beta\nu\phi_1' = \varepsilon_1 - \chi_1 - \rho_{r1}\nu^2\Delta\psi'' \sin\phi_1 - \rho_{g1}(\cos\psi_0 - \Delta\psi\sin\psi_0)\sin\phi_1 \\
& \alpha_2\nu^2\phi_2'' + \beta\nu\phi_2' = \varepsilon_2 - \chi_2 - \rho_{r2}\nu^2\Delta\psi'' \sin\phi_2 - \rho_{g2}(\cos\psi_0 - \Delta\psi\sin\psi_0)\sin\phi_2
\end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

次に、式(6.5)の第1式におけるモータの角変位 ϕ_1 および ϕ_2 に対して式(2.13)の角速度一定の近似を適用し、次式のように調和関数で近似したリンクの角変位 $\Delta\psi$ の同期解を代入する。

$$\Delta\psi = \psi_{c1} \cos\tau + \psi_{s1} \sin\tau + \psi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \psi_{s2} \sin(\tau + \theta) \quad (6.6a)$$

その結果として得られた式に調和バランス法を適用すると、式(6.6a)の係数が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
\psi_{c1} &= -\frac{(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1}\sin\psi_0)(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \psi_{s1} = -\frac{2\zeta\nu(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1}\sin\psi_0)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
\psi_{c2} &= -\frac{(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2}\sin\psi_0)(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \psi_{s2} = -\frac{2\zeta\nu(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2}\sin\psi_0)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}
\end{aligned} \right\} \quad (6.6b)$$

(i)および(ii)に示す近似と式(2.13)の ϕ_1 および ϕ_2 に関する近似により、式(6.3)および式(6.4)の各項は式(A4.66)のようになる。式(2.13)の ϕ_1 、 ϕ_2 および式(6.6)の $\Delta\psi$ を式(A4.66)に代入し、これを式(6.3)に代入することにより、自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
& \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1}\sin\psi_0)^2 + (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2}\sin\psi_0)^2 \right. \\
& \quad \left. + 2(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1}\sin\psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2}\sin\psi_0)\cos\theta \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& + 4\pi\beta\nu + 2\pi(\chi_1 + \chi_2) \\
& = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

同様に式(A4.66)を式(6.4)に代入することにより、同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
& \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& + 2\pi(\chi_1 - \chi_2) \\
& - 2\pi(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{1-\nu^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \sin \theta \\
& = 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

式(2.20)および式(2.22)から 3 自由度系の同期解を求める場合と同様の式変形を式(6.7)および式(6.8)に施すと, 図 6.1(b)の解析モデルの同期解を求める式は式(2.25)および式(2.23)と次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned}
d_c &= 2(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
d_0 &= \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 + (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& + (\chi_1 + \chi_2) - \varepsilon_2 \\
s_s &= -(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{1-\nu^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
s_0 &= \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& + (\chi_1 - \chi_2) + \varepsilon_2
\end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

6・3・3 近似解の安定判別

シューティング法で解の安定判別に必要な式(6.1)の変分方程式は以下のように導出される.

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta \nu \delta \psi' + \delta \psi \\
& = -\nu^2 \left(-2\mu_{d1} \cos \phi_1 + \frac{\mu_1}{2} \cos 2\phi_1 - 2\mu_{d2} \cos \phi_2 + \frac{\mu_2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \delta \psi'' \\
& \quad + \nu^2 \psi'' \left[(\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \phi_1 + (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \quad + \nu^2 \phi_1' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \psi' + \nu^2 \psi' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \phi_1' \\
& \quad + 2\nu^2 \psi' \phi_1' (\mu_1 \cos 2\phi_1 - \mu_{d1} \cos \phi_1) \delta \phi_1 \\
& \quad + \nu^2 \phi_2' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \psi' + \nu^2 \psi' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \phi_2' \\
& \quad + 2\nu^2 \psi' \phi_2' \delta \phi_2 (\mu_2 \cos 2\phi_2 - \mu_{d2} \cos \phi_2) \\
& \quad - \rho_{r1} \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \rho_{r2} \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \quad + (\rho_{g1} + \rho_{g2} + \rho_{d1} + \rho_{d2}) \tan \psi_0 \sin \psi \delta \psi \\
& \quad - \left[\rho_{g1} \cos \phi_1 + \rho_{g2} \cos \phi_2 - (\rho_{d1} + \rho_{d2}) \right] \cos \psi \delta \psi \\
& \quad - (\rho_{g1} \sin \phi_1 \delta \phi_1 + \rho_{g2} \sin \phi_2 \delta \phi_2) \sin \psi
\end{aligned} \tag{6.10a}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \psi'' \sin \phi_1 + \psi'' \delta \phi_1 \cos \phi_1) \\
& \quad - \nu^2 \psi' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \psi' - \nu^2 \psi'^2 (\mu_1 \cos 2\phi_1 - \mu_{d1} \cos \phi_1) \delta \phi_1 \\
& \quad + \rho_{g1} \sin \psi \sin \phi_1 \delta \psi - \rho_{g1} \cos \psi \cos \phi_1 \delta \phi_1
\end{aligned} \tag{6.12b}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
& = -\rho_{r2} \nu^2 (\delta \psi'' \sin \phi_2 + \psi'' \delta \phi_2 \sin \phi_2) \\
& \quad - \nu^2 \psi' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \psi' - \nu^2 \psi'^2 (\mu_2 \cos 2\phi_2 - \mu_{d2} \cos \phi_2) \delta \phi_2 \\
& \quad + \rho_{g2} \sin \psi \sin \phi_2 \delta \psi - \rho_{g2} \cos \psi \cos \phi_2 \delta \phi_2
\end{aligned} \tag{6.12c}$$

一方、提案手法では式(6.5)の運動方程式に対して式(2.13)の一定角速度近似を導入した次式を安定判別に用いる。

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \Delta \psi'' + 2\zeta \nu \delta \Delta \psi' + K \delta \Delta \psi \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \phi_1'' \sin \tau + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \tau - \sin \tau \delta \phi_1) \\
& \quad - \rho_{r2} \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin(\tau + \theta) + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos(\tau + \theta) - \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2 \right] \\
& \quad + \left[\rho_{g1} \sin \tau \delta \phi_1 + \rho_{g2} \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2 \right] \sin \psi_0 \\
& \quad - \left[\rho_{g1} \cos \tau + \rho_{g2} \cos(\tau + \theta) \right] \delta \Delta \psi \cos \psi_0
\end{aligned} \tag{6.11a}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \Delta \psi'' \sin \tau + \Delta \psi'' \delta \phi_1 \cos \tau) \\
& \quad - \rho_{g1} \delta \phi_1 \cos \psi_0 \cos \tau + \rho_{g1} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin \tau + \rho_{g1} \Delta \psi \delta \phi_1 \sin \psi_0 \cos \tau
\end{aligned} \tag{6.13b}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
& = -\rho_{r2} \nu^2 [\delta \Delta \psi'' \sin(\tau + \theta) + \Delta \psi'' \delta \phi_2 \cos(\tau + \theta)] \\
& \quad - \rho_{g2} \delta \phi_2 \cos \psi_0 \cos(\tau + \theta) + \rho_{g2} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin(\tau + \theta) \\
& \quad + \rho_{g2} \Delta \psi \delta \phi_2 \sin \psi_0 \cos(\tau + \theta)
\end{aligned} \right\} \quad (6.13c)$$

微小変分 $\delta \Delta \psi$ について式(2.29)と同様に $\cos \tau$ および $\sin \tau$ を含む項を仮定して調和バランスの原理を適用すると、式(2.30)および式(2.31)に対応する式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned}
& M \xi'' + C \xi' + K \xi = 0 \\
& \xi = (\delta \Delta \psi_c, \delta \Delta \psi_s, \delta \phi_1, \delta \phi_2)^T \\
& M \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 & 0 & 0 & \rho_{r2} \nu^2 \sin \theta \\ 0 & \nu^2 & \rho_{r1} \nu^2 & \rho_{r2} \nu^2 \cos \theta \\ 0 & \rho_{r1} \nu^2 & 2\alpha_1 \nu^2 & 0 \\ \rho_{r2} \nu^2 \sin \theta & \rho_{r2} \nu^2 \cos \theta & 0 & 2\alpha_2 \nu^2 \end{bmatrix} \\
& C \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta \nu & 2\nu^2 & 2\rho_{r1} \nu^2 & 2\rho_{r2} \nu^2 \cos \theta \\ -2\nu^2 & 2\zeta \nu & 0 & -2\rho_{r2} \nu^2 \sin \theta \\ -2\rho_{r1} \nu^2 & 0 & 2\beta \nu & 0 \\ -2\rho_{r2} \nu^2 \cos \theta & 2\rho_{r2} \nu^2 \sin \theta & 0 & 2\beta \nu \end{bmatrix} \\
& K \triangleq \begin{bmatrix} 1 - \nu^2 & 2\zeta \nu & 0 & -\rho_2 \sin \theta \\ -2\zeta \nu & 1 - \nu^2 & -\rho_1 & -\rho_2 \cos \theta \\ 0 & -\rho_1 & -\rho_1 \Psi_1 & 0 \\ -\rho_2 \sin \theta & -\rho_2 \cos \theta & 0 & -\rho_2 \Psi_2 \end{bmatrix} \\
& \rho_1 \triangleq \rho_{r1} \nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0, \quad \rho_2 \triangleq \rho_{r2} \nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0 \\
& \Psi_1 \triangleq \psi_{c1} + \psi_{c2} \cos \theta + \psi_{s2} \sin \theta, \quad \Psi_2 \triangleq \psi_{c2} + \psi_{c1} \cos \theta - \psi_{s1} \sin \theta \\
& \eta' = A \eta \\
& \eta \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

式(6.13)に示す A の固有値から、図 6.1(b)に示す解析モデルにおける安定判別ができる。

6・3・4 同期可能領域の導出

エネルギーに関する 2 本の条件式 (式(6.7)および式(6.8)) を満たす同期解の存在限界を表す関係式を 2・2・4 項と同様にして求めると、それぞれ以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{d,\min} &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{d,\max} \\
\varepsilon_{d,\min} &\triangleq \frac{\zeta\nu \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0) - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \right]^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 2\beta\nu + (\chi_1 + \chi_2) \\
\varepsilon_{d,\max} &\triangleq \frac{\zeta\nu \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0) + (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \right]^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + 2\beta\nu + (\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{s,\min} &\leq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{s,\max} \\
\varepsilon_{s,\min} &\triangleq \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + (\chi_1 - \chi_2) \\
&\quad - (\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{|1-\nu^2|}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
\varepsilon_{s,\max} &\triangleq \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} + (\chi_1 - \chi_2) \\
&\quad + (\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{|1-\nu^2|}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}
\end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

これらの式から図 6.1(b)の解析モデルに対する散逸エネルギーおよび同期エネルギーを満足する領域，ならびに同期可能領域が求められる。

6・3・5 振幅の推定

これまでは，自己同期発生時に同期振動数比と印加電圧が取りうる範囲についてエネルギー条件に基づく検討を行ってきた．一方で，振動機械への適用に向けては振幅の把握も重要であることから，ここでは図 6.1 の系におけるトラフの水平方向振幅と印加電圧が取りうる範囲についてもエネルギー条件に基づいて解析的に表すことを試みる．

リンクの ψ 軸方向の基礎支持の粘性減衰で消費される散逸エネルギー $\Delta D_{v,\psi}$ は，式 (A4.66)および式(6.6)より $\Delta\psi$ の振幅 Ψ を使って次のように表すことができる．

$$\Delta D_{v,\psi} = \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta\nu \Delta\psi'^2 d\tau = 2\pi\zeta\nu\Psi^2 \quad (6.16)$$

式(6.7)の散逸エネルギーに関する条件と式(6.16)から次の関係が得られる．

$$\zeta\nu\Psi^2 + 2\beta\nu + (\chi_1 + \chi_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (6.17)$$

式(6.17)を振幅について解くと次のようになる．

$$\Psi = \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2\beta\nu - (\chi_1 + \chi_2)}{\zeta\nu}} \quad (6.18)$$

ここで、散逸エネルギーの条件を満足する関係式(6.14)および式(6.18)より、散逸エネルギーの条件式(6.7)を満足するリンクの角変位の振幅 Ψ の範囲が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{d,\min} &\leq \Psi \leq \Psi_{d,\max} \\ \Psi_{d,\min} &\triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon_{d,\min} - 2\beta\nu - (\chi_1 + \chi_2)}{\zeta\nu}}, \quad \Psi_{d,\max} \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon_{d,\max} - 2\beta\nu - (\chi_1 + \chi_2)}{\zeta\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

同期エネルギーの条件式(6.8)を満足する振幅 Ψ の範囲についても、式(6.15)および式(6.18)より同様に求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{s,\min} &\leq \Psi \leq \Psi_{s,\max} \\ \Psi_{s,\min} &\triangleq \sqrt{\frac{(\varepsilon_{s,\min} + 2\varepsilon_2) - 2\beta\nu - (\chi_1 + \chi_2)}{\zeta\nu}} \\ \Psi_{s,\max} &\triangleq \sqrt{\frac{(\varepsilon_{s,\max} + 2\varepsilon_2) - 2\beta\nu - (\chi_1 + \chi_2)}{\zeta\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

同期解が存在する場合には、無次元電圧 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および振幅 Ψ が必ず式(6.19)と式(6.20)を同時に満足する範囲内に存在するので、振幅はこの範囲内の領域（同期可能領域）の値のみを取りうる。したがって、振幅についても同期振動数比と同じように同期可能領域を解析的に把握できる。

次に、上記のようなリンクの角変位 ψ に関する領域をトラフの水平方向変位 x に関する領域に変換する。 x と ψ の間には次式の関係がある。

$$x \triangleq L(\cos\psi - \cos\psi_0), \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi \quad (6.21)$$

式(6.21)を用いて式(6.19)をトラフの水平方向変位 x に変換することにより、散逸エネルギーに関する条件式(6.7)を満たすトラフの水平方向両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ が取りうる範囲が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} X_{d,\min}^{\text{pk-pk}} &\leq X^{\text{pk-pk}} \leq X_{d,\max}^{\text{pk-pk}} \\ X_{d,\min}^{\text{pk-pk}} &\triangleq L[\cos(\psi_0 - \Psi_{d,\min}) - \cos(\psi_0 + \Psi_{d,\min})] \\ X_{d,\max}^{\text{pk-pk}} &\triangleq L[\cos(\psi_0 - \Psi_{d,\max}) - \cos(\psi_0 + \Psi_{d,\max})] \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

同様にして、同期エネルギーの条件式(6.8)を満足する両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ の範囲は式(6.20)および式(6.21)から次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} X_{s,\min}^{\text{pk-pk}} &\leq X^{\text{pk-pk}} \leq X_{s,\max}^{\text{pk-pk}} \\ X_{s,\min}^{\text{pk-pk}} &\triangleq L \left[\cos(\psi_0 - \Psi_{s,\min}) - \cos(\psi_0 + \Psi_{s,\min}) \right] \\ X_{s,\max}^{\text{pk-pk}} &\triangleq L \left[\cos(\psi_0 - \Psi_{s,\max}) - \cos(\psi_0 + \Psi_{s,\max}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

式(6.22)および式(6.23)から $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および $X^{\text{pk-pk}}$ に関する同期可能領域が得られる.

6・4 解析モデルの妥当性の検証

6.1 節に示した解析モデルの妥当性について検証するために, 実験結果とシューティング法に基づく数値計算結果の比較を行った. 表 6.1 に本章で用いたパラメータを示す. ここに, DC モータに関するパラメータはカタログ値であり, その他のパラメータは実験装置から測定あるいは同定された値である.

実験では, モータ 2 の電圧 e_2 を 1.3 V に固定した状態でモータ 1 の電圧 e_1 を変化させながら同期時の運動を測定した. ただし, 安全のためにモータ 1 の電圧 e_1 の上限値を 2.6 V としている. シューティング法による数値計算では実験と同様にモータ 2 の電圧 e_2 を 1.3 V に固定した状態でモータ 1 の電圧 e_1 を変化させ, 不安定解を含む全ての同期解を求めた.

実験結果および数値計算結果を図 6.2 に示す. 図の横軸はいずれもモータ 1 の電圧 e_1 であり, 縦軸は上から順に同期振動数 f_{syn} , モータ 1 とモータ 2 の位相差 θ , およびトラフの水平方向変位の両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ である. 図の右側には同期振動数 f_{syn} の図における領域 R

Table 6.1 Parameters in experimental apparatus

| | | | | | |
|---|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| m_{d1}, m_{d2} [kg] | 0.520 | L [m] | 0.110 | x_{ψ_0} [m] | 1.90×10^{-2} |
| m_{r1}, m_{r2} [kg] | 2.78×10^{-2} | d_1, d_2 [m] | 4.50×10^{-2} | y_{ψ_0} [m] | 4.72×10^{-2} |
| m_1, m_2 [kg] | 2.54×10^{-2} | d_{m1}, d_{m2} [m] | 3.85×10^{-2} | c_{ψ} [N · s/m] | 1.20×10^{-2} |
| J [kg · m ²] | 1.77×10^{-2} | h_1, h_2 [m] | 2.94×10^{-2} | T_c [N] | 2.27×10^{-3} |
| $J_{r,1}, J_{r,2}$ [kg · m ²] | 5.58×10^{-6} | h_{u1}, h_{u2} [m] | 1.95×10^{-2} | ψ_0 [rad] | 1.74 |
| $J_{m_{r1},l}, J_{m_{r2},l}$ [kg · m ²] | 3.58×10^{-6} | r_1, r_2 [m] | 3.00×10^{-2} | r_a [Ω] | 2.86 |
| $J_{m_{r1},s}, J_{m_{r2},s}$ [kg · m ²] | 4.82×10^{-7} | r_{m1}, r_{m2} [m] | 1.35×10^{-2} | K_t [N · m/ A] | 24.1×10^{-3} |
| $J_{m_{r1},\phi_1}, J_{m_{r2},\phi_2}$ [kg · m ²] | 3.56×10^{-6} | k [N/m] | 11.1×10^3 | K_E [V · s/ rad] | 24.1×10^{-3} |
| $J_{m_2,\phi_2}, J_{m_2,\phi_2}$ [kg · m ²] | 3.31×10^{-7} | l_0 [m] | 9.18×10^{-2} | | |

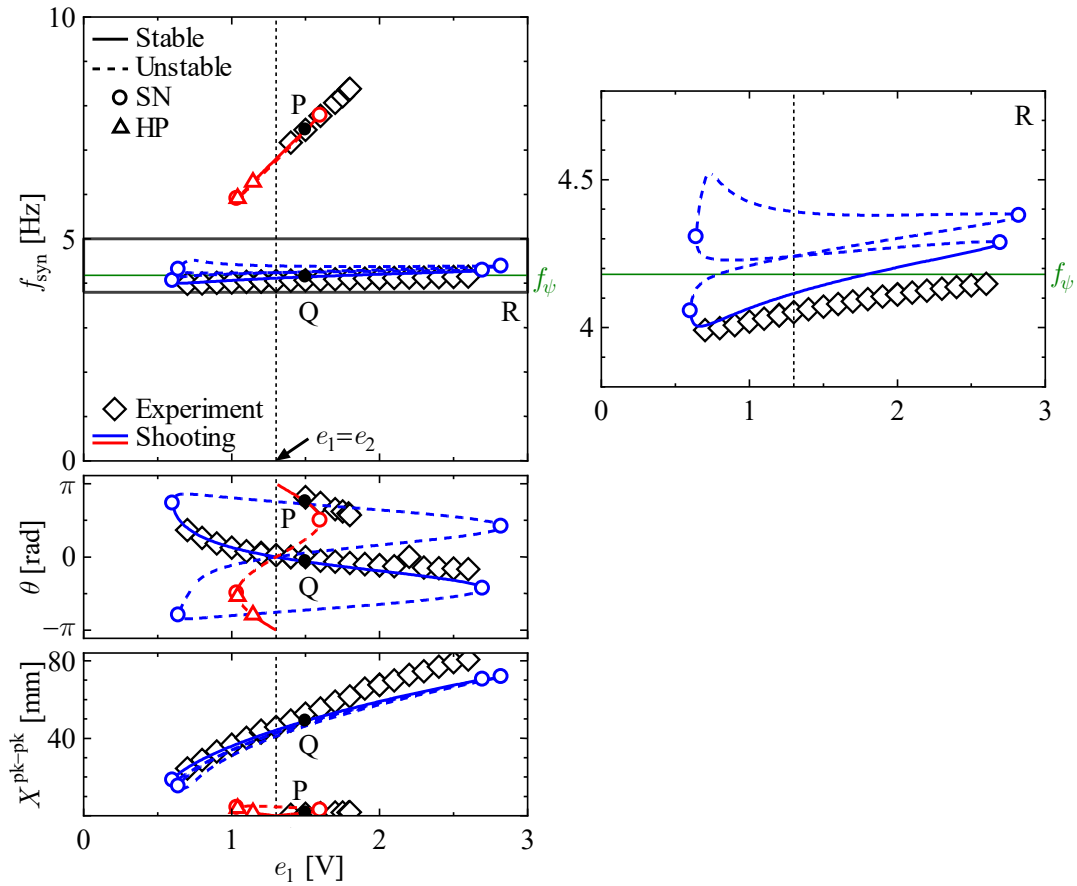


Fig. 6.2 Comparison between experimental results and numerical results obtained from the shooting method

の拡大図を示した．縦の破線は $e_1 = e_2 (=1.6 \text{ V})$ を満たす電圧 e_1 の値を，緑色の横線は図 6.1(b)の系において $f_\psi = \sqrt{K/J}/2\pi$ から求めた固有振動数 $f_\psi = 4.18 \text{ Hz}$ を表している．図中の◇印は実験結果であり，赤線および青線は数値計算結果を固有振動数付近の解分枝と同期振動数の高い解分枝とで色分けして示したものである．実線および破線は安定解および不安定解を表しており，○印はサドル・ノード分岐点を，△印はホップ分岐点を表している．振動利用の観点からはトラフが大振幅で振動する青線の安定解を用いるのが望ましいが，参考までに赤線の解分枝についても示した．

図 6.2 より，実験結果と計算結果は同期振動数 f_{syn} ，モータ間の位相差 θ およびトラフの水平方向変位の両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ のいずれについてもよく一致していることが確認できる．赤線の解分枝は実験結果と比較して低電圧・低振動数側に若干ずれているものの，全体的には両者は十分な精度で対応しているといえる．さらに，上記のように赤色の解分枝は実際の使用を想定したものではないため，実用上の問題も生じない．

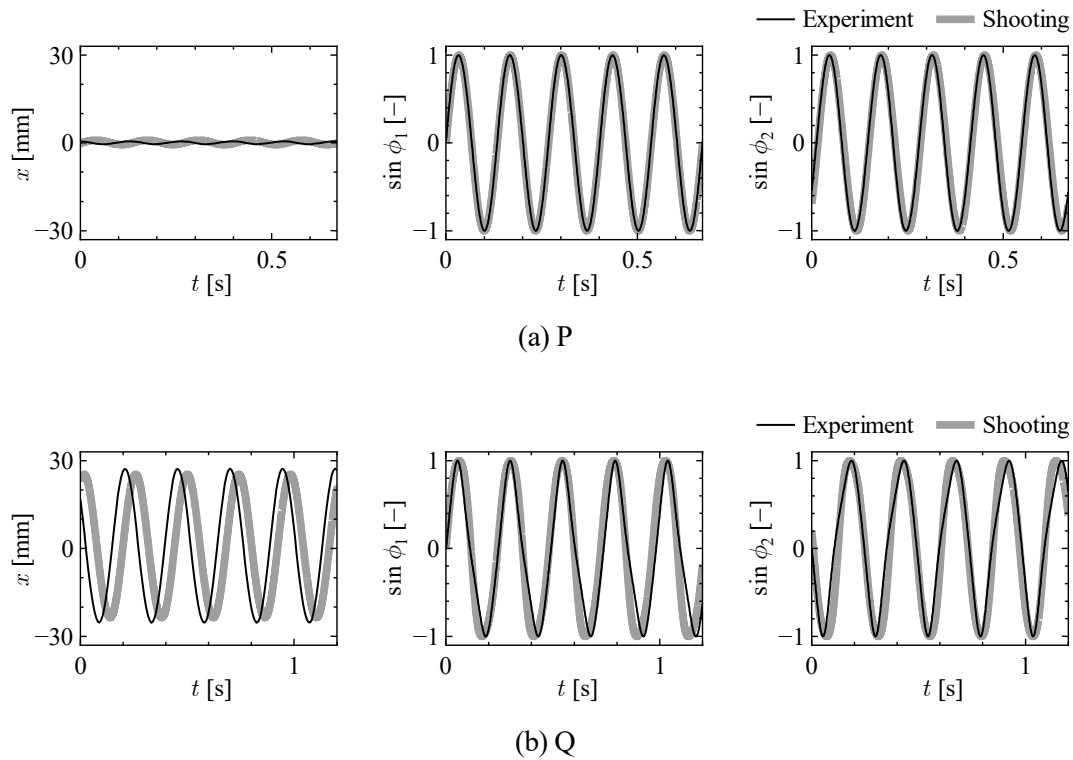


Fig. 6.3 Behavior of the system at stable synchronous solutions in Fig. 6.2

図 6.3 は、図 6.2(a) の点 P および点 Q ($e_2 = 1.5 \text{ V}$) の安定解の時刻歴波形を実験 (黒色の細線) とシューティング法 (灰色の太線) で求めて重ね描きしたものである。点 Q については x の位相に若干のずれが見られるものの、点 P および点 Q の波形ともに数値解析結果は実験結果とよく一致しており、解析モデルから系の挙動も精度よく求められることが確認できる。

以上より、解析モデルの妥当性を実験的に検証することができた。

6・5 提案手法の有効性の検証

提案手法の有効性について調べるために、シューティング法により得られる解析モデルの高精度な数値計算結果と提案手法により得られる同期可能領域について比較する。提案手法からは近似解も求められるが、その特性は同期可能領域を求めることで概ね把握できるため、ここでは省略する。表 6.1 のパラメータについて求められた同期可能領域を図 6.2 で示した数値解析結果と併せて図 6.4 に示す。同期振動数 f_{syn} および両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ の図では、式(6.14)および式(6.22) (散逸エネルギーに関する条件) を満たしうる領域を薄黄色で、式(6.15)および式(6.23) (同期エネルギーに関する条件) を満たしうる領域を灰色で、両方の条件を満たしうる同期可能領域を橙色で示している。

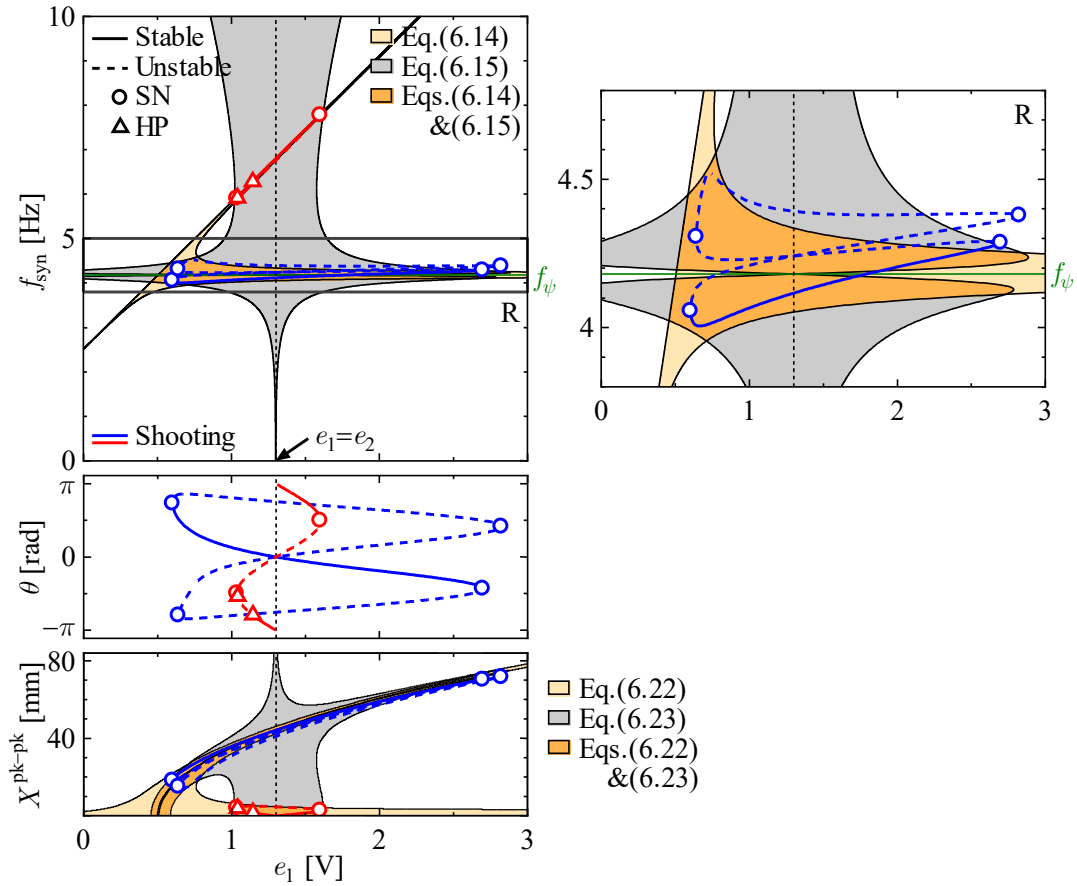


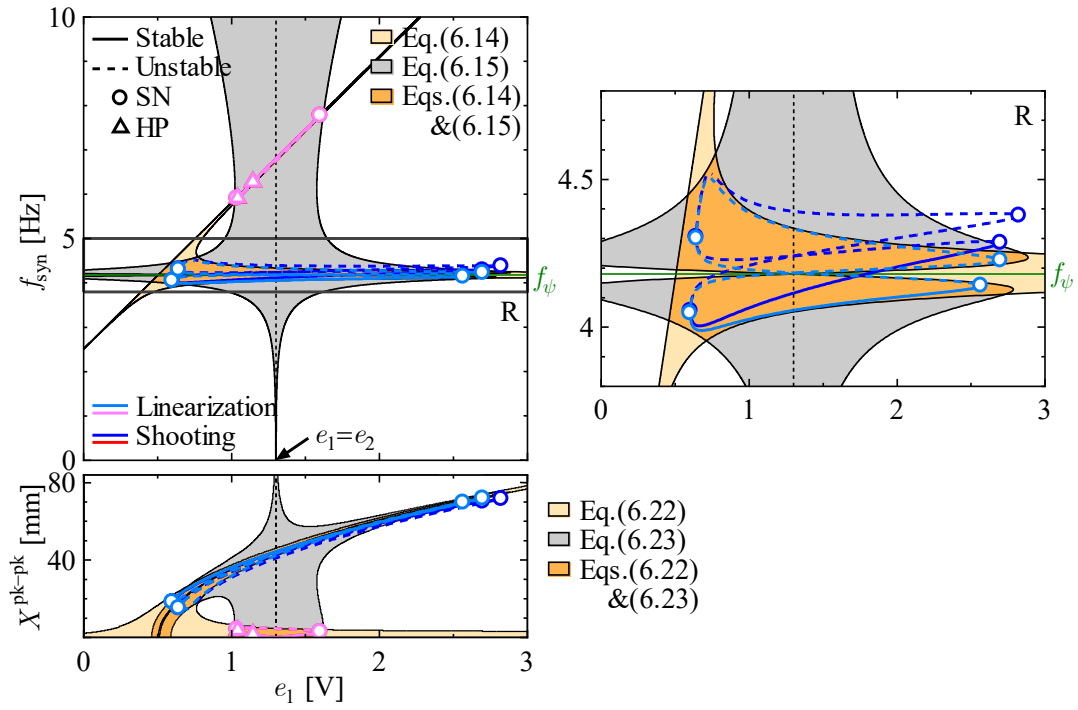
Fig. 6.4 Comparison between areas satisfying the two energetic conditions and synchronous solutions obtained from the shooting method

図 6.4 の同期振動数 f_{syn} および両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ のいずれの図においても同期可能領域と解分枝の位置はよく一致しており、解析的に得られる同期可能領域に基づいて自己同期発生時の特性を精度よく把握できることがわかる。ただし、右側に示した拡大図では固有振動数付近の解分枝（青色）の高電圧側が同期可能領域よりやや上にずれている。

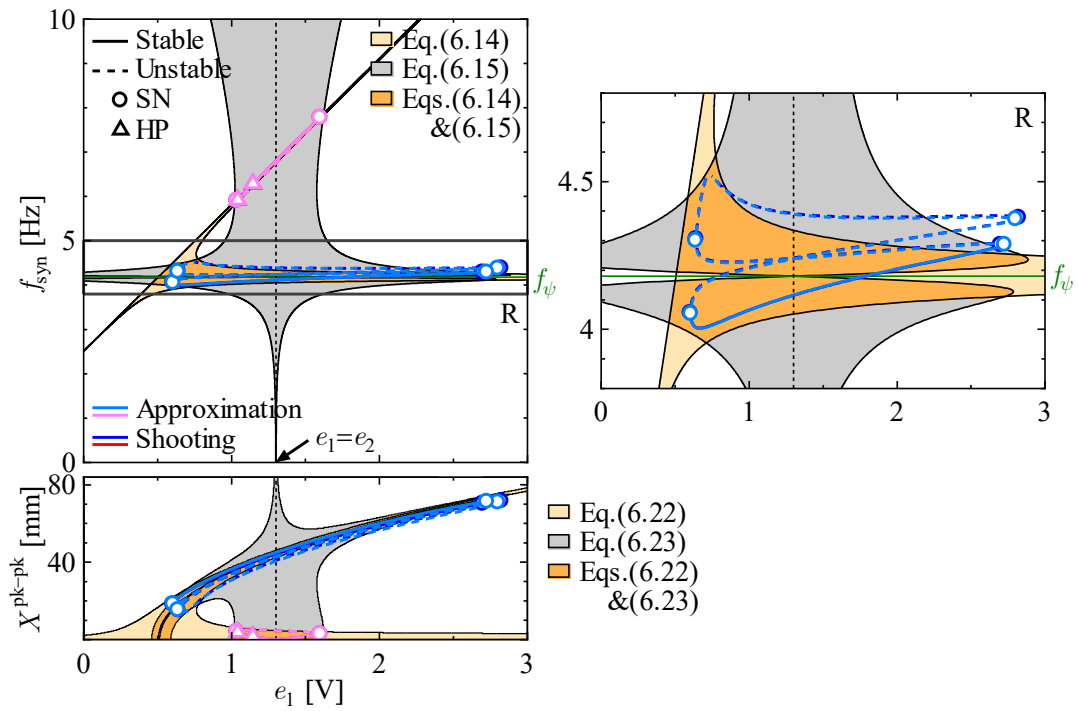
このような誤差が生じる理由を検討するため、図 6.5(a)-(c)には図 6.4 の同期振動数および振幅に関する結果に加え、式(6.1)について (a) リンクの角変位に関して線形化した場合、(b) 値の小さい μ_1, μ_2, μ_{d1} および μ_{d2} が含まれる項を無視した場合、(c) リンクの角変位に関して線形化し、かつ μ_1, μ_2, μ_{d1} および μ_{d2} が含まれる項を無視した場合、の 3 通りに近似した上でシューティング法により数値計算を行った結果を、そして図 6.5(d)には式(2.23)、式(2.25)および式(6.9)より近似解を求めた場合の結果を桃色の線および水色の線で示す。図の横軸はいずれもモータ 1 の電圧 e_1 であり、縦軸は上から順に同期振動数 f_{syn} およびトラフの水平方向変位の両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ である。図の右側には図 6.4 と同様に領域 R の拡大図を示した。図 6.5(a)の拡大図 R では水色の線と青線にずれが生じている一方で、図 6.5(b)では

ほとんどずれていないことが確認できる。また、図 6.5(c)および図 6.5(d)における水色の線と青線の解分枝のずれは図 6.5(a)に対してほとんど変化が見受けられない。これにより、シューティング法により得られる青線の解分枝と同期可能領域のずれはリンクの角変位に関する線形化に起因するものであると考えられる。しかしながら、この解分枝のずれは図 6.2 における実験結果と数値計算結果のずれと同程度であることから、実際の設計においては問題にならないと考えられる。

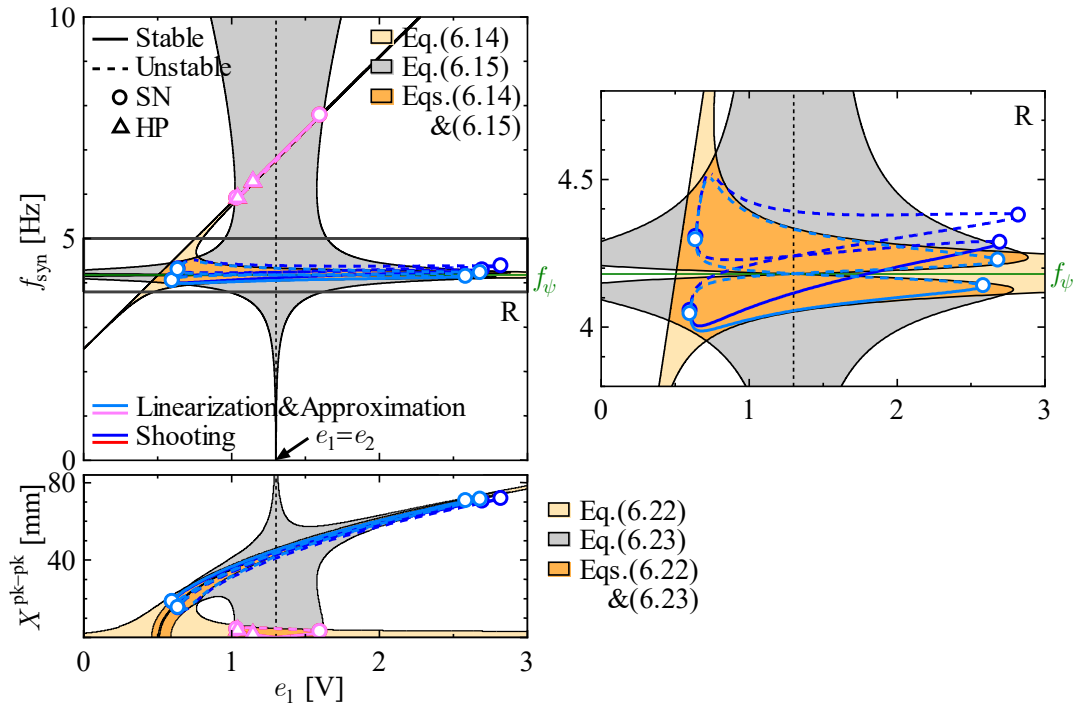
以上より、同期可能領域を求めることで同期発生時のパラメータと同期振動数 f_{syn} およびトラフの両振幅 $X^{\text{pk-pk}}$ の関係をかなりの精度で把握できることが示され、提案手法の有効性が確認できた。振動搬送機で発生する振動は同期振動数だけでなく振幅についても適切な値であることが要求されるが、図 6.4 に示したように提案手法において振幅とパラメータの関係を解析的に与える同期可能領域の式は自己同期発生時の振幅を精度よく推定できていることから、目標の振幅を実現するために必要なパラメータの設定に利用することが可能である。



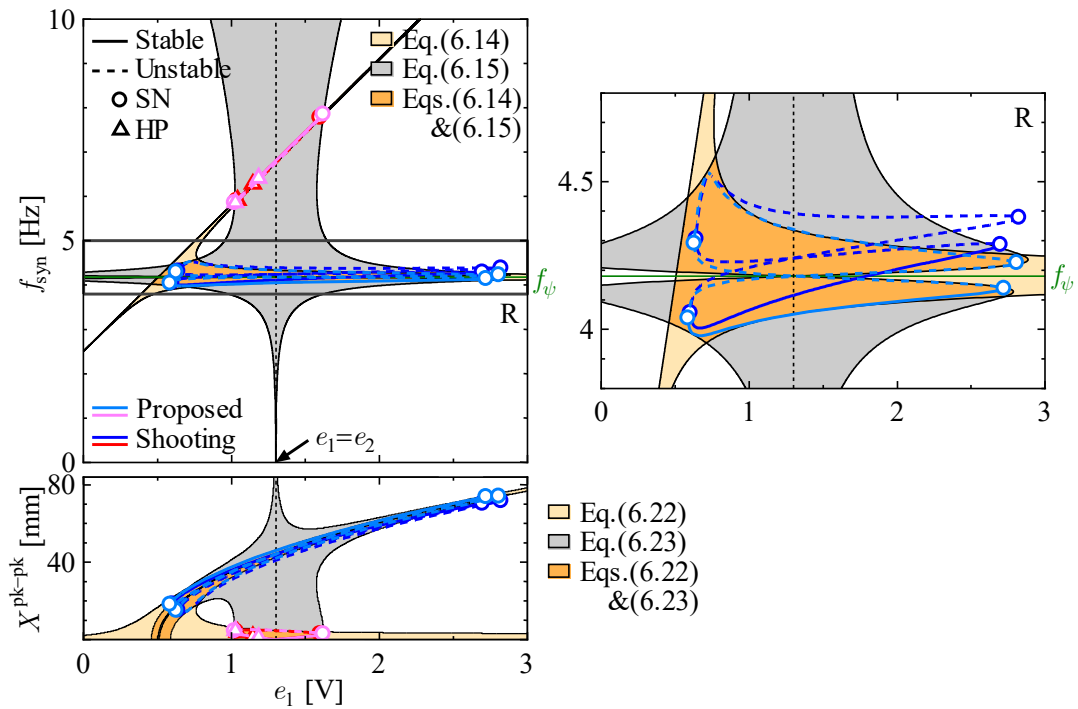
(a) Change in synchronous solutions caused by the linearization



(b) Change in synchronous solutions caused by the approximation



(c) Change in synchronous solutions caused by both the linearization and the approximation



(d) Change in the synchronous solution caused by the application of the proposed method

Fig. 6.5 Effects of linearization for $\Delta\psi$ and an approximation neglecting the terms for small parameters μ_1 , μ_2 , μ_{d1} , and μ_{d2} on the accuracy of synchronous solutions

6・6 第6章のまとめ

本章では、提案手法を応用した振動機械の効率的な設計方法の確立に向けて、振動搬送機を模した装置を作製して提案手法の有効性を実験的に検証した。

最初に、実際の機械では自己同期発生時の振動数に加えて振幅の把握も重要であることを考慮して、振幅についても同期可能領域に基づく解析が可能となるように提案手法の拡張を行った。

その上で、実験を行って得られた結果をシューティング法による同期解の高精度な数値計算結果と比較することで、解析モデルの妥当性を検証した。さらに、数値計算結果を提案手法により得られた同期可能領域と比較したところ、同期可能領域を求めることで同期解の振動数および振幅のいずれについても精度よく把握できることが示された。

本章の系モデルにおいても、提案手法を用いることにより第2章および第3章で扱った2振動子3自由度モデルと同様にパラメータが同期振動数に与える影響を定量的に把握できる。さらには、性能向上および安定性の確保のために重要となる振幅についても同様に定量的に把握できる。

以上により、提案手法の有効性を実験的に検証できた。本手法によって目標の同期状態を実現するために必要なパラメータ設定を簡潔な式に基づいて把握できることから、自己同期現象を応用した振動機械の効率的な設計が可能となる。

第7章 結論

本論文では、2つの回転型振動子に発生する自己同期現象のメカニズムの解明および振動機械への応用において必要なパラメータの影響の効率的な把握の実現を目的として、エネルギー条件に基づいた自己同期現象の解析手法を提案した。さらに、提案手法で得られた解析結果と高精度な数値計算結果および実験結果との比較に基づいてそれらの有効性を確認した。以下にその要点をまとめる。

第1章では、自己同期現象の歴史および従来の研究・応用例についてまとめ、本研究の目的を示した。

第2章では、並進1自由度を有するブロックを介して2個の振動子が結合された2振動子3自由度モデルを用いて、自己同期現象の発生条件に関するエネルギー的な考察を行い、散逸エネルギーに関する条件式と同期エネルギーに関する条件式を解析的に導出した。これら2つの条件と2つのモータの回転角速度を一定とみなす近似を組み合わせ、安定判別まで含めた近似解の簡単かつ高精度な計算法、さらに上記2本の条件式から求められる同期解の存在限界を表す関係式を用いた解析法を提案し、とくに後者では簡潔な式に基づいて自己同期現象の特性と発生しうるパラメータ範囲を把握できることを示した。

第3章では、第2章で提案した手法を数種類のパラメータ設定に対して適用し、それぞれのパラメータが自己同期現象に与える影響について考察した。その結果、同期解の存在限界を表す式を用いた解析によって、パラメータの変化が解分枝に及ぼす複雑な影響を効率的かつ包括的に把握できることを示した。

第4章では、多自由度振動系に支持された回転型振動子の自己同期現象の解析に対して第2章で示した提案手法の拡張を行った。最初に直交2方向の並進自由度を有する2自由度支持系に2個の回転子が搭載された4自由度モデルへの拡張、次に直交2方向の並進自由度および回転自由度を有する3自由度支持系に2個の回転子が搭載された5自由度モデルへの拡張を行った。回転自由度を含む5自由度系についてはモータの回転角速度一定の近似の導入だけではエネルギーに関する2本の条件式を導出することが困難であったが、この近似に加えてブロックの角変位に関する線形化と調和バランス法を併用することで問題を解決した。求められた条件式を用いて振動子の回転方向を始めとするパラメータの影響に関する解析を実施した結果、4自由度系および5自由度系のいずれにおいても、3自由度系の場合と同様に提案手法を用いることでパラメータが与える影響を把握できることを示した。

第5章では、5自由度系および4自由度系に提案手法を適用して、固有振動数が解分枝および解の存在領域に与える影響を考察した。まず、振動子の支持系がもつ各自由度の固

有振動数比の近傍で広い電圧範囲に存在する解分枝については、固有振動数が高くなるほどエネルギーの領域が拡大することで解分枝が大きくなることがわかった。さらに、4自由度系およびパラメータに関する特定の条件を満たす5自由度系では、エネルギーに関する条件式における三角関数の符号に着目することで支持系の自由度を2つのグループに分類することが可能であり、例えば同一グループに所属する自由度間で固有振動数を入れ替えても解分枝およびエネルギーの領域の形状は変化しないなど、支持系の自由度に関する一定の対称性が存在することを示した。このような自由度の分類によって、固有振動数を近づけて異方性を小さくした場合に同一グループ間では互いの影響を強め合せて解分枝およびエネルギーの領域が拡大し、異なるグループ間では互いの影響を打ち消し合せてそれらが小さくなることが解析的に示されるため、固有振動数の影響を理解する上で有効な視点が得られる。

第6章では、提案手法を応用した振動機械の効率的な設計方法の確立に向けて、振動搬送機を模した実験装置を用いた実験的な検証を実施した。まず、実験結果とシューティング法により得られた高精度な数値解析結果を比較することで、実験装置に対応した解析モデルの妥当性を検証した。その上で、提案手法を解析モデルに適用してシューティング法による結果と比較したところ、提案手法で得られた同期可能領域によってシューティング法で得られた同期解の特性を把握できることが示された。これは、実機に近い構造の系についても提案手法に基づく簡単な解析によって実験結果の精度よい推定が可能であることを意味しており、提案手法の有効性を実験的に示すことができたといえる。

以上のように、2つの回転型振動子からなる系の自己同期現象の発生条件に関するエネルギー的な考察に基づいて、安定性まで含めて近似解を簡潔かつ高精度に求める手法、および2つのエネルギーの条件式を満足する領域を求めることでパラメータの影響を包括的に把握する手法を提案し、多自由度支持系への拡張や実機を模した装置による実験的検証をも含む検討を実施してその有効性を示した。この成果によって、自己同期現象の統一的なメカニズムの解明および効率的な振動機械の設計の実現の大きな進展が期待できる。

謝辞

本論文をまとめるにあたり，卒業研究着手から現在に至るまで懇切丁寧で研究面だけでなくあらゆる面で温かいご指導を賜り，私の拙い意見でも聞いてくださり本研究の良さを最大限に引き出してくださった森博輝准教授，ならびに学部生の頃から博士後期課程1年まで研究指導をしてくださり，研究者としての姿勢や心構えを説いてくださった九州職業能力開発大学校の近藤孝広校長に心より感謝申し上げます．本論文を作成するにあたり，ご多忙の中貴重なご教示およびご意見を頂き，様々な場面で温かくご支援くださった雫本信哉教授，ならびに本論文の作成および日々の研究活動で様々な観点からご助言くださり，社会人としての心得を教えてくださいました井上卓見教授に厚く御礼申し上げます．

本研究の遂行に際して宗和伸行助教には実験面や事務的な面でお世話になり，貴重なご意見を頂くだけでなく，生活面でも何かと気にかけてくださりました．大村和久技術職員ならびに木庭洋介技術職員からは実験に関して多くの御助力および御意見を頂き，不慣れな中でも実験を遂行することができました．厚く感謝申し上げます．同じ研究テーマの安倍瞬平さんは研究について右も左もわからないときに優しく指導してくださり，自己同期現象の面白さを教えてくださいました．卒業生の住川大樹さんには研究に関して本質的な視点からご意見を頂くだけでなく，1人で問題を抱え込んでいたときに何度も助けていただきました．研究遂行にあたっては，卒業生の竹内瑞紀君，岡部裕君，大学院生の城下皓亮君，高橋将哉君，卒業研究生の久保山徳聖君と議論を重ね工夫して研究することで，研究をより良いものにすることができました．皆さんと研究ができて本当に楽しかったです．さらに，本論文の執筆では久保山徳聖君にご協力いただきました．御礼申し上げます．

機械力学研究室の大学院生および卒業研究生，機械振動学研究室の卒業生の皆様のお陰で研究生活を楽しく送ることができました．とても感謝しております．また，あらゆる面で温かくご支援いただき，工学者として社会貢献することの大切さを教えてくださいました公益財団法人黒田奨学会の皆様，経済面で支えてくださった日本学生支援機構の皆様に深く御礼申し上げます．

最後に，博士後期課程まで進学させていただき，社会や家族のために一所懸命働きながら叱咤激励して下さる父，どんな状況でも前向きに捉えそっと背中を押して下さる母，そして勉強熱心でどこにいても応援してくれる兄に感謝いたします．

令和5年1月

九州大学大学院 工学府 機械工学専攻

末田 美和

付録 A1 運動方程式の導出

A1・1 3 自由度系および 5 自由度系

第 2 章の図 2.1 に示す 2 振動子 3 自由度モデル (3 自由度系) および第 4 章の図 4.8 に示す 2 振動子 5 自由度モデル (5 自由度系) の運動方程式を求める. 3 自由度系の運動方程式については 5 自由度系の運動方程式のうち, ブロックの並進変位 y および角変位 ψ を 0 とすればよいので, ここでは 5 自由度系の運動方程式のみを導出する.

図 4.8 において, 回転体のそれぞれの位置座標 (x_{rp}, y_{rp}) , 不釣り合いおもりのそれぞれの位置座標 (x_p, y_p) ($p=1,2$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} x_{r1} &= x - l_1 \cos \psi, & y_{r1} &= y - l_1 \sin \psi \\ x_{r2} &= x + l_2 \cos \psi, & y_{r2} &= y + l_2 \sin \psi \\ x_1 &= x - l_1 \cos \psi + r_1 \sin \phi_1, & y_1 &= y - l_1 \sin \psi - r_1 \cos \phi_1 \\ x_2 &= x + l_2 \cos \psi + r_2 \sin \phi_2, & y_2 &= y + l_2 \sin \psi - r_2 \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

式(A1.1)を時刻 t で微分すると次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{r1} &= \dot{x} + l_1 \dot{\psi} \sin \psi, & \dot{y}_{r1} &= \dot{y} - l_1 \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{x}_{r2} &= \dot{x} - l_2 \dot{\psi} \sin \psi, & \dot{y}_{r2} &= \dot{y} + l_2 \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} + l_1 \dot{\psi} \sin \psi + r_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1, & \dot{y}_1 &= \dot{y} - l_1 \dot{\psi} \cos \psi + r_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} - l_2 \dot{\psi} \sin \psi + r_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2, & \dot{y}_2 &= \dot{y} + l_2 \dot{\psi} \cos \psi + r_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.2})$$

図 4.8 における運動エネルギー T は次式のように表せる.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_{r1} (\dot{x}_{r1}^2 + \dot{y}_{r1}^2) + \frac{1}{2} m_{r2} (\dot{x}_{r2}^2 + \dot{y}_{r2}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_b \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_{r1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{r2} \dot{\phi}_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.3})$$

ここで, ブロックの回転中心は重心と一致していることから,

$$(m_{r1} + m_1) l_1 = (m_{r2} + m_2) l_2 \quad (\text{A1.4})$$

が成立する.

式(A1.3)に式(A1.2), (A1.4)を代入して整理すると,

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2 \\ &\quad + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 (\dot{x} \cos \phi_1 + \dot{y} \sin \phi_1) - m_1 r_1 l_1 \dot{\psi} \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \psi) \\ &\quad + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 (\dot{x} \cos \phi_2 + \dot{y} \sin \phi_2) + m_2 r_2 l_2 \dot{\psi} \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \psi) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.5})$$

となる。ここで,

$$\left. \begin{aligned} M &\triangleq M_b + m_{r_1} + m_{r_2} + m_1 + m_2 \\ J &\triangleq J_b + (m_{r_1} + m_1)l_1^2 + (m_{r_2} + m_2)l_2^2 \\ J_1 &\triangleq J_{r_1} + m_1 r_1^2, \quad J_2 \triangleq J_{r_2} + m_2 r_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.6})$$

である。

また、ポテンシャルエネルギー U は次式のように表せる。

$$U = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_\psi \psi^2 \quad (\text{A1.7})$$

式(A1.5), (A1.7)より,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= M\ddot{x} + m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) + m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = k_x x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.8})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= M\dot{y} + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= M\ddot{y} + m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) + m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = k_y y \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.9})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= J\dot{\psi} - m_1 r_1 l_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \psi) + m_2 r_2 l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \psi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= J\ddot{\psi} - m_1 r_1 l_1 \left[\ddot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \psi) + \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 - \dot{\psi}) \cos(\phi_1 - \psi) \right] \\ &\quad + m_2 r_2 l_2 \left[\ddot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \psi) + \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\psi}) \cos(\phi_2 - \psi) \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &= m_1 r_1 l_1 \dot{\psi} \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \psi) - m_2 r_2 l_2 \dot{\psi} \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \psi) \\ \frac{\partial U}{\partial \psi} &= k_\psi \psi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.10})$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= J_1 \dot{\phi}_1 + m_1 r_1 (\dot{x} \cos \phi_1 + \dot{y} \sin \phi_1) - m_1 r_1 l_1 \dot{\psi} \sin(\phi_1 - \psi) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= J_1 \ddot{\phi}_1 + m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 - \dot{x} \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1 + \dot{y} \dot{\phi}_1 \cos \phi_1) \\
&\quad - m_1 r_1 l_1 [\ddot{\psi} \sin(\phi_1 - \psi) + \dot{\psi}(\dot{\phi}_1 - \dot{\psi}) \cos(\phi_1 - \psi)] \\
\frac{\partial T}{\partial \phi_1} &= m_1 r_1 \dot{\phi}_1 (-\dot{x} \sin \phi_1 + \dot{y} \cos \phi_1) - m_1 r_1 l_1 \dot{\psi} \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \psi) \\
\frac{\partial U}{\partial \phi_1} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (A1.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= J_2 \dot{\phi}_2 + m_2 r_2 (\dot{x} \cos \phi_2 + \dot{y} \sin \phi_2) + m_2 r_2 l_2 \dot{\psi} \sin(\phi_2 - \psi) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) &= J_2 \ddot{\phi}_2 + m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 - \dot{x} \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2 + \dot{y} \dot{\phi}_2 \cos \phi_2) \\
&\quad + m_2 r_2 l_2 [\ddot{\psi} \sin(\phi_2 - \psi) + \dot{\psi}(\dot{\phi}_2 - \dot{\psi}) \cos(\phi_2 - \psi)] \\
\frac{\partial T}{\partial \phi_2} &= m_2 r_2 \dot{\phi}_2 (-\dot{x} \sin \phi_2 + \dot{y} \cos \phi_2) + m_2 r_2 l_2 \dot{\psi} \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \psi) \\
\frac{\partial U}{\partial \phi_2} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (A1.12)$$

である。また、非保存力について、仮想仕事の原理よりそれぞれの自由度の一般化力は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
Q_x^{nc} &= -c_x \dot{x}, \quad Q_y^{nc} = -c_y \dot{y}, \quad Q_\psi^{nc} = -c_\psi \dot{\psi} + B(\dot{\phi}_1 - \dot{\psi}) + B(\dot{\phi}_2 - \dot{\psi}) - A(e_1 + \sigma e_2) \\
Q_{\phi_1}^{nc} &= A e_1 - B(\dot{\phi}_1 - \dot{\psi}), \quad Q_{\phi_2}^{nc} = \sigma A e_2 - B(\dot{\phi}_2 - \dot{\psi})
\end{aligned} \right\} \quad (A1.13)$$

ここで、

$$A \triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a} \quad (A1.14)$$

であり、 A はモータの電圧とトルクの間の変換係数を、 B はモータの内部減衰を表す。ただし、 $e_1 > 0$, $e_2 > 0$ であり、 $\sigma = 1$ のとき2つのモータは同方向に回転し、 $\sigma = -1$ のとき逆方向に回転する。

よって、式(A1.8)-(A1.13)より5自由度系の運動方程式は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\
M\ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\
J\ddot{\psi} + (c_\psi + 2B)\dot{\psi} + k_\psi \psi & \\
= m_1 r_1 l_1 [\ddot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \psi) + \dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_1 - \psi)] - m_2 r_2 l_2 [\ddot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \psi) + \dot{\phi}_2^2 \cos(\phi_2 - \psi)] & \\
&\quad - A(e_1 + \sigma e_2) + B(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \\
J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 & \\
= A e_1 - m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1) + m_1 r_1 l_1 [\ddot{\psi} \sin(\phi_1 - \psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\phi_1 - \psi)] + B \dot{\psi} & \\
J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 & \\
= \sigma A e_2 - m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2) - m_2 r_2 l_2 [\ddot{\psi} \sin(\phi_2 - \psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\phi_2 - \psi)] + B \dot{\psi} &
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.15})$$

式(A1.15)のうちブロックの並進変位 y および角変位 ψ を 0 とすることで、3自由度系の運動方程式が得られる。ここでは、 $M_b + m_{r_1} + m_{r_2}$ を M_b とまとめて表す。

$$\left. \begin{aligned}
M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\
J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 &= A e_1 - m_1 r_1 \ddot{x} \cos \phi_1 \\
J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 &= \sigma A e_2 - m_2 r_2 \ddot{x} \cos \phi_2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.16})$$

A1・2 4自由度系

第2章の図4.1に示す2振動子4自由度モデル(4自由度系)の運動方程式を求める。

図4.1において、不釣り合いおもりのそれぞれの位置座標 (x_p, y_p) ($p=1,2$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
x_1 &= x + r_1 \sin \phi_1, \quad y_1 = y - r_1 \cos \phi_1 \\
x_2 &= x + r_2 \sin \phi_2, \quad y_2 = y - r_2 \cos \phi_2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.17})$$

式(A1.17)を時刻 t で微分すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{x} + r_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{y} + r_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \\
\dot{x}_2 &= \dot{x} + r_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2, \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + r_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.18})$$

図4.8における運動エネルギー T は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} J_{r_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{r_2} \dot{\phi}_2^2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.19})$$

式(A1.19)に式(A1.18)を代入して整理すると、

$$T = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} M_{\text{II}} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (M_1 + M_{\text{II}}) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2 \\ & + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 (\dot{x} \cos \phi_1 + \dot{y} \sin \phi_1) + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 (\dot{x} \cos \phi_2 + \dot{y} \sin \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.20})$$

となる。ここで,

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{II}} &\triangleq M_b + m_1 + m_2 \\ J_1 &\triangleq J_{r_1} + m_1 r_1^2, \quad J_2 \triangleq J_{r_2} + m_2 r_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.21})$$

である。

また, ポテンシャルエネルギー U は次式のように表せる。

$$U = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 \quad (\text{A1.22})$$

式(A1.20)および式(A1.22)より,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M_{\text{II}} \dot{x} + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= M_{\text{II}} \ddot{x} + m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) + m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = k_x x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.23})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= (M_1 + M_{\text{II}}) \dot{y} + m_1 r_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + m_2 r_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= (M_1 + M_{\text{II}}) \ddot{y} + m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) + m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = k_y y \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.24})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= J_1 \dot{\phi}_1 + m_1 r_1 (\dot{x} \cos \phi_1 + \dot{y} \sin \phi_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= J_1 \ddot{\phi}_1 + m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 - \dot{x} \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1 + \dot{y} \dot{\phi}_1 \cos \phi_1) \\ \frac{\partial T}{\partial \phi_1} &= m_1 r_1 \dot{\phi}_1 (-\dot{x} \sin \phi_1 + \dot{y} \cos \phi_1) \\ \frac{\partial U}{\partial \phi_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.25})$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= J_2 \dot{\phi}_2 + m_2 r_2 (\dot{x} \cos \phi_2 + \dot{y} \sin \phi_2) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) &= J_2 \ddot{\phi}_2 + m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 - \dot{x} \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2 + \dot{y} \dot{\phi}_2 \cos \phi_2) \\
\frac{\partial T}{\partial \phi_2} &= m_2 r_2 \dot{\phi}_2 (-\dot{x} \sin \phi_2 + \dot{y} \cos \phi_2) \\
\frac{\partial U}{\partial \phi_2} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (A1.26)$$

である。また、非保存力について、仮想仕事の原理よりそれぞれの自由度の一般化力は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
Q_x^{nc} &= -c_x \dot{x}, \quad Q_y^{nc} = -c_y \dot{y} \\
Q_{\phi_1}^{nc} &= A e_1 - B(\dot{\phi}_1 - \dot{\psi}), \quad Q_{\phi_2}^{nc} = \sigma A e_2 - B(\dot{\phi}_2 - \dot{\psi})
\end{aligned} \right\} \quad (A1.27)$$

ここで、

$$A \triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a} \quad (A1.28)$$

であり、 A はモータの電圧とトルクの間の変換係数を、 B はモータの内部減衰を表す。ただし、 $e_1 > 0$, $e_2 > 0$ であり、 $\sigma = 1$ のとき2つのモータは同方向に回転し、 $\sigma = -1$ のとき逆方向に回転する。

よって、式(A1.23)-(A1.27)より4自由度系の運動方程式は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
M_{II} \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) \\
(M_I + M_{II}) \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= -m_1 r_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\
J_1 \ddot{\phi}_1 + B \dot{\phi}_1 &= A e_1 - m_1 r_1 (\ddot{x} \cos \phi_1 + \ddot{y} \sin \phi_1) \\
J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 &= \sigma A e_2 - m_2 r_2 (\ddot{x} \cos \phi_2 + \ddot{y} \sin \phi_2)
\end{aligned} \right\} \quad (A1.29)$$

A1.3 振動搬送機を模した実験装置の解析モデル

第6章の図6.1(b)に示す振動搬送機を模した実験装置の解析モデルの運動方程式を求めらる。

図6.1(b)において、トラフの重心 (x_G, y_G, z_G) 、左側のリンクの重心 (x_L, y_L, z_L) 、右側のリンクの重心 (x_R, y_R, z_R) 、ブラケットの重心 (x_{dp}, y_{dp}, z_{dp}) 、ロッドの重心 (x_{rp}, y_{rp}) 、おもりの重心 (x_{tp}, y_{tp}, z_{tp}) のそれぞれの位置座標 (x_p, y_p, z_p) ($p=1, 2$)は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_G &= L(\cos \psi - \cos \psi_0) \\ y_G &= L(\sin \psi - \sin \psi_0) \\ z_G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.30})$$

$$\left. \begin{aligned} x_L &= x_G - c - \frac{L}{2} \cos \psi = \frac{L}{2} \cos \psi - L \cos \psi_0 - c \\ y_L &= y_G - a - \frac{L}{2} \sin \psi = \frac{L}{2} \sin \psi - L \sin \psi_0 - a \\ z_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.31})$$

$$\left. \begin{aligned} x_R &= x_G + c - \frac{L}{2} \cos \psi = \frac{L}{2} \cos \psi - L \cos \psi_0 + c \\ y_R &= y_G - a - \frac{L}{2} \sin \psi = \frac{L}{2} \sin \psi - L \sin \psi_0 - a \\ z_R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.32})$$

$$\left. \begin{aligned} x_{dp} &= x_R - d_{mp} \sin \psi - h_{mp} \cos \psi = \left(\frac{L}{2} - h_{mp} \right) \cos \psi - d_{mp} \sin \psi - L \cos \psi_0 + c \\ y_{dp} &= y_R + d_{mp} \cos \psi - h_{mp} \sin \psi = d_{mp} \cos \psi + \left(\frac{L}{2} - h_{mp} \right) \sin \psi - L \sin \psi_0 - a \\ z_{dp} &= 0 \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.33})$$

$$\left. \begin{aligned} x_{rp} &= x_G + c + \left(h_p - \frac{L}{2} \right) \cos \psi + (r_{m_p} \cos \phi_p - d_p) \sin \psi \\ &= \left(h_p + \frac{L}{2} \right) \cos \psi + (r_m \cos \phi_p - d_p) \sin \psi - L \cos \psi_0 + c \\ y_{rp} &= y_G - a - (r_{m_p} \cos \phi_p - d_p) \cos \psi + \left(h_p - \frac{L}{2} \right) \sin \psi \\ &= -(r_{m_p} \cos \phi_p - d_p) \cos \psi + \left(h_p + \frac{L}{2} \right) \sin \psi - L \sin \psi_0 - a \\ z_{rp} &= -r_{m_p} \sin \phi_p \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.34})$$

$$\left. \begin{aligned} x_{mp} &= x_G + c + \left(h_p + h_{up} - \frac{L}{2} \right) \cos \psi + (r_p \cos \phi_p - d_p) \sin \psi \\ &= \left(h_p + h_{up} + \frac{L}{2} \right) \cos \psi + (r_p \cos \phi_p - d_p) \sin \psi - L \cos \psi_0 + c \\ y_{mp} &= y_G - a - (r_p \cos \phi_p - d_p) \cos \psi + \left(h_p + h_{up} - \frac{L}{2} \right) \sin \psi \\ &= -(r_p \cos \phi_p - d_p) \cos \psi + \left(h_p + h_{up} + \frac{L}{2} \right) \sin \psi - L \sin \psi_0 - a \\ z_{mp} &= -r_p \sin \phi_p \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.35})$$

式(A1.30)-(A1.35)を時刻 t で微分すると次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= -L\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y}_G &= L\dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{z}_G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.36})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_L &= -\frac{L}{2}\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y}_L &= \frac{L}{2}\dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{z}_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.37})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_R &= -\frac{L}{2}\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y}_R &= \frac{L}{2}\dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{z}_R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.38})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{dp} &= -d_{mp}\dot{\psi} \cos \psi - \left(\frac{L}{2} - h_{mp} \right) \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y}_{dp} &= \left(\frac{L}{2} - h_{mp} \right) \dot{\psi} \cos \psi - d_{mp}\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{z}_{dp} &= 0 \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.39})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{rp} &= (r_{mp} \cos \phi_p - d_p)\dot{\psi} \cos \psi - \left(h_p + \frac{L}{2} \right) \dot{\psi} \sin \psi - r_{mp}\dot{\phi}_p \sin \phi_p \sin \psi \\ \dot{y}_{rp} &= \left(h_p + \frac{L}{2} \right) \dot{\psi} \cos \psi + (r_{mp} \cos \phi_p - d_p)\dot{\psi} \sin \psi + r_{mp}\dot{\phi}_p \sin \phi_p \cos \psi \\ \dot{z}_{rp} &= -r_{mp}\dot{\phi}_p \cos \phi_p \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.40})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{mp} &= (r_p \cos \phi_p - d_p)\dot{\psi} \cos \psi - \left(h_p + h_{up} + \frac{L}{2} \right) \dot{\psi} \sin \psi - r_p\dot{\phi}_p \sin \phi_p \sin \psi \\ \dot{y}_{mp} &= \left(h_p + h_{up} + \frac{L}{2} \right) \dot{\psi} \cos \psi + (r_p \cos \phi_p - d_p)\dot{\psi} \sin \psi + r_p\dot{\phi}_p \sin \phi_p \cos \psi \\ \dot{z}_{mp} &= -r_p\dot{\phi}_p \cos \phi_p \end{aligned} \right\} (p=1,2) \quad (\text{A1.41})$$

図 2.1(b)における運動エネルギー T は次式のように表せる.

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}M_T(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\frac{M_L}{2}(\dot{x}_L^2 + \dot{y}_L^2) + \frac{1}{2}\frac{M_R}{2}(\dot{x}_R^2 + \dot{y}_R^2) \\
& + \frac{1}{2}m_{d1}(\dot{x}_{d1}^2 + \dot{y}_{d1}^2) + \frac{1}{2}m_{d2}(\dot{x}_{d2}^2 + \dot{y}_{d2}^2) \\
& + \frac{1}{2}m_{r1}(\dot{x}_{r1}^2 + \dot{y}_{r1}^2 + \dot{z}_{r1}^2) + \frac{1}{2}m_{r2}(\dot{x}_{r2}^2 + \dot{y}_{r2}^2 + \dot{z}_{r2}^2) \\
& + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{m1}^2 + \dot{y}_{m1}^2 + \dot{z}_{m1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{m2}^2 + \dot{y}_{m2}^2 + \dot{z}_{m2}^2) \\
& + \frac{1}{2}J_l\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_{d1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_{d2}\dot{\psi}^2 \\
& + \frac{1}{2}(J_{m_{r1},l}\cos^2\phi_1 + J_{m_{r1},s}\sin^2\phi_1)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(J_{m_{r2},l}\cos^2\phi_2 + J_{m_{r2},s}\sin^2\phi_2)\dot{\psi}^2 \\
& + \frac{1}{2}J_{m_{r1},\phi_1}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{m_{r2},\phi_2}\dot{\phi}_2^2 \\
& + \frac{1}{2}J_{m_1,\psi}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_{m_2,\psi}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_{m_1,\phi_1}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{m_2,\phi_2}\dot{\phi}_2^2 \\
& + \frac{1}{2}J_{r1}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{r2}\dot{\phi}_2^2
\end{aligned} \tag{A1.42}$$

式(A1.42)に式(A1.36)-(A1.41)を代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}_2^2 \\
& + \frac{1}{2}\left[m_1\left(-2d_1r_1\cos\phi_1 + \frac{r_1^2}{2}\cos 2\phi_1\right) + m_{r1}\left(-2d_1r_{m1}\cos\phi_1 + \frac{r_{m1}^2}{2}\cos 2\phi_1\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r1},l} - J_{m_{r1},s}}{2}\cos 2\phi_1 \right] \dot{\psi}^2 \\
& + \left[m_1\left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2}\right)r_1 + m_{r1}\left(h_1 + \frac{L}{2}\right)r_{m1} \right] \dot{\psi}\dot{\phi}_1 \sin\phi_1 \\
& + \frac{1}{2}\left[m_2\left(-2d_2r_2\cos\phi_2 + \frac{r_2^2}{2}\cos 2\phi_2\right) \right. \\
& \quad \left. + m_{r2}\left(-2d_2r_{m2}\cos\phi_2 + \frac{r_{m2}^2}{2}\cos 2\phi_2\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r2},l} - J_{m_{r2},s}}{2}\cos 2\phi_2 \right] \dot{\psi}^2 \\
& + \left[m_2\left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2}\right)r_2 + m_{r2}\left(h_2 + \frac{L}{2}\right)r_{m2} \right] \dot{\psi}\dot{\phi}_2 \sin\phi_2
\end{aligned} \tag{A1.43}$$

となる。ここで,

$$\left. \begin{aligned}
J &\triangleq M_T L^2 + \frac{1}{4} M_l L^2 + m_{d1} \left[d_{m1}^2 + \left(\frac{L}{2} - h_{m1} \right)^2 \right] + m_{d2} \left[d_{m2}^2 + \left(\frac{L}{2} - h_{m2} \right)^2 \right] \\
&\quad + m_{r1} \left[\left(h_1 + \frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{r_{m1}^2}{2} + d_1^2 \right) \right] + m_1 \left[\left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{r_1^2}{2} + d_1^2 \right) \right] \\
&\quad + m_{r2} \left[\left(h_2 + \frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{r_{m2}^2}{2} + d_2^2 \right) \right] + m_2 \left[\left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{r_2^2}{2} + d_2^2 \right) \right] \\
&\quad + J_l + J_{d1} + J_{d2} + J_{m_1, \psi} + J_{m_2, \psi} + \frac{1}{2} J_{m_{r1}, l} + \frac{1}{2} J_{m_{r1}, s} + \frac{1}{2} J_{m_{r2}, l} + \frac{1}{2} J_{m_{r2}, s} \\
J_1 &\triangleq J_{r1} + J_{m_{r1}, \phi_1} + J_{m_1, \phi_1} + m_{r1} r_{m1}^2 + m_1 r_1^2 \\
J_2 &\triangleq J_{r2} + J_{m_{r2}, \phi_2} + J_{m_2, \phi_2} + m_{r2} r_{m2}^2 + m_2 r_2^2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.44})$$

である。

また、ポテンシャルエネルギー U は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} k \left[\sqrt{\Delta x^2 + (l_0 + \Delta y)^2} - l_0 \right]^2 \\
&\quad + M_T g (L \sin \psi + a) + M_l g \frac{L}{2} \sin \psi \\
&\quad + m_{d1} g \left[d_{m1} \cos \psi + \left(\frac{L}{2} - h_{m1} \right) \sin \psi \right] \\
&\quad + m_{d2} g \left[d_{m2} \cos \psi + \left(\frac{L}{2} - h_{m2} \right) \sin \psi \right] \\
&\quad + m_{r1} g \left[-(r_{m1} \cos \phi_1 - d_1) \cos \psi + \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) \sin \psi \right] \\
&\quad + m_{r2} g \left[-(r_{m2} \cos \phi_2 - d_2) \cos \psi + \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) \sin \psi \right] \\
&\quad + m_1 g \left[-(r_1 \cos \phi_1 - d_1) \cos \psi + \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) \sin \psi \right] \\
&\quad + m_2 g \left[-(r_2 \cos \phi_2 - d_2) \cos \psi + \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) \sin \psi \right]
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.45})$$

ここで、 ψ について、ばねの自然長 l_0 からの水平方向（図 6.2 の右方向正）および鉛直方向の伸び（図 6.2 の下方向正）を Δx , Δy とすると、

$$\Delta x \triangleq x_0 - L(1 - \cos \psi), \quad \Delta y \triangleq y_0 - L \sin \psi \quad (\text{A1.46})$$

である。

式(A1.43), (A1.45)より、

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J\dot{\psi} + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \\
& + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\
& + \left[m_1 \left(-2d_1 r_1 \cos \phi_1 + \frac{r_1^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) + m_{r1} \left(-2d_1 r_{m1} \cos \phi_1 + \frac{r_{m1}^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}}}{2} \cos 2\phi_1 \right] \dot{\psi} \\
& + \left[m_2 \left(-2d_2 r_2 \cos \phi_2 + \frac{r_2^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) + m_{r2} \left(-2d_2 r_{m2} \cos \phi_2 + \frac{r_{m2}^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}}}{2} \cos 2\phi_2 \right] \dot{\psi}
\end{aligned} \right\} \quad (A1.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = J\ddot{\psi} + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) \\
& + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\
& + \left[m_1 \left(-2d_1 r_1 \cos \phi_1 + \frac{r_1^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) + m_{r1} \left(-2d_1 r_{m1} \cos \phi_1 + \frac{r_{m1}^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}}}{2} \cos 2\phi_1 \right] \ddot{\psi} \\
& + \left[m_2 \left(-2d_2 r_2 \cos \phi_2 + \frac{r_2^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) + m_{r2} \left(-2d_2 r_{m2} \cos \phi_2 + \frac{r_{m2}^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}}}{2} \cos 2\phi_2 \right] \ddot{\psi} \\
& - 2\dot{\psi} \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \left[m_1 r_1 (r_1 \cos \phi_1 - d_1) + m_{r1} r_{m1} (r_{m1} \cos \phi_1 - d_1) \right. \\
& \quad \left. + (J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}}) \cos \phi_1 \right] \\
& - 2\dot{\psi} \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \left[m_2 r_2 (r_2 \cos \phi_2 - d_2) + m_{r2} r_{m2} (r_{m2} \cos \phi_2 - d_2) \right. \\
& \quad \left. + (J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}}) \cos \phi_2 \right]
\end{aligned} \right\} \quad (A1.48)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad (A1.49)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \psi} = & -F_x(\psi)L \sin \psi - F_y(\psi)L \cos \psi + \left(M_T + \frac{M_l}{2}\right)gL \cos \psi \\
& + m_{d1} \left(\frac{L}{2} - h_{m1}\right) g \cos \psi - m_{d1} d_{m1} g \sin \psi \\
& + m_{d2} \left(\frac{L}{2} - h_{m2}\right) g \cos \psi - m_{d2} d_{m2} g \sin \psi \\
& + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2}\right) + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2}\right) \right] g \cos \psi \\
& + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2}\right) + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2}\right) \right] g \cos \psi \\
& + [m_1(r_1 \cos \phi_1 - d_1) + m_{r1}(r_{m1} \cos \phi_1 - d_1)] g \sin \psi \\
& + [m_2(r_2 \cos \phi_2 - d_2) + m_{r2}(r_{m2} \cos \phi_2 - d_2)] g \sin \psi
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.50})$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}
F_x(\psi) & \triangleq \frac{\partial U}{\partial(\Delta x)} = k\Delta x \left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{\Delta x^2 + (l_0 + \Delta y)^2}} \right] \\
& = k[x_0 - L(1 - \cos \psi)] \left\{ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{[x_0 - L(1 - \cos \psi)]^2 + (l_0 + y_0 - L \sin \psi)^2}} \right\} \\
F_y(\psi) & \triangleq \frac{\partial U}{\partial(\Delta y)} = k(l_0 + \Delta y) \left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{\Delta x^2 + (l_0 + \Delta y)^2}} \right] \\
& = k(l_0 + y_0 - L \sin \psi) \left\{ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{[x_0 - L(1 - \cos \psi)]^2 + (l_0 + y_0 - L \sin \psi)^2}} \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.51})$$

である。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= J_1 \dot{\phi}_1 + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] \dot{\psi} \sin \phi_1 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= J_1 \ddot{\phi}_1 + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] (\ddot{\psi} \sin \phi_1 + \dot{\psi} \dot{\phi}_1 \cos \phi_1) \\
\frac{\partial T}{\partial \phi_1} &= \left[-m_1 r_1 \sin \phi_1 (r_1 \cos \phi_1 - d_1) - m_{r1} r_{m1} \sin \phi_1 (r_{m1} \cos \phi_1 - d_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{J_{m_{r1},l} - J_{m_{r1},s}}{2} \sin 2\phi_1 \right] \dot{\psi}^2 \\
&\quad + \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] \dot{\psi} \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \\
\frac{\partial U}{\partial \phi_1} &= (m_1 r_1 + m_{r1} r_{m1}) g \sin \phi_1 \cos \psi
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.52})$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= J_2 \dot{\phi}_2 + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] \dot{\psi} \sin \phi_2 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) &= J_2 \ddot{\phi}_2 \\
&\quad + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] (\ddot{\psi} \sin \phi_2 + \dot{\psi} \dot{\phi}_2 \cos \phi_2) \\
\frac{\partial T}{\partial \phi_2} &= \left[-m_2 r_2 \sin \phi_2 (r_2 \cos \phi_2 - d_2) - m_{r2} r_{m2} \sin \phi_2 (r_{m2} \cos \phi_2 - d_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{J_{m_{r2},l} - J_{m_{r2},s}}{2} \sin 2\phi_2 \right] \dot{\psi}^2 \\
&\quad + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] \dot{\psi} \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \\
\frac{\partial U}{\partial \phi_2} &= (m_2 r_2 + m_{r2} r_{m2}) g \sin \phi_2 \cos \psi
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.53})$$

である。また、非保存力について、仮想仕事の原理よりそれぞれの自由度の一般化力は次式のように表せる。

$$Q_{\dot{\psi}}^{nc} = -c_{\dot{\psi}} \dot{\psi}, \quad Q_{\phi_1}^{nc} = A e_1 - B \dot{\phi}_1 - T_{c,1}, \quad Q_{\phi_2}^{nc} = A e_2 - B \dot{\phi}_2 - T_{c,2} \quad (\text{A1.54})$$

ここで、

$$A \triangleq \frac{K_t}{r_a}, \quad B \triangleq \frac{K_t K_E}{r_a} \quad (\text{A1.55})$$

である。

よって、式(A1.48)-(A1.50), 式(A1.52)-(A1.54)より実験装置の解析モデルの運動方程式は次式のように表せる。

$$\begin{aligned}
& J\ddot{\psi} + c_\psi\dot{\psi} - F_x(\psi)L\sin\psi - F_y(\psi)L\cos\psi \\
& = -\ddot{\psi} \left[m_1 \left(-2d_1r_1\cos\phi_1 + \frac{r_1^2}{2}\cos 2\phi_1 \right) + m_{r1} \left(-2d_1r_{m1}\cos\phi_1 + \frac{r_{m1}^2}{2}\cos 2\phi_1 \right) \right. \\
& \quad + m_2 \left(-2d_2r_2\cos\phi_2 + \frac{r_2^2}{2}\cos 2\phi_2 \right) + m_{r2} \left(-2d_2r_{m2}\cos\phi_2 + \frac{r_{m2}^2}{2}\cos 2\phi_2 \right) \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}}}{2}\cos 2\phi_1 + \frac{J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}}}{2}\cos 2\phi_2 \right] \\
& \quad + 2\dot{\psi}\dot{\phi}_1\sin\phi_1 \left[m_1r_1(r_1\cos\phi_1 - d_1) + m_{r1}r_{m1}(r_{m1}\cos\phi_1 - d_1) \right. \\
& \quad \quad \left. + (J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}})\cos\phi_1 \right] \\
& \quad + 2\dot{\psi}\dot{\phi}_2\sin\phi_2 \left[m_2r_2(r_2\cos\phi_2 - d_2) + m_{r2}r_{m2}(r_{m2}\cos\phi_2 - d_2) \right. \\
& \quad \quad \left. + (J_{m_{r2,l}} - J_{m_{r2,s}})\cos\phi_2 \right] \\
& \quad - \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] (\ddot{\phi}_1\sin\phi_1 + \dot{\phi}_1^2\cos\phi_1) \\
& \quad - \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] (\ddot{\phi}_2\sin\phi_2 + \dot{\phi}_2^2\cos\phi_2) \\
& \quad - (M_b + \frac{M_l}{2})gL\cos\psi \\
& \quad - \left\{ \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) \right] \right\} g\cos\psi \\
& \quad - [m_1(r_1\cos\phi_1 - d_1) + m_{r1}(r_{m1}\cos\phi_1 - d_1)]g\sin\psi \\
& \quad - [m_2(r_2\cos\phi_2 - d_2) + m_{r2}(r_{m2}\cos\phi_2 - d_2)]g\sin\psi \\
& \quad - m_{d1} \left(\frac{L}{2} - h_{m1} \right) g\cos\psi + m_{d1}d_{m1}g\sin\psi \\
& \quad - m_{d2} \left(\frac{L}{2} - h_{m2} \right) g\cos\psi + m_{d2}d_{m2}g\sin\psi
\end{aligned} \tag{A1.56}$$

$$\begin{aligned}
& J_1\ddot{\phi}_1 + B\dot{\phi}_1 \\
& = A e_1 - T_{c,1} - \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] \ddot{\psi}\sin\phi_1 \\
& \quad - m_1r_1\dot{\psi}^2\sin\phi_1(r_1\cos\phi_1 - d_1) - m_{r1}r_{m1}\dot{\psi}^2\sin\phi_1(r_{m1}\cos\phi_1 - d_1) \\
& \quad - (J_{m_{r1,l}} - J_{m_{r1,s}})\dot{\psi}^2\cos\phi_1\sin\phi_1 - (m_1r_1 + m_{r1}r_{m1})g\sin\phi_1\cos\psi
\end{aligned} \tag{A1.57}$$

$$\left. \begin{aligned}
& J_2 \ddot{\phi}_2 + B \dot{\phi}_2 \\
& = A e_2 - T_{c,2} - \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] \ddot{\psi} \sin \phi_2 \\
& - m_2 r_2 \dot{\psi}^2 \sin \phi_2 (r_2 \cos \phi_2 - d_2) - m_{r2} r_{m2} \dot{\psi}^2 \sin \phi_2 (r_{m2} \cos \phi_2 - d_2) \\
& - (J_{m_{r2},l} - J_{m_{r2},s}) \dot{\psi}^2 \cos \phi_2 \sin \phi_2 - (m_2 r_2 + m_{r2} r_{m2}) g \sin \phi_2 \cos \psi
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.58})$$

なお、静的平衡状態については次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned}
& F_x(\psi_0) L \sin \psi_0 + F_y(\psi_0) L \cos \psi_0 \\
& = \left\{ \left(M_b + \frac{M_l}{2} \right) L + 2 \left[m_d \left(\frac{L}{2} - h_m \right) + m \left(\frac{L}{2} + h + h_u \right) + m_r \left(\frac{L}{2} + h \right) \right] \right\} g \cos \psi_0 \\
& - 2 \left[m_d d_m + m(r+d) + m_r(r_m+d) \right] g \sin \psi_0
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.59})$$

式(A1.59)を式(A1.56)に代入することで、静的平衡状態を考慮した ψ に関する式が得られる.

$$\begin{aligned}
& J\ddot{\psi} + c_\psi\dot{\psi} - [F_y(\psi) - F_y(\psi_0)]L \cos \psi - F_x(\psi)L \sin \psi + F_x(\psi_0)L \tan \psi_0 \cos \psi \\
& = -\ddot{\psi} \left[m_1 \left(-2d_1r_1 \cos \phi_1 + \frac{r_1^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) + m_{r1} \left(-2d_1r_{m1} \cos \phi_1 + \frac{r_{m1}^2}{2} \cos 2\phi_1 \right) \right. \\
& \quad + m_2 \left(-2d_2r_2 \cos \phi_2 + \frac{r_2^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \\
& \quad + m_{r2} \left(-2d_2r_{m2} \cos \phi_2 + \frac{r_{m2}^2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \\
& \quad \left. + \frac{J_{m_{r1},l} - J_{m_{r1},s}}{2} \cos 2\phi_1 + \frac{J_{m_{r2},l} - J_{m_{r2},s}}{2} \cos 2\phi_2 \right] \\
& \quad + 2\dot{\psi}\dot{\phi}_1 \sin \phi_1 [m_1r_1(r_1 \cos \phi_1 - d_1) + m_{r1}r_{m1}(r_{m1} \cos \phi_1 - d_1) \\
& \quad \quad \quad + (J_{m_{r1},l} - J_{m_{r1},s}) \cos \phi_1] \\
& \quad + 2\dot{\psi}\dot{\phi}_2 \sin \phi_2 [m_2r_2(r_2 \cos \phi_2 - d_2) + m_{r2}r_{m2}(r_{m2} \cos \phi_2 - d_2) \\
& \quad \quad \quad + (J_{m_{r2},l} - J_{m_{r2},s}) \cos \phi_2] \\
& \quad - \left[m_1 \left(h_1 + h_{u1} + \frac{L}{2} \right) r_1 + m_{r1} \left(h_1 + \frac{L}{2} \right) r_{m1} \right] (\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1) \\
& \quad - \left[m_2 \left(h_2 + h_{u2} + \frac{L}{2} \right) r_2 + m_{r2} \left(h_2 + \frac{L}{2} \right) r_{m2} \right] (\ddot{\phi}_2 \sin \phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \phi_2) \\
& \quad - \{ [m_{d1}d_{m1} + m_1(r_1 + d_1) + m_{r1}(r_{m1} + d_1)] \\
& \quad \quad + [m_{d2}d_{m2} + m_2(r_2 + d_2) + m_{r2}(r_{m2} + d_2)] \} g \tan \psi_0 \cos \psi \\
& \quad - \{ [m_1(r_1 \cos \phi_1 - d_1) + m_{r1}(r_{m1} \cos \phi_1 - d_1)] \\
& \quad \quad + [m_2(r_2 \cos \phi_2 - d_2) + m_{r2}(r_{m2} \cos \phi_2 - d_2)] \\
& \quad \quad - (m_{d1}d_{m1} + m_{d2}d_{m2}) \} g \sin \psi
\end{aligned} \tag{A1.60}$$

付録 A2 第 2 章の数式の詳細

式(2.6)の詳細は次式に示すとおりである.

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta E_\xi &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} (\nu^2 \xi'' + \xi) \xi' d\tau = \left[\frac{1}{2} \nu^2 \xi'^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \\
 \Delta E_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' \phi_1' d\tau = \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \nu^2 \phi_1'^2 \right]_{\phi_1'(\tau_0)}^{\phi_1'(\tau_0+2\pi)} \\
 \Delta E_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' \phi_2' d\tau = \left[\frac{1}{2} \alpha_2 \nu^2 \phi_2'^2 \right]_{\phi_2'(\tau_0)}^{\phi_2'(\tau_0+2\pi)} \\
 \Delta D_\xi &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta \nu \xi'^2 d\tau, \quad \Delta D_{\phi_1} \triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu \phi_1'^2 d\tau, \quad \Delta D_{\phi_2} \triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu \phi_2'^2 d\tau \\
 \Delta R_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \varepsilon_1 \phi_1' d\tau = \int_{\phi_1(\tau_0)}^{\phi_1(\tau_0+2\pi)} \varepsilon_1 d\phi_1 = 2\pi \varepsilon_1 \\
 \Delta R_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \sigma \varepsilon_2 \phi_2' d\tau = \int_{\phi_2(\tau_0)}^{\phi_2(\tau_0+2\pi)} \sigma \varepsilon_2 d\phi_2 = 2\pi \sigma \varepsilon_2 \\
 \Delta T_{\xi \phi_1} &\triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \xi' d\tau \\
 \Delta T_{\xi \phi_2} &\triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \xi' d\tau \\
 \Delta T_{\phi_1 \xi} &\triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 \xi'' \cos \phi_1 \cdot \phi_1' d\tau, \quad \Delta T_{\phi_2 \xi} \triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 \xi'' \cos \phi_2 \cdot \phi_2' d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.1})$$

付録 A3 基礎支持の減衰が散逸エネルギーの条件を満たす領域に 与える影響

本節では、図 3.6(a)および図 3.6(b)のように、基礎支持の減衰が増加すると $\nu=1$ (領域 R_2) において散逸エネルギーの条件を満たす無次元電圧 ε_1 の範囲が狭くなる一方で、 $\nu \gg 1$ (領域 R_1) においてはその範囲が広がる理由について考える。

式(A2.1)における散逸エネルギー ΔD_ζ の式に式(2.15)を代入すると、 θ の変化に対する ΔD_ζ の最大値 $\Delta D_{\zeta, \max}$ は次式のように表せる。

$$\Delta D_{\zeta, \max} = \frac{2\pi\zeta\nu^5(\mu_1 + \mu_2)^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \quad (\text{A3.1})$$

基礎支持の減衰比 ζ を 0.025, 0.05, 0.075, 0.1 の 4 通りに設定した場合について、図 A3.1 に $\Delta D_{\zeta, \max}$ を示す。減衰比 ζ 以外のパラメータは図 2.2 および図 2.5 と同一である。図 A3.1 より、 $\Delta D_{\zeta, \max}$ は減衰比 ζ が大きいほど $\nu=1$ の近傍では小さいのに対して、 ν が 1 から離れるに伴いこの傾向は逆転する。 $\Delta D_{\zeta, \max}$ の増減とともに励振エネルギーを散逸させることができる無次元電圧 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ の範囲も増減するため、図 3.6 の薄黄色の領域に対する無次元電圧 ε_1 の範囲は減衰比 ζ が増加すると $\nu=1$ の近傍では狭くなり、 $\nu \gg 1$ では広がる。

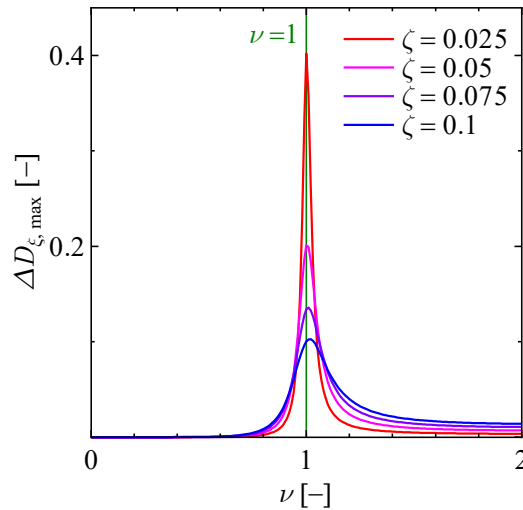


Fig. A3.1 Effect of damping ratio ζ on maximum dissipated energy $\Delta D_{\zeta, \max}$

付録 A4 提案手法で用いる式の導出

本章では、第4章に示した2振動子4自由度モデル（4自由度系）、2振動子5自由度モデル（5自由度系）および第6章に示した実験装置の解析モデルについて、自己同期現象が発生するためにエネルギーが満たすべき2本の条件式の導出過程を示し、近似解の計算方法および安定判別に必要な式の導出を行う。2本の条件式を満たすパラメータの関係式についてはそれぞれの章を参照されたい。

A4・1 4自由度系

本節では、4.1節の図4.1に示した4自由度系に関する式の導出を行う。

A4・1・1 エネルギーに関する条件式の導出

以下の議論において、 ξ , η , ϕ_1 および ϕ_2 は同期解を表すものとする。このとき、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \xi(\tau+2\pi) &= \xi(\tau), \quad \eta(\tau+2\pi) = \eta(\tau) \\ \phi_1(\tau+2\pi) &= \phi_1(\tau) + 2\pi, \quad \phi_2(\tau+2\pi) = \phi_2(\tau) + 2\pi\sigma \\ \xi'(\tau+2\pi) &= \xi'(\tau), \quad \eta'(\tau+2\pi) = \eta'(\tau) \\ \phi_1'(\tau+2\pi) &= \phi_1'(\tau), \quad \phi_2'(\tau+2\pi) = \phi_2'(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.1})$$

式(4.3)の第1式、第2式、第3式および第4式の両辺にそれぞれ ξ' , η' , ϕ_1' および ϕ_2' を乗じた上で、 τ について τ_0 から $\tau_0 + 2\pi$ まで積分し(A4.1)を考慮すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_\eta &= \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} + \Delta T_{\phi_1\eta} \\ \Delta D_{\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} + \Delta T_{\phi_2\eta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.2})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_\xi &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta_x \nu_x \nu \xi'^2 d\tau, & \Delta D_\eta &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2(1+\mu)\zeta_y \nu_y \nu \eta'^2 d\tau \\
\Delta D_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu \phi_1'^2 d\tau, & \Delta D_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu \phi_2'^2 d\tau \\
\Delta R_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \varepsilon_1 \phi_1' d\tau = \int_{\phi_1(\tau_0)}^{\phi_1(\tau_0+2\pi)} \varepsilon_1 d\phi_1 = 2\pi\varepsilon_1 \\
\Delta R_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \sigma \varepsilon_2 \phi_2' d\tau = \int_{\phi_2(\tau_0)}^{\phi_2(\tau_0+2\pi)} \sigma \varepsilon_2 d\phi_2 = 2\pi\varepsilon_2 \\
\Delta T_{\xi\phi_1} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \xi' d\tau \\
\Delta T_{\xi\phi_2} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \xi' d\tau \\
\Delta T_{\eta\phi_1} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \eta' d\tau \\
\Delta T_{\eta\phi_2} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \eta' d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\xi} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 \xi'' \cos \phi_1 \cdot \phi_1' d\tau, & \Delta T_{\phi_1\eta} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 \eta'' \sin \phi_1 \cdot \phi_1' d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\xi} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 \xi'' \cos \phi_2 \cdot \phi_2' d\tau, & \Delta T_{\phi_2\eta} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 \eta'' \sin \phi_2 \cdot \phi_2' d\tau
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.3})$$

である．式(A4.3)の各項の物理的意味については4.1.2.1目を参照されたい．

ブロックと各モータの間のエネルギー-移動量について，式(A4.1)および式(A4.3)より次式が成立する．

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} &= -\left[\mu_1 \nu^2 \xi' \phi_1' \cos \phi_1 \right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\eta} &= -\left[\mu_1 \nu^2 \eta' \phi_1' \sin \phi_1 \right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} &= -\left[\mu_2 \nu^2 \xi' \phi_2' \cos \phi_2 \right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\eta} &= -\left[\mu_2 \nu^2 \eta' \phi_2' \sin \phi_2 \right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.4})$$

したがって，

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\xi\phi_1} &= -\Delta T_{\phi_1\xi}, & \Delta T_{\eta\phi_1} &= -\Delta T_{\phi_1\eta} \\
\Delta T_{\xi\phi_2} &= -\Delta T_{\phi_2\xi}, & \Delta T_{\eta\phi_2} &= -\Delta T_{\phi_2\eta}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.5})$$

となる．すなわち，同期状態においてモータ p ($p=1,2$) からブロックへと，ブロックからモータ p へと流れるエネルギー-移動量は互いに逆符号の関係にある．

式(A4.2)に式(A4.5)を代入して整理すると，ブロックおよび各モータそれぞれの1周期あたりのエネルギー-積分は，

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_\eta &= \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{\phi_2} + \Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.6})$$

となる。

以上より、システム全体の1周期あたりのエネルギー積分は、式(A4.6)の4式の和を取ることによって、次式のように求められる。

$$\Delta D_\xi + \Delta D_\eta + \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (\text{A4.7})$$

一方、式(A4.6)の第3式から第4式を辺々引いて整理すると、次式が求められる。

$$(\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1}) - (\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2}) = (\Delta R_{\phi_1} - \Delta D_{\phi_1}) - (\Delta R_{\phi_2} - \Delta D_{\phi_2}) \quad (\text{A4.8})$$

A4・1・2 近似解の導出

式(4.3)の厳密解を求めて式(A4.7)および式(A4.8)における各項を解析的に求めることは困難である。そこで、同期状態において、無次元時間 τ に関する周期関数であるモータ1とモータ2の角速度 ϕ_1' 、 ϕ_2' の変動量が一定成分に比べて小さいものと仮定し、2つのモータの角変位 ϕ_1 および ϕ_2 に関して次のような近似を導入する(式(2.13)の再掲)。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \tau \\ \phi_2 &= \sigma(\tau + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.9})$$

ここに、 θ は ϕ_1 と ϕ_2 との間の位相差を表す未知の定数である。さらに、同期解の角速度 ω も未知であることから、式(4.4)より同期振動数比 ν も未知の定数となる。

式(A4.9)の近似を導入すると、ブロックの運動方程式(式(4.3)の第1式および第2式)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi &= \nu^2 [\mu_1 \sin \tau + \sigma \mu_2 \sin(\tau + \theta)] \\ (1 + \mu) \nu^2 \eta'' + 2(1 + \mu) \zeta_y \nu_y \nu \eta' + (1 + \mu) \nu_y^2 \eta &= -\nu^2 [\mu_1 \cos \tau + \mu_2 \cos(\tau + \theta)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.10})$$

式(A4.10)より、ブロックの変位 ξ 、 η の特解(同期解)が次式のように求められる。

$$\left.
\begin{aligned}
\xi &= \xi_{c1} \cos \tau + \xi_{s1} \sin \tau + \sigma [\xi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \xi_{s2} \sin(\tau + \theta)] \\
\eta &= \eta_{c1} \cos \tau + \eta_{s1} \sin \tau + \eta_{c2} \cos(\tau + \theta) + \eta_{s2} \sin(\tau + \theta) \\
\xi_{c1} &\triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, \quad \xi_{s1} \triangleq \frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\
\xi_{c2} &\triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_x \nu_x \nu^3}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, \quad \xi_{s2} \triangleq \frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\
\eta_{c1} &\triangleq -\frac{\mu_1 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]}, \quad \eta_{s1} \triangleq -\frac{2\mu_1 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \\
\eta_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2 \nu^2 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]}, \quad \eta_{s2} \triangleq -\frac{2\mu_2 \zeta_y \nu_y \nu^3}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]}
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.11})$$

式(A4.3)および式(A4.11)より, 式(A4.9)の近似を導入したときの1周期あたりの散逸エネルギーおよびエネルギー移動量は次のように表すことができる.

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2} \\
\Delta D_\eta &= \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_2} \\
\Delta T_{\xi\phi_1} &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta S_{\xi\phi_1}, \quad \Delta T_{\eta\phi_1} = \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta S_{\eta\phi_1} \\
\Delta T_{\xi\phi_2} &= \Delta D_{\xi\phi_2} + \Delta S_{\xi\phi_2}, \quad \Delta T_{\eta\phi_2} = \Delta D_{\eta\phi_2} + \Delta S_{\eta\phi_2}
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.12})$$

ここで,

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta D_{\xi\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi \zeta_x \nu_x \nu^5 (\mu_1^2 + \sigma \mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2}, \quad \Delta D_{\xi\phi_2} \triangleq \frac{2\pi \zeta_x \nu_x \nu^5 (\mu_2^2 + \sigma \mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \\
\Delta D_{\eta\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi \zeta_y \nu_y \nu^5 (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \\
\Delta D_{\eta\phi_2} &\triangleq \frac{2\pi \zeta_y \nu_y \nu^5 (\mu_2^2 + \mu_1 \mu_2 \cos \theta)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \\
\Delta S_{\xi\phi_1} &\triangleq \Delta S_\xi, \quad \Delta S_{\xi\phi_2} \triangleq -\Delta S_\xi, \quad \Delta S_\xi \triangleq -\frac{\sigma \pi \mu_1 \mu_2 \nu^4 (\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} \sin \theta \\
\Delta S_{\eta\phi_1} &\triangleq \Delta S_\eta, \quad \Delta S_{\eta\phi_2} \triangleq -\Delta S_\eta, \quad \Delta S_\eta \triangleq -\frac{\pi \mu_1 \mu_2 \nu^4 (\nu_y^2 - \nu^2)}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \sin \theta \\
\Delta S &\triangleq \Delta S_\xi + \Delta S_\eta \\
&= -\pi \mu_1 \mu_2 \nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1 + \mu) [(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2]} \right\} \sin \theta
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.13})$$

である.

このように、2つのモータからブロックへのエネルギー移動量 $\Delta T_{\xi\phi_1}$, $\Delta T_{\xi\phi_2}$ は、それぞれブロックの散逸エネルギー ΔD_ξ を補填するためのエネルギー $\Delta D_{\xi\phi_1}$, $\Delta D_{\xi\phi_2}$ と、ブロックを介してモータ間でやり取りされ、自己同期現象が発生するためのエネルギーバランスに寄与する同期エネルギー $\Delta S_{\xi\phi_1}$, $\Delta S_{\xi\phi_2}$ の2種類からなることがわかる。 η に関するエネルギーについても同様に説明できる。

式(A4.12)および式(A4.13)を考慮すれば、式(A4.6)の同期状態における各種のエネルギーが満たすべき条件は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_\eta &= \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta S &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{\phi_2} + \Delta D_{\xi\phi_2} + \Delta D_{\eta\phi_2} - \Delta S &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.14})$$

ここで、

$$\Delta D_{\phi_1} = \Delta D_{\phi_2} = 2\pi\beta\nu \quad (\text{A4.15})$$

である。

式(A4.14)の4式の和を取ると式(A4.7)に対応する式が得られ、式(A4.3)、式(A4.13)および式(A4.15)より次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{2\pi\zeta_x\nu_x\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{2\pi\zeta_y\nu_y\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} + 4\pi\beta\nu \\ &= 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.16})$$

これが、自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。

一方、式(A4.14)の第3式から第4式の差をとると式(A4.8)に対応する式が得られ、式(A4.3)、式(A4.13)および式(A4.15)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} &2\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ &- 2\pi\mu_1\mu_2\nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \sin\theta \\ &= 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.17})$$

となり、これが自己同期発生時の同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。

以上より，式(A4.16)および式(A4.17)の 2 本の式が，式(A4.9)および式(A4.11)の ϕ_1, ϕ_2 および ξ, η が同期状態を表す近似解であるためのエネルギー的な条件式となる。

次に， ν を設定値として ε_1 および θ について解くことを考える．そのために，式(A4.16) および式(A4.17)をそれぞれ次のように変形する．

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon_1 - d_0}{d_c}, \quad \sin\theta = \frac{\varepsilon_1 - s_0}{s_s} \quad (\text{A4.18})$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} d_c &\triangleq 2\mu_1\mu_2\nu^5 \left\{ \sigma \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ d_0 &\triangleq (\mu_1^2 + \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ &\quad + 2\beta\nu - \varepsilon_2 \\ s_s &\triangleq -\mu_1\mu_2\nu^4 \left\{ \sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} \\ s_0 &\triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left\{ \frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(1+\mu)[(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2]} \right\} + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.19})$$

である．式(A4.18)を $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入して θ を消去すると ε_1 に関する 2 次方程式が得られる．これを解くと

$$\varepsilon_1 = \frac{d_c^2 s_0 + d_0 s_s^2 \pm d_c s_s \sqrt{D}}{d_c^2 + s_s^2} \quad (\text{A4.20})$$

となる．ここに，

$$D \triangleq d_c^2 + s_s^2 - (d_0 - s_0)^2 \quad (\text{A4.21})$$

であり， $D \geq 0$ が成り立つとき，式(A4.16)および式(A4.17)を満たす ε_1 は式(A4.20)で与えられる．さらに，得られた ε_1 と式(A4.18)から θ が求められる．

A4・1・3 近似解の安定判別

自己同期現象の特性を十分に把握するためには，安定判別を行って同期解の安定性をも明らかにする必要がある．解の安定判別に必要な式(4.3)の変分方程式は以下のように導出される．

$$\begin{aligned}
 & \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & (1+\mu) \nu^2 \delta \eta'' + 2(1+\mu) \zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + (1+\mu) \nu_y^2 \delta \eta \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \quad -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
 & \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
 &= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 + (-\xi'' \sin \phi_1 + \eta'' \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
 & \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
 &= -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + (-\xi'' \sin \phi_2 + \eta'' \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right]
 \end{aligned} \tag{A4.22}$$

式(A4.22)に対して式(A4.9)のような一定角速度近似を導入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
 & \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
 &= -\mu_1 \nu^2 (\delta \phi_1'' \cos \tau - 2\delta \phi_1' \sin \tau - \delta \phi_1 \cos \tau) \\
 & \quad -\mu_2 \nu^2 [\delta \phi_2'' \cos(\tau + \theta) - 2\delta \phi_2' \sin(\tau + \theta) - \delta \phi_2 \cos(\tau + \theta)] \\
 & (1+\mu) \nu^2 \delta \eta'' + 2(1+\mu) \zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + (1+\mu) \nu_y^2 \delta \eta \\
 &= -\mu_1 \nu^2 (\delta \phi_1'' \sin \tau + 2\delta \phi_1' \cos \tau - \delta \phi_1 \sin \tau) \\
 & \quad -\mu_2 \nu^2 [\delta \phi_2'' \sin(\tau + \theta) + 2\delta \phi_2' \cos(\tau + \theta) - \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2] \\
 & \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
 &= -\mu_1 \nu^2 [\delta \xi'' \cos \tau + \delta \eta'' \sin \tau + (-\xi'' \sin \tau + \eta'' \cos \tau) \delta \phi_1] \\
 & \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
 &= -\mu_2 \nu^2 \{ \delta \xi'' \cos(\tau + \theta) + \delta \eta'' \sin(\tau + \theta) + [-\xi'' \sin(\tau + \theta) + \eta'' \cos(\tau + \theta)] \delta \phi_2 \}
 \end{aligned} \tag{A4.23}$$

式(A4.23)の解析にあたり，微小変分 $\delta \xi$ および $\delta \eta$ を次式のように仮定する．

$$\left. \begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\xi_c \cos\tau + \delta\xi_s \sin\tau \\
\delta\xi' &= \delta\xi'_c \cos\tau + \delta\xi'_s \sin\tau - \delta\xi_c \sin\tau + \delta\xi_s \cos\tau \\
\delta\xi'' &= \delta\xi''_c \cos\tau + \delta\xi''_s \sin\tau - 2\delta\xi'_c \sin\tau + 2\delta\xi'_s \cos\tau - \delta\xi_c \cos\tau - \delta\xi_s \sin\tau \\
\delta\eta &= \delta\eta_c \cos\tau + \delta\eta_s \sin\tau \\
\delta\eta' &= \delta\eta'_c \cos\tau + \delta\eta'_s \sin\tau - \delta\eta_c \sin\tau + \delta\eta_s \cos\tau \\
\delta\eta'' &= \delta\eta''_c \cos\tau + \delta\eta''_s \sin\tau - 2\delta\eta'_c \sin\tau + 2\delta\eta'_s \cos\tau - \delta\eta_c \cos\tau - \delta\eta_s \sin\tau
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.24})$$

ここに、 $\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c$ および $\delta\eta_s$ は無次元時間 τ の関数である。式(A4.24)を式(A4.23)に代入して調和バランスの原理を適用し、第1式と第2式では $\cos\tau$ および $\sin\tau$ の係数の部分を、第3式と第4式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
&\mathbf{M}\xi'' + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{K}\xi = \mathbf{0} \\
&\xi = (\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c, \delta\eta_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T \\
&\mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_1\nu^2 & \mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & \nu^2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & (1+\mu)\nu^2 & 0 & 0 & \sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & (1+\mu)\nu^2 & \mu_1\nu^2 & \sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ \mu_1\nu^2 & 0 & 0 & \mu_1\nu^2 & 2\alpha_1\nu^2 & 0 \\ \mu_2\nu^2 \cos\theta & -\mu_2\nu^2 \sin\theta & \sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & \sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 0 & 2\alpha_2\nu^2 \end{bmatrix} \\
&\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_x\nu_x\nu & 2\nu^2 & 0 & 0 & 0 & -2\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ -2\nu^2 & 2\zeta_x\nu_x\nu & 0 & 0 & -2\mu_1\nu^2 & -2\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 2(1+\mu)\nu^2 & 2\mu_1\nu^2 & 2\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ 0 & 0 & -2(1+\mu)\nu^2 & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 0 & -2\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 2\mu_1\nu^2 & -2\mu_1\nu^2 & 0 & 2\beta\nu & 0 \\ 2\mu_2\nu^2 \sin\theta & 2\mu_2\nu^2 \cos\theta & -2\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 2\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & 0 & 2\beta\nu \end{bmatrix} \\
&\mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} \nu_x^2 - \nu^2 & 2\zeta_x\nu_x\nu & 0 & 0 & -\mu_1\nu^2 & -\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ -2\zeta_x\nu_x\nu & \nu_x^2 - \nu^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & (1+\mu)(\nu_y^2 - \nu^2) & 2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & 0 & -\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta \\ 0 & 0 & -2(1+\mu)\zeta_y\nu_y\nu & (1+\mu)(\nu_y^2 - \nu^2) & -\mu_1\nu^2 & -\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta \\ -\mu_1\nu^2 & 0 & 0 & -\mu_1\nu^2 & \mu_1\nu^2 k_1 & 0 \\ -\mu_2\nu^2 \cos\theta & \mu_2\nu^2 \sin\theta & -\sigma\mu_2\nu^2 \sin\theta & -\sigma\mu_2\nu^2 \cos\theta & 0 & \mu_2\nu^2 k_2 \end{bmatrix} \\
&k_1 \triangleq \xi_{s1} + \sigma(\xi_{s2} \cos\theta - \xi_{c2} \sin\theta) - \eta_{c1} - \eta_{c2} \cos\theta - \eta_{s2} \sin\theta \\
&k_2 \triangleq \xi_{s2} + \sigma(\xi_{s1} \cos\theta + \xi_{c1} \sin\theta) - \eta_{c2} - \eta_{c1} \cos\theta + \eta_{s1} \sin\theta
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.25})$$

さらに、式(A4.25)を次式のように定数係数の1階常微分方程式に変換する。

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= A\eta \\ \eta &\triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.26})$$

同期解の安定判別は、 A の固有値として得られる特性指数から判別できる。

A4・2 5自由度系

本節では、4.3節の図4.8に示した5自由度系に関する式の導出を行う。

A4・2・1 エネルギーに関する条件式の導出

以下の議論において、 ξ, η, ψ, ϕ_1 および ϕ_2 は同期解を表すものとする。このとき、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \xi(\tau+2\pi) &= \xi(\tau), \quad \eta(\tau+2\pi) = \eta(\tau), \quad \psi(\tau+2\pi) = \psi(\tau) \\ \phi_1(\tau+2\pi) &= \phi_1(\tau) + 2\pi, \quad \phi_2(\tau+2\pi) = \phi_2(\tau) + 2\pi\sigma \\ \xi'(\tau+2\pi) &= \xi'(\tau), \quad \eta'(\tau+2\pi) = \eta'(\tau), \quad \psi'(\tau+2\pi) = \psi'(\tau) \\ \phi_1'(\tau+2\pi) &= \phi_1'(\tau), \quad \phi_2'(\tau+2\pi) = \phi_2'(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.27})$$

式(4.20)の第1式、第2式、第3式、第4式および第5式の両辺にそれぞれ $\xi', \eta', \psi', \phi_1'$ および ϕ_2' を乗じた上で、 τ について τ_0 から $\tau_0+2\pi$ まで積分し式(A4.27)を考慮すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\ \Delta D_\eta &= \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\ \Delta D_\psi &= \Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_2} \\ \Delta D_{\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} + \Delta T_{\phi_1\eta} + \Delta T_{\phi_1\psi} \\ \Delta D_{\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} + \Delta T_{\phi_2\eta} + \Delta T_{\phi_2\psi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.28})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_\xi &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta_x \nu_x \nu \xi'^2 d\tau, & \Delta D_\eta &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta_y \nu_y \nu \eta'^2 d\tau \\
\Delta D_\psi &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} [2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \psi' - \beta \nu (\phi'_1 - \phi'_2)] \psi' d\tau \\
\Delta D_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu (\phi'_1 - \psi') \phi'_1 d\tau, & \Delta D_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta \nu (\phi'_2 - \psi') \phi'_2 d\tau \\
\Delta R_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \varepsilon_1 \phi'_1 d\tau = \int_{\phi_1(\tau_0)}^{\phi_1(\tau_0+2\pi)} \varepsilon_1 d\phi_1 = 2\pi \varepsilon_1 \\
\Delta R_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \sigma \varepsilon_2 \phi'_2 d\tau = \int_{\phi_2(\tau_0)}^{\phi_2(\tau_0+2\pi)} \sigma \varepsilon_2 d\phi_2 = 2\pi \varepsilon_2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.29a})$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\xi\phi_1} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \xi' d\tau \\
\Delta T_{\xi\phi_2} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \xi' d\tau \\
\Delta T_{\eta\phi_1} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \eta' d\tau \\
\Delta T_{\eta\phi_2} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \eta' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \gamma_1 \nu^2 [\phi_1'' \sin(\phi_1 - \psi) + \phi_1'^2 \cos(\phi_1 - \psi)] \psi' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_2} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \gamma_2 \nu^2 [\phi_2'' \sin(\phi_2 - \psi) + \phi_2'^2 \cos(\phi_2 - \psi)] \psi' d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\xi} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 \xi'' \cos \phi_1 \cdot \phi'_1 d\tau, & \Delta T_{\phi_1\eta} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \nu^2 \eta'' \sin \phi_1 \cdot \phi'_1 d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\psi} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1 \gamma_1 \nu^2 [\psi'' \sin(\phi_1 - \psi) - \psi'^2 \cos(\phi_1 - \psi)] \phi'_1 d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\xi} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 \xi'' \cos \phi_2 \cdot \phi'_2 d\tau, & \Delta T_{\phi_2\eta} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \nu^2 \eta'' \sin \phi_2 \cdot \phi'_2 d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\psi} &\triangleq -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2 \gamma_2 \nu^2 [\psi'' \sin(\phi_2 - \psi) - \psi'^2 \cos(\phi_2 - \psi)] \phi'_2 d\tau
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.29b})$$

である。式(A4.29)の各項の物理的意味については4.2.2.1目を参照されたい。

ブロックと各モータの間のエネルギー-移動量について、式(A4.28)および式(A4.29)より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\xi} &= -\left[\mu_1\nu^2\xi'\phi_1'\cos\phi_1\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\xi} &= -\left[\mu_2\nu^2\xi'\phi_2'\cos\phi_2\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\eta} &= -\left[\mu_1\nu^2\eta'\phi_1'\sin\phi_1\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\eta} &= -\left[\mu_2\nu^2\eta'\phi_2'\sin\phi_2\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\psi} &= \left[\mu_1\gamma_1\nu^2\psi'\phi_1'\sin(\phi_1-\psi)\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0 \\
\Delta T_{\psi\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\psi} &= -\left[\mu_2\gamma_2\nu^2\psi'\phi_2'\sin(\phi_2-\psi)\right]_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.30})$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\xi\phi_1} &= -\Delta T_{\phi_1\xi}, & \Delta T_{\xi\phi_2} &= -\Delta T_{\phi_2\xi} \\
\Delta T_{\eta\phi_1} &= -\Delta T_{\phi_1\eta}, & \Delta T_{\eta\phi_2} &= -\Delta T_{\phi_2\eta} \\
\Delta T_{\psi\phi_1} &= -\Delta T_{\phi_1\psi}, & \Delta T_{\psi\phi_2} &= -\Delta T_{\phi_2\psi}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.31})$$

となる.

式(A4.28)に式(A4.31)を代入して整理すると, ブロックおよび各モータそれぞれの1周期あたりのエネルギー積分は,

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_{\xi} &= \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_2} \\
\Delta D_{\eta} &= \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_2} \\
\Delta D_{\psi} &= \Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_2} \\
\Delta D_{\phi_1} + \Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} \\
\Delta D_{\phi_2} + \Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\psi\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.32})$$

となる.

以上より, システム全体の1周期あたりのエネルギー積分は, 式(A4.32)の4式の和を取ることによって, 次式のように求められる.

$$\Delta D_{\xi} + \Delta D_{\eta} + \Delta D_{\psi} + \Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (\text{A4.33})$$

一方, 式(A4.33)の第4式から第5式を辺々引いて整理すると, 次式が求められる.

$$\left. \begin{aligned}
&(\Delta T_{\xi\phi_1} + \Delta T_{\eta\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_1}) - (\Delta T_{\xi\phi_2} + \Delta T_{\eta\phi_2} + \Delta T_{\psi\phi_2}) \\
&= (\Delta R_{\phi_1} - \Delta D_{\phi_1}) - (\Delta R_{\phi_2} - \Delta D_{\phi_2})
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.34})$$

A4・2・2 近似解の導出

式(4.20)の解析解を求めるにあたり，2つのモータに関して式(A4.9)のような一定角速度近似を用いた場合においても，式(4.20)にはブロックの角変位 ψ について非線形項が含まれるため，解析解を求めることは困難である．そこで，ブロックの角変位 ψ が十分に小さい($\psi \approx 0$)ものとして，式(4.20)を次のように ψ について線形化する．

$$\left. \begin{aligned}
 & \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \\
 & \nu^2 \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \eta' + \nu_y^2 \eta = -\mu_1 \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \mu_2 \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \\
 & \nu^2 \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \psi' + \nu_\psi^2 \psi \\
 & = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left[\phi_1'' (\sin \phi_1 - \psi \cos \phi_1) + \phi_1'^2 (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) \right] \\
 & \quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left[\phi_2'' (\sin \phi_2 - \psi \cos \phi_2) + \phi_2'^2 (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) \right] \\
 & \quad - (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + \beta \nu (\phi_1' + \phi_2') \\
 & \alpha_1 \nu^2 \phi_1'' + \beta \nu \phi_1' = \varepsilon_1 - \mu_1 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_1 + \eta'' \sin \phi_1) + \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \psi'' \sin \phi_1 + \beta \nu \psi' \\
 & \alpha_2 \nu^2 \phi_2'' + \beta \nu \phi_2' = \sigma \varepsilon_2 - \mu_2 \nu^2 (\xi'' \cos \phi_2 + \eta'' \sin \phi_2) - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \psi'' \sin \phi_2 + \beta \nu \psi'
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.35})$$

次に，式(A4.9)の近似を導入すると，ブロックの運動方程式（式(4.20)の第1式，第2式および第3式）は次式のようになる．

$$\left. \begin{aligned}
 & \nu^2 \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \xi' + \nu_x^2 \xi = \nu^2 [\mu_1 \sin \tau + \sigma \mu_2 \sin(\tau + \theta)] \\
 & \nu^2 \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \eta' + \nu_y^2 \eta = -\nu^2 [\mu_1 \cos \tau + \mu_2 \cos(\tau + \theta)] \\
 & \nu^2 \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \psi' + \nu_\psi^2 \psi \\
 & = \nu^2 \left\{ \mu_1 \gamma_1 (\cos \tau + \psi \sin \tau) - \mu_2 \gamma_2 [\cos(\tau + \theta) + \sigma \psi \sin(\tau + \theta)] \right\} \\
 & \quad - (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) + (1 + \sigma) \beta \nu
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.36})$$

ここで，ブロックの変位 ξ ， η ， ψ の特解（同期解）を次式のように仮定する．

$$\left. \begin{aligned}
 & \xi = \xi_{c1} \cos \tau + \xi_{s1} \sin \tau + \sigma [\xi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \xi_{s2} \sin(\tau + \theta)] \\
 & \eta = \eta_{c1} \cos \tau + \eta_{s1} \sin \tau + \eta_{c2} \cos(\tau + \theta) + \eta_{s2} \sin(\tau + \theta) \\
 & \psi = \psi_{c1} \cos \tau + \psi_{s1} \sin \tau + \psi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \psi_{s2} \sin(\tau + \theta)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.37a})$$

式(A4.36)に式(A4.37a)を代入して調和バランス法を適用すると，式(A4.37a)の係数が次式のように求められる．

$$\left. \begin{aligned}
\xi_{c1} &\triangleq -\frac{2\mu_1\zeta_x\nu_x\nu^3}{(\nu_x^2-\nu^2)^2+(2\zeta_x\nu_x\nu)^2}, & \xi_{s1} &\triangleq \frac{\mu_1\nu^2(\nu_x^2-\nu^2)}{(\nu_x^2-\nu^2)^2+(2\zeta_x\nu_x\nu)^2} \\
\xi_{c2} &\triangleq -\frac{2\mu_2\zeta_x\nu_x\nu^3}{(\nu_x^2-\nu^2)^2+(2\zeta_x\nu_x\nu)^2}, & \xi_{s2} &\triangleq \frac{\mu_2\nu^2(\nu_x^2-\nu^2)}{(\nu_x^2-\nu^2)^2+(2\zeta_x\nu_x\nu)^2} \\
\eta_{c1} &\triangleq -\frac{\mu_1\nu^2(\nu_y^2-\nu^2)}{(\nu_y^2-\nu^2)^2+(2\zeta_y\nu_y\nu)^2}, & \eta_{s1} &\triangleq -\frac{2\mu_1\zeta_y\nu_y\nu^3}{(\nu_y^2-\nu^2)^2+(2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \\
\eta_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2\nu^2(\nu_y^2-\nu^2)}{(\nu_y^2-\nu^2)^2+(2\zeta_y\nu_y\nu)^2}, & \eta_{s2} &\triangleq -\frac{2\mu_2\zeta_y\nu_y\nu^3}{(\nu_y^2-\nu^2)^2+(2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \\
\psi_{c1} &\triangleq \frac{\mu_1\gamma_1\nu^2(\nu_\psi^2-\nu^2)}{(\nu_\psi^2-\nu^2)^2+(2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2}, & \psi_{s1} &\triangleq \frac{2\mu_1\gamma_1\zeta_\psi\nu_\psi\nu^3}{(\nu_\psi^2-\nu^2)^2+(2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \\
\psi_{c2} &\triangleq -\frac{\mu_2\gamma_2\nu^2(\nu_\psi^2-\nu^2)}{(\nu_\psi^2-\nu^2)^2+(2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2}, & \psi_{s2} &\triangleq -\frac{2\mu_2\gamma_2\zeta_\psi\nu_\psi\nu^3}{(\nu_\psi^2-\nu^2)^2+(2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.37b})$$

式(A4.29)に式(A4.35)で行ったブロックの角変位 ψ の線形化を反映させて式(A4.9)の近似を導入すると、式(A4.29)で表されるそれぞれのエネルギーは次式のように近似できる。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_\xi &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta_x\nu_x\nu\xi'^2 d\tau, & \Delta D_\eta &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta_y\nu_y\nu\eta'^2 d\tau \\
\Delta D_\psi &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} [2\zeta_\psi\nu_\psi\nu\psi' - \beta\nu(1-\sigma)]\psi' d\tau \\
\Delta D_{\phi_1} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta\nu(1-\psi') d\tau, & \Delta D_{\phi_2} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta\nu(1-\sigma\psi') d\tau \\
\Delta R_{\phi_1} &= 2\pi\varepsilon_1, & \Delta R_{\phi_2} &= 2\pi\varepsilon_2 \\
\Delta T_{\xi\phi_1} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\nu^2 \sin\tau \cdot \xi' d\tau, & \Delta T_{\xi\phi_2} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\nu^2 \sin(\tau+\theta) \cdot \xi' d\tau \\
\Delta T_{\eta\phi_1} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\nu^2 \cos\tau \cdot \eta' d\tau, & \Delta T_{\eta\phi_2} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\nu^2 \cos(\tau+\theta) \cdot \eta' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_1} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\gamma_1\nu^2(\cos\tau + \psi\sin\tau)\psi' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_2} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\gamma_2\nu^2[\cos(\tau+\theta) + \psi\sin(\tau+\theta)]\psi' d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\xi} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\nu^2\xi'' \cos\tau d\tau, & \Delta T_{\phi_1\eta} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\nu^2\eta'' \sin\tau d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\psi} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_1\gamma_1\nu^2\psi'' \sin\tau d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\xi} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\nu^2\xi'' \cos(\tau+\theta) d\tau, & \Delta T_{\phi_2\eta} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\nu^2\eta'' \sin(\tau+\theta) d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\psi} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \mu_2\gamma_2\nu^2\psi'' \sin(\tau+\theta) d\tau
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.38})$$

式(A4.38)に式(A4.37)を代入すると、式(A4.28)、式(A4.31)、式(A4.33)および式(A4.34)を満たす。

式(A4.38)に式(A4.37)を代入して整理すると、1周期あたりの散逸エネルギーおよびエネルギー移動量は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2}, \quad \Delta D_\eta = \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_2}, \quad \Delta D_\psi = \Delta D_{\psi\phi_1} + \Delta D_{\psi\phi_2} \\ \Delta T_{\xi\phi_1} &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta S_{\xi\phi_1}, \quad \Delta T_{\eta\phi_1} = \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta S_{\eta\phi_1}, \quad \Delta T_{\psi\phi_1} = \Delta D_{\psi\phi_1} + \Delta S_{\psi\phi_1} \\ \Delta T_{\xi\phi_2} &= \Delta D_{\xi\phi_2} + \Delta S_{\xi\phi_2}, \quad \Delta T_{\eta\phi_2} = \Delta D_{\eta\phi_2} + \Delta S_{\eta\phi_2}, \quad \Delta T_{\psi\phi_2} = \Delta D_{\psi\phi_2} + \Delta S_{\psi\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.39})$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{\xi\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi\zeta_x\nu_x\nu^5(\mu_1^2 + \sigma\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2}, \quad \Delta D_{\xi\phi_2} \triangleq \frac{2\pi\zeta_x\nu_x\nu^5(\mu_2^2 + \sigma\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} \\ \Delta D_{\eta\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi\zeta_y\nu_y\nu^5(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2}, \quad \Delta D_{\eta\phi_2} \triangleq \frac{2\pi\zeta_y\nu_y\nu^5(\mu_2^2 + \mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \\ \Delta D_{\psi\phi_1} &\triangleq \frac{2\pi\zeta_\psi\nu_\psi\nu^5(\mu_1^2\gamma_1^2 - \mu_1\mu_2\gamma_1\gamma_2\cos\theta)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \\ \Delta D_{\psi\phi_2} &\triangleq \frac{2\pi\zeta_\psi\nu_\psi\nu^5(\mu_2^2\gamma_2^2 - \mu_1\mu_2\gamma_1\gamma_2\cos\theta)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \\ \Delta S_{\xi\phi_1} &\triangleq \Delta S_\xi, \quad \Delta S_{\xi\phi_2} \triangleq -\Delta S_\xi, \quad \Delta S_\xi \triangleq -\frac{\sigma\pi\mu_1\mu_2\nu^4(\nu_x^2 - \nu^2)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2}\sin\theta \\ \Delta S_{\eta\phi_1} &\triangleq \Delta S_\eta, \quad \Delta S_{\eta\phi_2} \triangleq -\Delta S_\eta, \quad \Delta S_\eta \triangleq -\frac{\pi\mu_1\mu_2\nu^4(\nu_y^2 - \nu^2)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2}\sin\theta \\ \Delta S_{\psi\phi_1} &\triangleq \Delta S_\psi, \quad \Delta S_{\psi\phi_2} \triangleq -\Delta S_\psi, \quad \Delta S_\psi \triangleq \frac{\pi\mu_1\mu_2\gamma_1\gamma_2\nu^4(\nu_\psi^2 - \nu^2)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2}\sin\theta \\ \Delta S &\triangleq \Delta S_\xi + \Delta S_\eta + \Delta S_\psi \\ &= -\pi\mu_1\mu_2\nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1\gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \right] \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.40})$$

である。

式(A4.39)および(A4.40)を考慮すれば、式(A4.32)の同期状態における各種のエネルギーが満たすべき条件は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta D_\xi &= \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_2} \\
\Delta D_\eta &= \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_2} \\
\Delta D_\psi &= \Delta D_{\psi\phi_1} + \Delta D_{\psi\phi_2} \\
\Delta D_{\phi_1} + \Delta D_{\xi\phi_1} + \Delta D_{\eta\phi_1} + \Delta D_{\psi\phi_1} + \Delta S &= \Delta R_{\phi_1} \\
\Delta D_{\phi_2} + \Delta D_{\xi\phi_2} + \Delta D_{\eta\phi_2} + \Delta D_{\psi\phi_2} - \Delta S &= \Delta R_{\phi_2}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.41})$$

ここで、式(A4.27)および式(A4.38)より、

$$\Delta D_{\phi_1} = \Delta D_{\phi_2} = 2\pi\beta\nu \quad (\text{A4.42})$$

である。

式(A4.41)の 5 式の和を取ると式(A4.33)に対応する式が得られ、式(A4.29a)、式(A4.40)および(A4.42)より次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{2\pi\zeta_x\nu_x\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\sigma\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{2\pi\zeta_y\nu_y\nu^5(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\cos\theta)}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \\
&+ \frac{2\pi\zeta_\psi\nu_\psi\nu^5(\mu_1^2\gamma_1^2 + \mu_2^2\gamma_2^2 - 2\mu_1\mu_2\gamma_1\gamma_2\cos\theta)}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} + 4\pi\beta\nu \\
&= 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.43})$$

これが、自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。

一方、式(A4.41)の第 4 式から第 5 式の差をとると式(A4.34)に対応する式が得られ、式(A4.29a)、式(A4.40)および(A4.42)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned}
&2\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)\nu^5 \left[\frac{\zeta_x\nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\zeta_y\nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \right] \\
&+ 2\pi(\mu_1^2\gamma_1^2 - \mu_2^2\gamma_2^2)\nu^5 \frac{\zeta_\psi\nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \\
&- 2\pi\mu_1\mu_2\nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x\nu_x\nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y\nu_y\nu)^2} \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1\gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi\nu_\psi\nu)^2} \right] \sin\theta \\
&= 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.44})$$

となる。これが、自己同期発生時の同期エネルギーに関する条件を満足するための条件式である。

以上より，式(A4.43)および式(A4.44)の 2 本の式が，式(A4.9)および式(A4.37)の ϕ_1, ϕ_2 および ξ, η, ψ が同期状態を表す近似解であるためのエネルギー的な条件式となる。

次に， ν を設定値として ε_1 および θ について解くことを考える．そのために，式(A4.43) および式(A4.44)をそれぞれ次のように変形する．

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon_1 - d_0}{d_c}, \quad \sin \theta = \frac{\varepsilon_1 - s_0}{s_s} \quad (\text{A4.45})$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} d_c &\triangleq 2\mu_1\mu_2\nu^5 \left[\sigma \frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \\ d_0 &\triangleq (\mu_1^2 + \mu_2^2) \nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\ &\quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 + \mu_2^2 \gamma_2^2) \nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + 2\beta\nu - \varepsilon_2 \\ s_s &\triangleq -\mu_1\mu_2\nu^4 \left[\sigma \frac{\nu_x^2 - \nu^2}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\nu_y^2 - \nu^2}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\nu_\psi^2 - \nu^2}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} \right] \\ s_0 &\triangleq (\mu_1^2 - \mu_2^2) \nu^5 \left[\frac{\zeta_x \nu_x}{(\nu_x^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_x \nu_x \nu)^2} + \frac{\zeta_y \nu_y}{(\nu_y^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_y \nu_y \nu)^2} \right] \\ &\quad + (\mu_1^2 \gamma_1^2 - \mu_2^2 \gamma_2^2) \nu^5 \frac{\zeta_\psi \nu_\psi}{(\nu_\psi^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_\psi \nu_\psi \nu)^2} + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.46})$$

である．式(A4.45)を $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入して θ を消去すると ε_1 に関する 2 次方程式が得られる．これを解くと

$$\varepsilon_1 = \frac{d_c^2 s_0 + d_0 s_s^2 \pm d_c s_s \sqrt{D}}{d_c^2 + s_s^2} \quad (\text{A4.47})$$

となる．ここに，

$$D \triangleq d_c^2 + s_s^2 - (d_0 - s_0)^2 \quad (\text{A4.48})$$

であり、 $D \geq 0$ が成り立つとき、式(A4.43)および式(A4.44)を満たす ε_1 は式(A4.47)で与えられる。さらに、得られた ε_1 と式(A4.45)から θ が求められる。

A4・2・3 近似解の安定判別

シューティング法により得られる数値解の安定判別に必要な式(4.20)の変分方程式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
&= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
&\quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + \nu_y^2 \delta \eta \\
&= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
&\quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \delta \psi' + \nu_\psi^2 \delta \psi \\
&= \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ \delta \phi_1'' \sin(\phi_1 - \psi) + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos(\phi_1 - \psi) \right. \\
&\quad \left. + \left[\phi_1'' \cos(\phi_1 - \psi) - \phi_1'^2 \sin(\phi_1 - \psi) \right] (\delta \phi_1 - \delta \psi) \right\} \\
&\quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ \left[\delta \phi_2'' \sin(\phi_2 - \psi) + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos(\phi_2 - \psi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\phi_2'' \cos(\phi_2 - \psi) - \phi_2'^2 \sin(\phi_2 - \psi) \right] (\delta \phi_2 - \delta \psi) \right\} \\
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
&= -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 + (-\xi'' \sin \phi_1 + \eta'' \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
&\quad + \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ \delta \psi'' \sin(\phi_1 - \psi) - 2\psi' \delta \psi' \cos(\phi_1 - \psi) \right. \\
&\quad \left. + \left[\psi'' \cos(\phi_1 - \psi) + \psi'^2 \sin(\phi_1 - \psi) \right] (\delta \phi_1 - \delta \psi) \right\} + \beta \nu \delta \psi' \\
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
&= -\mu_2 \nu^2 \left[\delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + (-\xi'' \sin \phi_2 + \eta'' \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
&\quad - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ \delta \psi'' \sin(\phi_2 - \psi) - 2\psi' \delta \psi' \cos(\phi_2 - \psi) \right. \\
&\quad \left. + \left[\psi'' \cos(\phi_2 - \psi) + \psi'^2 \sin(\phi_2 - \psi) \right] (\delta \phi_2 - \delta \psi) \right\} + \beta \nu \delta \psi'
\end{aligned} \tag{A4.49}$$

5自由度系に提案手法を用いる場合、運動方程式を式(4.25) (および式(A4.35)) のように ψ について線形化しているため、式(4.25) (および式(A4.35)) に対応した変分方程式を安定判別に用いる必要がある。次式に対応した変分方程式を示す。

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \cos \phi_1 - 2\phi_1' \delta \phi_1' \sin \phi_1 - (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \cos \phi_2 - 2\phi_2' \delta \phi_2' \sin \phi_2 - (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + \nu_y^2 \delta \eta \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \mu_2 \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \delta \psi' + \nu_\psi^2 \delta \psi \\
& = \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \left\{ (-\phi_1'' \cos \phi_1 + \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \psi \right. \\
& \quad \left. + (\sin \phi_1 - \psi \cos \phi_1) \delta \phi_1'' + 2\phi_1' (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) \delta \phi_1' \right. \\
& \quad \left. + [\phi_1'' (\cos \phi_1 + \psi \sin \phi_1) + \phi_1'^2 (-\sin \phi_1 + \psi \cos \phi_1)] \delta \phi_1 \right\} \\
& - \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \left\{ (-\phi_2'' \cos \phi_2 + \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \psi \right. \\
& \quad \left. + (\sin \phi_2 - \psi \cos \phi_2) \delta \phi_2'' + 2\phi_2' (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) \delta \phi_2' \right. \\
& \quad \left. + [\phi_2'' (\cos \phi_2 + \psi \sin \phi_2) + \phi_2'^2 (-\sin \phi_2 + \psi \cos \phi_2)] \delta \phi_2 \right\} \\
& \quad + \beta \nu (\delta \phi_1' + \delta \phi_2') \\
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
& = -\mu_1 \nu^2 \left\{ \delta \xi'' \cos \phi_1 + \delta \eta'' \sin \phi_1 - \gamma_1 \delta \psi'' \sin \phi_1 \right. \\
& \quad \left. + [-\xi'' \sin \phi_1 + (\eta'' - \gamma_1 \psi'') \cos \phi_1] \delta \phi_1 \right\} + \beta \nu \delta \psi' \\
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
& = -\mu_2 \nu^2 \left\{ \delta \xi'' \cos \phi_2 + \delta \eta'' \sin \phi_2 + \gamma_2 \delta \psi'' \sin \phi_2 \right. \\
& \quad \left. + [-\xi'' \sin \phi_2 + (\eta'' + \gamma_2 \psi'') \cos \phi_2] \delta \phi_2 \right\} + \beta \nu \delta \psi'
\end{aligned} \tag{A4.50}$$

式(A4.50)に対して式(A4.9)のような一定角速度近似を導入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \xi'' + 2\zeta_x \nu_x \nu \delta \xi' + \nu_x^2 \delta \xi \\
&= -\mu_1 \nu^2 (\delta \phi_1'' \cos \tau - 2\delta \phi_1' \sin \tau - \delta \phi_1 \cos \tau) \\
&\quad -\mu_2 \nu^2 [\delta \phi_2'' \cos(\tau + \theta) - 2\delta \phi_2' \sin(\tau + \theta) - \delta \phi_2 \cos(\tau + \theta)] \\
& \nu^2 \delta \eta'' + 2\zeta_y \nu_y \nu \delta \eta' + \nu_y^2 \delta \eta \\
&= -\mu_1 \nu^2 (\delta \phi_1'' \sin \tau + 2\delta \phi_1' \cos \tau - \delta \phi_1 \sin \tau) \\
&\quad -\mu_2 \nu^2 [\delta \phi_2'' \sin(\tau + \theta) + 2\delta \phi_2' \cos(\tau + \theta) - \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2] \\
& \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \delta \psi' + \nu_\psi^2 \delta \psi \\
&= \mu_1 \gamma_1 \nu^2 [\delta \psi \sin \tau \\
&\quad + (\sin \tau - \psi \cos \tau) \delta \phi_1'' + 2(\cos \tau + \psi \sin \tau) \delta \phi_1' \\
&\quad + (-\sin \tau + \psi \cos \tau) \delta \phi_1] \\
&\quad -\mu_2 \gamma_2 \nu^2 \{ \delta \psi \sin(\tau + \theta) \\
&\quad + [\sin(\tau + \theta) - \psi \cos(\tau + \theta)] \delta \phi_2'' + 2[\cos(\tau + \theta) + \psi \sin(\tau + \theta)] \delta \phi_2' \\
&\quad + [-\sin(\tau + \theta) + \psi \cos(\tau + \theta)] \delta \phi_2 \} \\
&\quad + \beta \nu (\delta \phi_1' + \delta \phi_2') \\
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
&= -\mu_1 \nu^2 \{ \delta \xi'' \cos \tau + \delta \eta'' \sin \tau - \gamma_1 \delta \psi'' \sin \tau \\
&\quad + [-\xi'' \sin \tau + (\eta'' - \gamma_1 \psi'') \cos \tau] \delta \phi_1 \} + \beta \nu \delta \psi' \\
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
&= -\mu_2 \nu^2 \{ \delta \xi'' \cos(\tau + \theta) + \delta \eta'' \sin(\tau + \theta) + \gamma_2 \delta \psi'' \sin(\tau + \theta) \\
&\quad + [-\xi'' \sin(\tau + \theta) + (\eta'' + \gamma_2 \psi'') \cos(\tau + \theta)] \delta \phi_2 \} + \beta \nu \delta \psi'
\end{aligned} \tag{A4.51}$$

式(A4.51)の解析にあたり，微小変分 $\delta\xi$, $\delta\eta$ および $\delta\psi$ を次式のように仮定する．

$$\left. \begin{aligned}
 \delta\xi &= \delta\xi_c \cos\tau + \delta\xi_s \sin\tau \\
 \delta\xi' &= \delta\xi'_c \cos\tau + \delta\xi'_s \sin\tau - \delta\xi_c \sin\tau + \delta\xi_s \cos\tau \\
 \delta\xi'' &= \delta\xi''_c \cos\tau + \delta\xi''_s \sin\tau - 2\delta\xi'_c \sin\tau + 2\delta\xi'_s \cos\tau - \delta\xi_c \cos\tau - \delta\xi_s \sin\tau \\
 \delta\eta &= \delta\eta_c \cos\tau + \delta\eta_s \sin\tau \\
 \delta\eta' &= \delta\eta'_c \cos\tau + \delta\eta'_s \sin\tau - \delta\eta_c \sin\tau + \delta\eta_s \cos\tau \\
 \delta\eta'' &= \delta\eta''_c \cos\tau + \delta\eta''_s \sin\tau - 2\delta\eta'_c \sin\tau + 2\delta\eta'_s \cos\tau - \delta\eta_c \cos\tau - \delta\eta_s \sin\tau \\
 \delta\psi &= \delta\psi_c \cos\tau + \delta\psi_s \sin\tau \\
 \delta\psi' &= \delta\psi'_c \cos\tau + \delta\psi'_s \sin\tau - \delta\psi_c \sin\tau + \delta\psi_s \cos\tau \\
 \delta\psi'' &= \delta\psi''_c \cos\tau + \delta\psi''_s \sin\tau - 2\delta\psi'_c \sin\tau + 2\delta\psi'_s \cos\tau - \delta\psi_c \cos\tau - \delta\psi_s \sin\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.52})$$

ここに， $\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c, \delta\eta_s, \delta\psi_c$ および $\delta\psi_s$ は無次元時間 τ の関数である．式(A4.52)を式(A4.51)に代入して調和バランスの原理を適用し，第1式，第2式，第3式では $\cos\tau$ および $\sin\tau$ の係数の部分を，第4式と第5式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると，次式を得る．

$$M\xi'' + C\xi' + K\xi = \mathbf{0}$$

$$\xi = (\delta\xi_c, \delta\xi_s, \delta\eta_c, \delta\eta_s, \delta\psi_c, \delta\psi_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T$$

$$M \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{M}_\mu^T \\ \mathbf{M}_\mu & \mathbf{M}_\alpha \end{bmatrix}, \quad C \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\zeta & -\mathbf{C}_\mu^T \\ \mathbf{C}_\mu & \mathbf{C}_\beta \end{bmatrix}, \quad K \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\nu & \mathbf{K}_\mu^T \\ \mathbf{K}_\mu & \mathbf{K}_\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_\mu \triangleq [\mathbf{M}_{\mu L} \quad \mathbf{M}_{\mu R}], \quad \mathbf{M}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_1 \nu^2 & 0 & 0 \\ \mu_2 \nu^2 \cos \theta & -\mu_2 \nu^2 \sin \theta & \sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_1 \nu^2 & 0 & -\mu_1 \gamma_1 \nu^2 \\ \sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta & \sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta & \sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_\alpha \triangleq \text{diag}[2\alpha_1 \nu^2, 2\alpha_2 \nu^2]$$

$$\mathbf{C}_\zeta \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_x \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_x \nu_x \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_x \nu_x \nu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_y \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_y \nu_y \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_y \nu_y \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\psi \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu & 2\nu^2 \\ -2\nu^2 & 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\mu \triangleq [\mathbf{C}_{\mu L} \quad \mathbf{C}_{\mu R}]$$

$$\mathbf{C}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 2\mu_1 \nu^2 & -2\mu_1 \nu^2 \\ 2\mu_2 \nu^2 \sin \theta & 2\mu_2 \nu^2 \cos \theta & -2\sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 2\mu_1 \gamma_1 \nu^2 & 0 \\ 2\sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta & -2\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta & 2\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\beta \triangleq \text{diag}[2\beta\nu, 2\beta\nu]$$

$$\mathbf{K}_\nu \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_x \triangleq \begin{bmatrix} \nu_x^2 - \nu^2 & 2\zeta_x \nu_x \nu \\ -2\zeta_x \nu_x \nu & \nu_x^2 - \nu^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_y \triangleq \begin{bmatrix} \nu_y^2 - \nu^2 & 2\zeta_y \nu_y \nu \\ -2\zeta_y \nu_y \nu & \nu_y^2 - \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\psi \triangleq \begin{bmatrix} \nu_\psi^2 - \nu^2 & 2\zeta_\psi \nu_\psi \nu \\ -2\zeta_\psi \nu_\psi \nu & \nu_\psi^2 - \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\mu \triangleq [\mathbf{K}_{\mu L} \quad \mathbf{K}_{\mu R}]$$

$$\mathbf{K}_{\mu L} \triangleq \begin{bmatrix} -\mu_1 \nu^2 & 0 & 0 \\ -\mu_2 \nu^2 \cos \theta & \mu_2 \nu^2 \sin \theta & -\sigma \mu_2 \nu^2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mu R} \triangleq \begin{bmatrix} -\mu_1 \nu^2 & 0 & \mu_1 \gamma_1 \nu^2 \\ -\sigma \mu_2 \nu^2 \cos \theta & -\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \sin \theta & -\sigma \mu_2 \gamma_2 \nu^2 \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_k \triangleq \text{diag}[\mu_1 \nu^2 k_1, \mu_2 \nu^2 k_2]$$

$$k_1 \triangleq \xi_{s1} + \sigma(\xi_{s2} \cos \theta - \xi_{c2} \sin \theta) - \eta_{c1} - \eta_{c2} \cos \theta - \eta_{s2} \sin \theta \\ + \gamma_1 \psi_{c1} + \gamma_1 \psi_{c2} \cos \theta + \gamma_1 \psi_{s2} \sin \theta$$

$$k_2 \triangleq \xi_{s2} + \sigma(\xi_{s1} \cos \theta + \xi_{c1} \sin \theta) - \eta_{c2} - \eta_{c1} \cos \theta + \eta_{s1} \sin \theta \\ - \gamma_2 \psi_{c2} - \gamma_2 \psi_{c1} \cos \theta + \gamma_2 \psi_{s1} \sin \theta$$

(A4.53)

さらに、式(A4.53)を次式のように定数係数の1階常微分方程式に変換する。

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= A\eta \\ \eta &\triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.54})$$

同期解の安定判別は、 A の固有値として得られる特性指数から判別できる。

A4・3 実験装置の解析モデル

本節では、第6章の図6.1(b)に示した実験装置の解析モデルに関する式の導出を行う。

A4・3・1 エネルギーに関する条件式の導出

以下の議論において、 ψ 、 ϕ_1 および ϕ_2 は同期解を表すものとする。このとき、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \psi(\tau+2\pi) &= \psi(\tau), \quad \phi_1(\tau+2\pi) = \phi_1(\tau) + 2\pi, \quad \phi_2(\tau+2\pi) = \phi_2(\tau) + 2\pi \\ \psi'(\tau+2\pi) &= \psi'(\tau), \quad \phi_1'(\tau+2\pi) = \phi_1'(\tau), \quad \phi_2'(\tau+2\pi) = \phi_2'(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.55})$$

式(6.1a)、式(6.1b)および式(6.1c)の両辺にそれぞれ ψ' 、 ϕ_1' および ϕ_2' を乗じた上で、 τ について τ_0 から $\tau_0+2\pi$ まで積分し式(A4.55)を考慮すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi} &= \Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_2} \\ \Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\psi} \\ \Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\psi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.56})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta\nu\psi'^2 d\tau \\ \Delta D_{v,\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta\nu\phi_1'^2 d\tau, \quad \Delta D_{v,\phi_2} \triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \beta\nu\phi_2'^2 d\tau \\ \Delta D_{c,\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \chi_1\phi_1' d\tau = \int_{\phi_1(\tau_0)}^{\phi_1(\tau_0+2\pi)} \chi_1 d\phi_1 = 2\pi\chi_1 \\ \Delta D_{c,\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \chi_2\phi_2' d\tau = \int_{\phi_2(\tau_0)}^{\phi_2(\tau_0+2\pi)} \chi_2 d\phi_2 = 2\pi\chi_2 \\ \Delta R_{\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \varepsilon_1\phi_1' d\tau = \int_{\phi_1(\tau_0)}^{\phi_1(\tau_0+2\pi)} \varepsilon_1 d\phi_1 = 2\pi\varepsilon_1 \\ \Delta R_{\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \varepsilon_2\phi_2' d\tau = \int_{\phi_2(\tau_0)}^{\phi_2(\tau_0+2\pi)} \varepsilon_2 d\phi_2 = 2\pi\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.57a})$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta T_{\psi\phi_1} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \nu^2 \left[-\psi'' \left(\frac{\mu_1}{2} \cos 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \cos \phi_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \psi' \phi_1' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \right. \\
&\quad \left. - \rho_{r1} \nu^2 (\phi_1'' \sin \phi_1 + \phi_1'^2 \cos \phi_1) - \rho_{g1} \sin \psi \cos \phi_1 \right] \psi' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_2} &\triangleq \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \nu^2 \left[-\psi'' \left(\frac{\mu_2}{2} \cos 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \cos \phi_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \psi' \phi_2' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \right. \\
&\quad \left. - \rho_{r2} \nu^2 (\phi_2'' \sin \phi_2 + \phi_2'^2 \cos \phi_2) - \rho_{g2} \sin \psi \cos \phi_2 \right] \psi' d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\psi} &\triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \left\{ \nu^2 \left[\rho_{r1} \psi'' \sin \phi_1 + \psi'^2 \left(\frac{\mu_1}{2} \sin 2\phi_1 - \mu_{d1} \sin \phi_1 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \rho_{g1} \cos \psi \sin \phi_1 \right\} \phi_1' d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\psi} &\triangleq - \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \left\{ \nu^2 \left[\rho_{r2} \psi'' \sin \phi_2 + \psi'^2 \left(\frac{\mu_2}{2} \sin 2\phi_2 - \mu_{d2} \sin \phi_2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \rho_{g2} \cos \psi \sin \phi_2 \right\} \phi_2' d\tau
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.57b})$$

である。式(A4.57b)における各項の物理的意味については、6.3.1項を参照されたい。

トラフと各モータの間のエネルギー移動量について、式(A4.55)および式(A4.57b)より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
&\Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\phi_1\psi} \\
&= \left[-\frac{\mu_1}{4} \nu^2 \psi'^2 \cos 2\phi_1 + \mu_{d1} \nu^2 \psi'^2 \cos \phi_1 - \rho_{r1} \nu^2 \psi' \phi_1' \sin \phi_1 + \rho_{g1} \cos \psi \cos \phi_1 \right]_{-\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \\
&= 0 \\
&\Delta T_{\psi\phi_2} + \Delta T_{\phi_2\psi} \\
&= \left[-\frac{\mu_2}{4} \nu^2 \psi'^2 \cos 2\phi_2 + \mu_{d2} \nu^2 \psi'^2 \cos \phi_2 - \rho_{r2} \nu^2 \psi' \phi_2' \sin \phi_2 + \rho_{g2} \cos \psi \cos \phi_2 \right]_{-\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \\
&= 0
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.58})$$

したがって、

$$\Delta T_{\psi\phi_1} = -\Delta T_{\phi_1\psi}, \quad \Delta T_{\psi\phi_2} = -\Delta T_{\phi_2\psi} \quad (\text{A4.59})$$

となる。すなわち、同期状態においてモータ p ($p=1,2$) からトラフへと、トラフからモータ p へと流れるエネルギー移動量は互いに逆符号の関係にある。

式(A4.56)に式(A4.59)を代入して整理すると、トラフおよび各モータそれぞれの1周期あたりのエネルギー積分は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi} &= \Delta T_{\psi\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_2} \\ \Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_1} + \Delta T_{\psi\phi_1} &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_2} + \Delta T_{\psi\phi_2} &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.60})$$

となる。

以上より，システム全体の1周期あたりのエネルギー積分は，式(A4.60)の3式の和を取ることによって，次式のように求められる。

$$\Delta D_{v,\psi} + \Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_2} = \Delta R_{\phi_1} + \Delta R_{\phi_2} \quad (\text{A4.61})$$

一方，式(A4.60)の第2式から第3式を辺々引いて整理すると，モータ間のエネルギーのやり取りに関して次式が求められる。

$$\Delta T_{\psi\phi_1} - \Delta T_{\psi\phi_2} = \left[\Delta R_{\phi_1} - (\Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_1}) \right] - \left[\Delta R_{\phi_2} - (\Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_2}) \right] \quad (\text{A4.62})$$

A4・3・2 近似解の導出

式(6.1)の解析解を式(A4.9)の近似を導入することにより求めるのは，A4.2節に示した5自由度系と同様にリンクの角変位 ψ について非線形項が含まれることから困難である。そこで，静的平衡状態を基準としたリンクの角変位を $\Delta\psi = \psi - \psi_0$ とおき，その大きさが十分小さい($\Delta\psi \approx 0$)ものとして，式(6.1)を ψ_0 近傍で線形化する。さらに，値 μ_1, μ_2, μ_{d1} および μ_{d2} が含まれる項を無視すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &\nu^2 \Delta\psi'' + 2\zeta\nu \Delta\psi' + \Delta\psi \\ &= -\rho_{r1}\nu^2(\phi_1'' \sin\phi_1 + \phi_1'^2 \cos\phi_1) - \rho_{r2}\nu^2(\phi_2'' \sin\phi_2 + \phi_2'^2 \cos\phi_2) \\ &\quad - (\rho_{g1} + \rho_{g2}) \sin\psi_0 - (\rho_{g1} \cos\phi_1 + \rho_{g2} \cos\phi_2)(\sin\psi_0 + \Delta\psi \cos\psi_0) \\ &\alpha_1\nu^2\phi_1'' + \beta\nu\phi_1' \\ &= \varepsilon_1 - \chi_1 \operatorname{sgn}(\phi_1') - \rho_{r1}\nu^2 \Delta\psi'' \sin\phi_1 - \rho_{g1}(\cos\psi_0 - \Delta\psi \sin\psi_0) \sin\phi_1 \\ &\alpha_2\nu^2\phi_2'' + \beta\nu\phi_2' \\ &= \varepsilon_2 - \chi_2 \operatorname{sgn}(\phi_2') - \rho_{r2}\nu^2 \Delta\psi'' \sin\phi_2 - \rho_{g2}(\cos\psi_0 - \Delta\psi \sin\psi_0) \sin\phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.63})$$

次に，モータの一定角度近似(式(A4.9))を式(A4.63)に導入すると，次に示す通りとなる。

$$\left.
\begin{aligned}
& \nu^2 \Delta\psi'' + 2\zeta\nu \Delta\psi' + \Delta\psi \\
& = -(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0) \cos \tau - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \cos(\tau + \theta) \\
& \quad - (\rho_{g1} + \rho_{g2}) \sin \psi_0 - [\rho_{g1} \cos \tau + \rho_{g2} \cos(\tau + \theta)] \Delta\psi \cos \psi_0 \\
& \beta\nu = \varepsilon_1 - \chi_1 - \rho_{r1}\nu^2 \Delta\psi'' \sin \tau - \rho_{g1}(\cos \psi_0 - \Delta\psi \sin \psi_0) \sin \tau \\
& \beta\nu = \varepsilon_2 - \chi_2 - \rho_{r2}\nu^2 \Delta\psi'' \sin(\tau + \theta) - \rho_{g2} \sin(\cos \psi_0 - \Delta\psi \sin \psi_0)(\tau + \theta)
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.64})$$

ここで、リンクの角変位 $\Delta\psi$ の特解（同期解）を次式のように仮定する。

$$\Delta\psi = \psi_{c1} \cos \tau + \psi_{s1} \sin \tau + \psi_{c2} \cos(\tau + \theta) + \psi_{s2} \sin(\tau + \theta) \quad (\text{A4.65a})$$

式(A4.64)に式(A4.65a)を代入して調和バランス法を適用すると、式(A4.65a)の係数が次式のように求められる。

$$\left.
\begin{aligned}
\psi_{c1} &= -\frac{(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \psi_{s1} = -\frac{2\zeta\nu(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
\psi_{c2} &= -\frac{(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}, \quad \psi_{s2} = -\frac{2\zeta\nu(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.65b})$$

式(A4.57)に式(A4.63)で行った 2 種類の近似を反映させて式(A4.9)の近似を導入すると、式(A4.57)で表されるそれぞれのエネルギーは次式のように近似できる。

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta D_{v,\psi} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} 2\zeta\nu \Delta\psi'^2 d\tau, \quad \Delta D_{v,\phi_1} = \Delta D_{v,\phi_2} = 2\pi\beta\nu \\
\Delta D_{c,\phi_1} &= 2\pi\chi_1, \quad \Delta D_{c,\phi_2} = 2\pi\chi_2, \quad \Delta R_{\phi_1} = 2\pi\varepsilon_1, \quad \Delta R_{\phi_2} = 2\pi\varepsilon_2 \\
\Delta T_{\psi\phi_1} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \nu^2 (-\rho_{r1}\nu^2 \cos \tau - \rho_{g1}(\sin \psi_0 + \Delta\psi \cos \psi_0) \cos \tau) \Delta\psi' d\tau \\
\Delta T_{\psi\phi_2} &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} [-\rho_{r2}\nu^2 \cos(\tau + \theta) - \rho_{g2}(\sin \psi_0 + \Delta\psi \cos \psi_0) \cos(\tau + \theta)] \Delta\psi' d\tau \\
\Delta T_{\phi_1\psi} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} [\rho_{r1}\nu^2 \Delta\psi'' \sin \tau + \rho_{g1}(\cos \psi_0 - \Delta\psi \sin \psi_0) \sin \tau] d\tau \\
\Delta T_{\phi_2\psi} &= -\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} [\rho_{r2}\nu^2 \Delta\psi'' \sin(\tau + \theta) + \rho_{g2}(\cos \psi_0 - \Delta\psi \sin \psi_0) \sin(\tau + \theta)] d\tau
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{A4.66})$$

式(A4.66)に式(A4.65)を代入すると、式(A4.59)、式(A4.60)、式(A4.61)および式(A4.62)を満足する。

式(A4.66)を整理すると、1 周期あたりの散逸エネルギーおよびエネルギー移動量は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi} &= \Delta D_{v,\psi\phi_1} + \Delta D_{v,\psi\phi_2} \\ \Delta T_{\psi\phi_1} &= \Delta D_{v,\psi\phi_1} + \Delta S \\ \Delta T_{\psi\phi_2} &= \Delta D_{v,\psi\phi_2} - \Delta S \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.67})$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi\phi_1} &= \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \cos \theta \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\ \Delta D_{v,\psi\phi_2} &= \left[(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \cos \theta \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\ \Delta S &= -\pi(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{1-\nu^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.68})$$

である.

式(A4.67)を考慮すれば, 式(A4.60)の同期状態における各種のエネルギーが満たすべき条件は次式のように表せる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_{v,\psi} &= \Delta D_{v,\psi\phi_1} + \Delta D_{v,\psi\phi_2} \\ \Delta D_{v,\phi_1} + \Delta D_{c,\phi_1} + \Delta D_{v,\psi\phi_1} + \Delta S &= \Delta R_{\phi_1} \\ \Delta D_{v,\phi_2} + \Delta D_{c,\phi_2} + \Delta D_{v,\psi\phi_2} - \Delta S &= \Delta R_{\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.69})$$

式(A4.69)の3式の和を取ると式(A4.61)に対応する式が得られ, 式(A4.66)および式(A4.68)より次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} &\left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 + (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \cos \theta \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\ &+ 4\pi\beta\nu + 2\pi(\chi_1 + \chi_2) \\ &= 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.70})$$

これが, 自己同期発生時の散逸エネルギーに関する条件を満足するための条件式である.

一方, 式(A4.69)の第2式から第3式の差をとると式(A4.62)に対応する式が得られ, 式(A4.66)および式(A4.68)を代入すると,

$$\left. \begin{aligned}
& \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{2\pi\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& + 2\pi(\chi_1 - \chi_2) \\
& - 2\pi(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{1-\nu^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \sin \theta \\
& = 2\pi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.71})$$

となる。これが、自己同期発生時の同期エネルギーに関する条件を満たすための条件式である。

以上より、式(A4.70)および式(A4.71)の2本の式が、式(A4.9)および式(A4.65)の ϕ_1, ϕ_2 および $\Delta\psi$ が同期状態を表す近似解であるためのエネルギー的な条件式となる。

次に、 ν を設定値として ε_1 および θ について解くことを考える。そのために、式(A4.70)および式(A4.71)をそれぞれ次のように変形する。

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon_1 - d_0}{d_c}, \quad \sin \theta = \frac{\varepsilon_1 - s_0}{s_s} \quad (\text{A4.72})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
d_c &= 2(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
d_0 &= \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 + (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& \quad + (\chi_1 + \chi_2) - \varepsilon_2 \\
s_s &= -(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)(\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0) \frac{1-\nu^2}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
s_0 &= \left[(\rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin \psi_0)^2 - (\rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin \psi_0)^2 \right] \frac{\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \\
& \quad + (\chi_1 - \chi_2) + \varepsilon_2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.73})$$

である。式(A4.72)を $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入して θ を消去すると ε_1 に関する2次方程式が得られる。これを解くと

$$\varepsilon_1 = \frac{d_c^2 s_0 + d_0 s_s^2 \pm d_c s_s \sqrt{D}}{d_c^2 + s_s^2} \quad (\text{A4.74})$$

となる。ここに、

$$D \triangleq d_c^2 + s_s^2 - (d_0 - s_0)^2 \quad (\text{A4.75})$$

であり, $D \geq 0$ が成り立つとき, 式(A4.70)および式(A4.71)を満たす ε_1 は式(A4.74)で与えられる. さらに, 得られた ε_1 と式(A4.72)から θ が求められる.

A4・3・3 近似解の安定判別

シューティング法により得られる数値解の安定判別に必要な式(6.1)の変分方程式は以下のように導出される.

$$\begin{aligned}
 & \nu^2 \delta \psi'' + 2\zeta \nu \delta \psi' + \delta \psi \\
 = & -\nu^2 \left(-2\mu_{d1} \cos \phi_1 + \frac{\mu_1}{2} \cos 2\phi_1 - 2\mu_{d2} \cos \phi_2 + \frac{\mu_2}{2} \cos 2\phi_2 \right) \delta \psi'' \\
 & + \nu^2 \psi'' [(\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \phi_1 + (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \phi_2] \\
 & + \nu^2 \phi_1' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \psi' + \nu^2 \psi' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \phi_1' \\
 & + 2\nu^2 \psi' \phi_1' (\mu_1 \cos 2\phi_1 - \mu_{d1} \cos \phi_1) \delta \phi_1 \\
 & + \nu^2 \phi_2' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \psi' + \nu^2 \psi' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \phi_2' \\
 & + 2\nu^2 \psi' \phi_2' \delta \phi_2 (\mu_2 \cos 2\phi_2 - \mu_{d2} \cos \phi_2) \\
 & - \rho_{r1} \nu^2 [\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1] \\
 & - \rho_{r2} \nu^2 [\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2] \\
 & + (\rho_{g1} + \rho_{g2} + \rho_{d1} + \rho_{d2}) \tan \psi_0 \sin \psi \delta \psi \\
 & - [\rho_{g1} \cos \phi_1 + \rho_{g2} \cos \phi_2 - (\rho_{d1} + \rho_{d2})] \cos \psi \delta \psi \\
 & - (\rho_{g1} \sin \phi_1 \delta \phi_1 + \rho_{g2} \sin \phi_2 \delta \phi_2) \sin \psi
 \end{aligned} \tag{A4.76a}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta \nu \delta \phi_1' \\
 = & -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \psi'' \sin \phi_1 + \psi'' \delta \phi_1 \cos \phi_1) \\
 & - \nu^2 \psi' (\mu_1 \sin 2\phi_1 - 2\mu_{d1} \sin \phi_1) \delta \psi' - \nu^2 \psi'^2 (\mu_1 \cos 2\phi_1 - \mu_{d1} \cos \phi_1) \delta \phi_1 \\
 & + \rho_{g1} \sin \psi \sin \phi_1 \delta \psi - \rho_{g1} \cos \psi \cos \phi_1 \delta \phi_1
 \end{aligned} \tag{A4.76b}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta \nu \delta \phi_2' \\
 = & -\rho_{r2} \nu^2 (\delta \psi'' \sin \phi_2 + \psi'' \delta \phi_2 \sin \phi_2) \\
 & - \nu^2 \psi' (\mu_2 \sin 2\phi_2 - 2\mu_{d2} \sin \phi_2) \delta \psi' - \nu^2 \psi'^2 (\mu_2 \cos 2\phi_2 - \mu_{d2} \cos \phi_2) \delta \phi_2 \\
 & + \rho_{g2} \sin \psi \sin \phi_2 \delta \psi - \rho_{g2} \cos \psi \cos \phi_2 \delta \phi_2
 \end{aligned} \tag{A4.76c}$$

図 6.1(b)に示す解析モデルに提案手法を用いる場合, 運動方程式を式(6.5) (および式(A4.63)) のように ψ について線形化および μ_1, μ_2, μ_{d1} および μ_{d2} が含まれる項の無視を行っているため, 式(A4.63)に対応した変分方程式を安定判別に用いる必要がある. 次式に式(6.5) (および式(A4.63)) に対応した変分方程式を示す.

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \Delta \psi'' + 2\zeta \nu \delta \Delta \psi' + K \delta \Delta \psi \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 \left[\delta \phi_1'' \sin \phi_1 + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \phi_1 + (\phi_1'' \cos \phi_1 - \phi_1'^2 \sin \phi_1) \delta \phi_1 \right] \\
& \quad - \rho_{r2} \nu^2 \left[\delta \phi_2'' \sin \phi_2 + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos \phi_2 + (\phi_2'' \cos \phi_2 - \phi_2'^2 \sin \phi_2) \delta \phi_2 \right] \\
& \quad + (\rho_{g1} \sin \phi_1 \delta \phi_1 + \rho_{g2} \sin \phi_2 \delta \phi_2) \sin \psi_0 \\
& \quad - (\rho_{g1} \cos \phi_1 + \rho_{g2} \cos \phi_2) \delta \Delta \psi \cos \psi_0
\end{aligned} \tag{A4.77a}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta_1 \nu \delta \phi_1' \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \Delta \psi'' \sin \phi_1 + \Delta \psi'' \delta \phi_1 \cos \phi_1) \\
& \quad - \rho_{g1} \delta \phi_1 \cos \psi_0 \cos \phi_1 + \rho_{g1} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin \phi_1 + \rho_{g1} \Delta \psi \delta \phi_1 \sin \psi_0 \cos \phi_1
\end{aligned} \tag{A4.77b}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta_2 \nu \delta \phi_2' \\
& = -\rho_{r2} \nu^2 (\delta \Delta \psi'' \sin \phi_2 + \Delta \psi'' \delta \phi_2 \cos \phi_2) \\
& \quad - \rho_{g2} \delta \phi_2 \cos \psi_0 \cos \phi_2 + \rho_{g2} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin \phi_2 + \rho_{g2} \Delta \psi \delta \phi_2 \sin \psi_0 \cos \phi_2
\end{aligned} \tag{A4.77c}$$

式(A4.77)に対して式(A4.9)のような一定角速度近似を導入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \delta \Delta \psi'' + 2\zeta \nu \delta \Delta \psi' + K \delta \Delta \psi \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \phi_1'' \sin \tau + 2\phi_1' \delta \phi_1' \cos \tau - \sin \tau \delta \phi_1) \\
& \quad - \rho_{r2} \nu^2 [\delta \phi_2'' \sin(\tau + \theta) + 2\phi_2' \delta \phi_2' \cos(\tau + \theta) - \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2] \\
& \quad + [\rho_{g1} \sin \tau \delta \phi_1 + \rho_{g2} \sin(\tau + \theta) \delta \phi_2] \sin \psi_0 \\
& \quad - [\rho_{g1} \cos \tau + \rho_{g2} \cos(\tau + \theta)] \delta \Delta \psi \cos \psi_0
\end{aligned} \tag{A4.78a}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \nu^2 \delta \phi_1'' + \beta_1 \nu \delta \phi_1' \\
& = -\rho_{r1} \nu^2 (\delta \Delta \psi'' \sin \tau + \Delta \psi'' \delta \phi_1 \cos \tau) \\
& \quad - \rho_{g1} \delta \phi_1 \cos \psi_0 \cos \tau + \rho_{g1} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin \tau + \rho_{g1} \Delta \psi \delta \phi_1 \sin \psi_0 \cos \tau
\end{aligned} \tag{A4.78b}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \nu^2 \delta \phi_2'' + \beta_2 \nu \delta \phi_2' \\
& = -\rho_{r2} \nu^2 [\delta \Delta \psi'' \sin(\tau + \theta) + \Delta \psi'' \delta \phi_2 \cos(\tau + \theta)] \\
& \quad - \rho_{g2} \delta \phi_2 \cos \psi_0 \cos(\tau + \theta) + \rho_{g2} \delta \Delta \psi \sin \psi_0 \sin(\tau + \theta) \\
& \quad + \rho_{g2} \Delta \psi \delta \phi_2 \sin \psi_0 \cos(\tau + \theta)
\end{aligned} \tag{A4.78c}$$

式(A4.78)の解析にあたり，微小変分 $\delta \Delta \psi$ を次式のように仮定する．

$$\begin{aligned}
& \delta \psi = \delta \psi_c \cos \tau + \delta \psi_s \sin \tau \\
& \delta \psi' = \delta \psi_c' \cos \tau + \delta \psi_s' \sin \tau - \delta \psi_c \sin \tau + \delta \psi_s \cos \tau \\
& \delta \psi'' = \delta \psi_c'' \cos \tau + \delta \psi_s'' \sin \tau - 2\delta \psi_c' \sin \tau + 2\delta \psi_s' \cos \tau - \delta \psi_c \cos \tau - \delta \psi_s \sin \tau
\end{aligned} \tag{A4.79}$$

ここに、 $\delta\psi_c, \delta\psi_s$ は無次元時間 τ の関数である。式(A4.79)を式(A4.78)に代入して調和バランスの原理を適用し、第1式では $\cos\tau$ および $\sin\tau$ の係数の部分を、第2式と第3式では τ を陽に含まない項をそれぞれ等値すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{M}\xi'' + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{K}\xi = \mathbf{0} \\
 & \xi = (\delta\Delta\psi_c, \delta\Delta\psi_s, \delta\phi_1, \delta\phi_2)^T \\
 & \mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} \nu^2 & 0 & 0 & \rho_{r2}\nu^2 \sin\theta \\ 0 & \nu^2 & \rho_{r1}\nu^2 & \rho_{r2}\nu^2 \cos\theta \\ 0 & \rho_{r1}\nu^2 & 2\alpha_1\nu^2 & 0 \\ \rho_{r2}\nu^2 \sin\theta & \rho_{r2}\nu^2 \cos\theta & 0 & 2\alpha_2\nu^2 \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} 2\zeta\nu & 2\nu^2 & 2\rho_{r1}\nu^2 & 2\rho_{r2}\nu^2 \cos\theta \\ -2\nu^2 & 2\zeta\nu & 0 & -2\rho_{r2}\nu^2 \sin\theta \\ -2\rho_{r1}\nu^2 & 0 & 2\beta\nu & 0 \\ -2\rho_{r2}\nu^2 \cos\theta & 2\rho_{r2}\nu^2 \sin\theta & 0 & 2\beta\nu \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & 2\zeta\nu & 0 & -\rho_2 \sin\theta \\ -2\zeta\nu & 1-\nu^2 & -\rho_1 & -\rho_2 \cos\theta \\ 0 & -\rho_1 & -\rho_1\Psi_1 & 0 \\ -\rho_2 \sin\theta & -\rho_2 \cos\theta & 0 & -\rho_2\Psi_2 \end{bmatrix} \\
 & \rho_1 \triangleq \rho_{r1}\nu^2 + \rho_{g1} \sin\psi_0, \quad \rho_2 \triangleq \rho_{r2}\nu^2 + \rho_{g2} \sin\psi_0 \\
 & \Psi_1 \triangleq \psi_{c1} + \psi_{c2} \cos\theta + \psi_{s2} \sin\theta, \quad \Psi_2 \triangleq \psi_{c2} + \psi_{c1} \cos\theta - \psi_{s1} \sin\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.80})$$

さらに、式(A4.80)を次式のように定数係数の1階常微分方程式に変換する。

$$\left. \begin{aligned}
 & \eta' = \mathbf{A}\eta \\
 & \eta \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.81})$$

同期解の安定判別は、 \mathbf{A} の固有値として得られる特性指数から判別できる。

参考文献

- (1) 日本機械学会編, 機械工学便覧, 基礎編 α 2, (2004), pp.79-81.
- (2) Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J., Synchronization (A universal concept in nonlinear sciences) (2001), Cambridge University Press; Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J. (著), 徳田功 (訳), 同期理論の基礎と応用 数理科学, 化学, 生命科学から工学まで (2009), 丸善株式会社.
- (3) 蔵本由紀, 河村洋史, 同期現象の科学 位相記述によるアプローチ (2017), 京都大学学術出版会.
- (4) 蔵本由紀, 非線形科学 同期する世界 (2014), 集英社.
- (5) Rayleigh, J. W. S., The Theory of Sound, Vol.2 (1945), pp.221-222, Dover Publications.
- (6) Abel, M., Bergweiler, S. and Gerhard-Multhaupt, R., Synchronization of organ pipes: experimental observations and modeling, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.119 (2006), p.2467.
- (7) Yoshimoto, M., Yoshikawa, K., Mori, Y. and Hanazaki, I., Asymmetric coupling stabilizes the out-of-phase mode: experimental evidence in the Belousov-Zhabotinsky reaction, Chemical Physics Letters, Vol.189, No.1 (1992), pp.18-22.
- (8) 蔵本由紀, 非線形科学 (2007), pp.125-157, 集英社.
- (9) 蔵本由紀編, 非線型・非平衡現象の推理 1 リズム現象の世界 (2005), 東京大学出版会.
- (10) 郡宏, 森田善久, 生物リズムと力学系 (2011), 共立出版.
- (11) Reppert, S. M. and Weaver, D. R., Coordination of circadian timing in mammals, Nature, Vol.418, No.6901 (2002), pp.935-941.
- (12) 本間研一, 人工環境への適応とヒトの生物時計, 科学, Vol.68, No.2 (1998), pp.188-194.
- (13) Walker, T. J., Acoustic synchrony: Two mechanisms in the snowy tree cricket, Science, Vol.166, No.3907 (1969), pp.891-894.
- (14) Aihara, I., Modeling synchronized calling behavior of Japanese tree frogs, Physical Review E, Vol.80, No.1 (2009), p.011918.

- (15) Aihara, I., Mizumoto, T., Otsuka, T., Awano, H., Nagira, K., Okuno, H. G. and Aihara, K., Spatio-temporal dynamics in collective frog choruses examined by mathematical modeling and field observations, *Scientific Reports*, Vol.4, No.3891 (2014).
- (16) Buck, J. and Buck, E., Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies, *Science*, Vol.159, No.3821 (1968), pp.1319-1327.
- (17) Smith, H. M., Synchronous flashing of fireflies, *Science*, Vol.82, No.2120 (1935), pp.151-152.
- (18) Moiseff, A. and Copeland, J., Firefly synchrony: A behavioral strategy to minimize visual clutter, *Science*, Vol.329, No.5988 (2010), p.181.
- (19) スティーブン・ストロガッツ, SYNC—なぜ自然はシンクロしたがるのか— (2005), 早川書房.
- (20) Kohira, M. I., Kitahata, H., Magome N. and Yoshikawa K., Plastic bottle oscillator as an on-off-type oscillator: Experiments, modeling, and stability analyses of single and coupled systems, *Physical Review E*, Vol.85, No.2 (2012), p.026204.
- (21) Kitahata, H., Taguchi, J., Nagayama, M., Sakurai, T., Ikura, Y., Osa, A., Sumino, Y., Tanaka, M., Yokoyama, E. and Miike, H., Oscillation and synchronization in the combustion of candles, *Journal of Physical Chemistry A*, Vol.113, No.29 (2009), pp.8164-8168.
- (22) Eccles, W. H. and Vincent, J. H., *British Patent Spec. clxiii* (1920), p.462.
- (23) Appleton, E. V., The automatic synchronization of triode oscillator, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.21 (1922), pp.231-248.
- (24) van der Pol, B., Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (Reception with reactive triode), *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol.3, No.13 (1927), pp.65-80.
- (25) Uhlhaas, P. J. and Singer, W., Neural synchrony in brain disorders: Relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology, *Neuron*, Vol.52, No.1 (2006), pp.155-168.
- (26) Hammond, C., Bergman, H. and Brown, P., Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments, *Trends in Neurosciences*, Vol.30, No.7 (2007), pp.357-364.
- (27) Tass, P. A., *Phase resetting in medicine and biology: stochastic modelling and data analysis* (2007), Springer, Berlin, Germany.

- (28) Popovych, O. V., Hauptmann, C. and Tass, P. A., Effective desynchronization by nonlinear delayed feedback, *Physical Review Letters*, Vol.94, No.16 (2005), p.164102.
- (29) Popovych, O. V., Hauptmann, C. and Tass, P. A., Desynchronization and decoupling of interacting oscillators by nonlinear delayed feedback, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.16, No.7 (2006), pp.1977-1987.
- (30) 蔵本由紀, 河村洋史, 非線形化学シリーズ 6 同期現象の数理 位相記述によるアプローチ (2010), 培風館.
- (31) 蔵本由紀, 新しい自然学 非線形科学の可能性 (2016), 筑摩書房.
- (32) 井上順吉, 荒木嘉昭, 渡部幸夫, 振動機械の自己同期化 (第 6 報, 倍数次同期), 日本機械学会論文集, Vol.42, No.353 (1976), pp.111-117.
- (33) Zhang, X., Zhang, X., Zhang, C., Wang, Z. and Wen, B., Double and triple-frequency synchronization and their stable states of the two co-rotating exciters in a vibrating mechanical system, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.154 (2021), p.107555.
- (34) Zhang, X., Zhang, X., Hu, W., Zhang, W., Chen, W., Wang, Z. and Wen, B., Theoretical, numerical and experimental studies on multi-cycle synchronization of two pairs of reversed rotating exciters, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.167 (2022), p.108501.
- (35) Modrzewski, R. and Wodziński, P., Grained material classification on a double frequency screen, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, Vol.46 (2011), pp.5-12.
- (36) Modrzewski, R. and Wodziński, P., Screens for segregation of mineral waste, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, Vol.47 (2011), pp.267-274.
- (37) Kapitaniak, M., Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A. and Kapitaniak, T., Synchronization of clocks, *Physics Reports*, Vol.517, No.1-2 (2012), pp.1-69.
- (38) Kapitaniak, M., Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A. and Kapitaniak, T., Synchronous states of slowly rotating pendula, *Physics Reports*, Vol.541, No.1 (2014), pp.1-44.
- (39) Miklós, Á. and Szabó, Z., Simulation and experimental validation of the dynamical model of a dual-rotor vibrotactor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.334 (2015), pp.98-107.

- (40) Kong, X., Zhang, X., Chen, X., Wen, B. and Wang, B., Phase and speed synchronization control of four eccentric rotors driven by induction motors in a linear vibratory feeder with unknown time-varying load torques using adaptive sliding mode control algorithm, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.370 (2016), pp.23-42.
- (41) 長嶺拓夫, 佐藤勇一, 同期現象とその応用, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.71, No.704 (2005), pp.1113-1116.
- (42) 井上順吉, 末岡淳男, 機械力学 II -非線形振動論- (2002), 理工学社.
- (43) Blekhman, I. I., *Synchronization in science and technology* (1988), ASME Press, New York.
- (44) Jovanovic, V. and Koshkin, S., Synchronization of Huygens' clocks and the Poincaré method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.331, No.12 (2012), pp.2887-2900.
- (45) Bennet, M., Schatz, M. F., Rockwood, H. and Wiesenfeld, K., Huygens's clocks, *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol.458 (2002), pp.563-579.
- (46) Pantaleone, J., Synchronization of metronomes, *American Journal of Physics*, Vol.70, No.10 (2002), pp.992-1000.
- (47) 佐藤勇一, 中野健, 長嶺拓夫, 布施誠, 振動系の同期現象 (2 台のメトロノームを対象とした実験と解析), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.66, No.642 (2000), pp.363-369.
- (48) 近藤孝広, 盆子原康博, 森博輝, 石川諭, 振り子型振動子群の自己同期現象 (第 1 報, メトロノームの自己同期現象に対するシューティング法による解析), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.68, No.676 (2002), pp.3499-3506.
- (49) 長嶺拓夫, 佐藤勇一, 森博輝, 複数振動子と支持系の連成振動, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.74, No.739 (2008), pp.554-561.
- (50) 長嶺拓夫, 森博輝, 茂木知之, 佐藤勇一, 振り子型の励振力を受ける構造物における大振動の防止, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.782 (2011), pp.3648-3657.
- (51) Senator, M., Synchronization of two coupled escapement-driven pendulum clocks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.291, No.3-5 (2006), pp.566-603.
- (52) Willms, A. R., Kitanov, P. M. and Langford, W. F., Huygens' clocks revisited, *Royal Society Open Science*, Vol.4, No.9 (2017), p.170777.

- (53) Ramirez, J. P., Fey, R. H. B., Aihara, K. and Nijmeijer, H., An improved model for the classical Huygens' experiment on synchronization of pendulum clocks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.333, No.26 (2014), pp.7248-7266.
- (54) Koluda, P., Perlikowski, P., Czołczyński, K. and Kapitaniak, T., Synchronization configurations of two coupled double pendula, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol.19, No.4 (2014), pp.977-990.
- (55) Dudkowski, D., Czołczyński, K. and Kapitaniak, T., Multistability and synchronization: The co-existence of synchronous patterns in coupled pendula, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.166 (2022), p.108446.
- (56) Dudkowski, D., Czołczyński, K. and Kapitaniak, T., Multistable synchronous states of two pendulum clocks suspended on a swinging support, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.154 (2021), p.107549.
- (57) 井上順吉, 宮浦すが, 松下修巳, 振動機械の自己同期化について (第3報, 強制摩擦振動), *日本機械学会論文集*, Vol.35, No.274 (1969), pp.1242-1248.
- (58) 倉本智, 高野英資, 根岸文彦, 変動移動面速度下の強制摩擦振動 (三次摩擦特性の場合の平均法による解析), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.58, No.552 (1992), pp.2348-2356.
- (59) 倉本智, 高野英資, 根岸文彦, 変動移動面速度下の強制摩擦振動 (三次元摩擦特性の場合の断片線形近似による解析), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.59, No.559 (1993), pp.665-671.
- (60) 倉本智, 高野英資, 根岸文彦, 変動移動面速度下の強制摩擦振動 (直線摩擦特性における断片線形近似解), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.59, No.563 (1993), pp.1999-2006.
- (61) 小野友輝, 近藤孝広, 盆子原康博, スティック・スリップ振動をともなう結合自励振動子群に生じる自己同期現象, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.77, No.773 (2011), pp.28-42.
- (62) 小野友輝, 近藤孝広, 盆子原康博, スティック・スリップ振動をともなう結合自励振動子群に生じる自己同期現象 (同期の発生領域に対する振動子間の結合条件), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.79, No.799 (2013), pp.550-561.

- (63) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Synchronization of three non-identical coupled exciters with the same rotating directions in a far-resonant vibrating system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.332, No.9 (2013), pp.2300-2317.
- (64) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Experimental investigation on synchronization of three co-rotating non-identical coupled exciters driven by three motors, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.333, No.13 (2014), pp.2898-2908.
- (65) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Vibratory synchronization and coupling dynamic characteristics of multiple unbalanced rotors on a mass-spring rigid base, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.60 (2014), pp.1-8.
- (66) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Theoretical study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types, *Nonlinear Dynamics*, Vol.85 (2016), pp.141-154.
- (67) Zhang, X., Kong, X., Wen, B. and Zhao, C., Numerical and experimental study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types, *Nonlinear Dynamics*, Vol.82 (2015), pp.987-999.
- (68) Zhang, X., Yue, H., Li, Z., Xu, J. and Wen, B., Stability and coupling dynamic characteristics of a vibrating system with one internal degree of freedom and two vibrators, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.143 (2020), p.106812.
- (69) Zhang, X., Li, Z., Li, M. and Wen, B., Stability and sommerfeld effect of a vibrating system with two vibrators driven separately by induction motors, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol.26, No.2 (2021), pp.807-817.
- (70) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Vibratory synchronization transmission of a cylindrical roller in a vibrating mechanical system excited by two exciters, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.96 (2017), pp.88-103.
- (71) Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A. and Kapitaniak, T., Synchronization of slowly rotating pendulums, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.22, No.5 (2012), p.1250128.
- (72) Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A. and Kapitaniak, T., Synchronization of pendula rotating in different directions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol.17, No.9 (2012), pp.3658-3672.

- (73) 井上順吉, 荒木嘉昭, 林節子, 振動機械の自己同期化について (第1報, 軸心が調和振動する不平衡ロータの回転), 日本機械学会論文集, Vol.32, No.234 (1966), pp.184-193.
- (74) 井上順吉, 荒木嘉昭, 宮浦すが, 振動機械の自己同期化について (第2報, 転動回転機構ならびに自動平衡装置), 日本機械学会論文集, Vol.33, No.246 (1967), pp.206-214.
- (75) 井上順吉, 荒木嘉昭, 岡田幸正, 振動機械の自己同期化 (第4報, 剛体空間に任意に配置された s 個の不平衡ロータ), 日本機械学会論文集, Vol.41, No.350 (1975), pp.2840-2846.
- (76) 井上順吉, 荒木嘉昭, 宮浦すが, 振動機械の自己同期化 (第5報, 衝突を伴う振動機械), 日本機械学会論文集, Vol.42, No.353 (1976), pp.103-110.
- (77) ボゴリューボフ, ミトロポリスキー (著), 益子正教 (訳), 非線型振動論—漸近的方法— (1961), 共立出版.
- (78) 井上順吉, 荒木嘉昭, 宮浦すが, 動力源と機械との相互作用に関する研究 (第2報, 引込み現象), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.48, No.430 (1982), pp.819-824.
- (79) 井上順吉, 末岡淳男, 西脇真一, 動力源と機械との相互作用に関する研究 (第3報, 引込み現象を利用した振動リフト), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.49, No.437 (1983), pp.39-43.
- (80) Paz, M. and Cole, J. D., Self-synchronization of two unbalanced rotors, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.114, No.1 (1992), pp.37-41.
- (81) 長嶺拓夫, 佐藤勇一, 河瀬紘介, 複数回転機械の危険速度通過振動, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.71, No.708 (2005), pp.2439-2446.
- (82) 盆子原康博, 森博輝, 近藤孝広, 綾部隆, 回転型自励振動子群の自己同期現象 (第1報, 振動子間の結合形態の影響について), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.73, No.728 (2007), pp.1012-1020.
- (83) 森博輝, 盆子原康博, 近藤孝広, 綾部隆, 回転型自励振動子群の自己同期現象 (第2報, 非線形ノーマルモードによる検討), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.73, No.728 (2007), pp.1021-1028.
- (84) 近藤孝広, 森博輝, 盆子原康博, 綾部隆, 自己同期現象を利用した推進装置 (第1報, シューティング法による基本性能の解析と実験的検証), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.71, No.712 (2005), pp.3351-3358.

- (85) 盆子原康博, 小野友輝, 近藤孝広, 手持ち振動工具への応用に向けた同期振動発生機構の開発 (2 振動子衝突モデルについての検討) , 日本機械学会論文集 C 編, Vol.76, No.772 (2010), pp.3486-3494.
- (86) Li, Z., Chen, W., Zhang, W., Zhang, X. and Wen, B., Theoretical, numerical, and experimental study on the synchronization in a vibrator-pendulum coupling system, Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol.22 (2022), p.157.
- (87) Li, Z., Zhang, X., Chen, W. and Wen, B., Synchronization characteristics of two vibrator-driven pendulums, Alexandria Engineering Journal, Vol.64 (2023), pp.907-921.
- (88) Kapitaniak, M., Lazarek, M., Nielaczny, M., Czolczynski, K., Perlikowski, P. and Kapitaniak, T., Synchronization extends the life time of the desired behavior of globally coupled systems, Scientific Reports, Vol.4 (2014), p.4391.
- (89) Zhang, X., Wen, B. and Zhao, C., Vibratory synchronization transmission of two exciters in a super-resonant vibrating system, Journal of Mechanical Science and Technology, Vol.28, No.6 (2014), pp.2049-2058.