# The singular continuous spectrum of Schrödinger operators

宇治野, 広大



出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

| 氏　　　名 | 宇治野　広大 |
|---|---|
| 論　文　名 | The singular continuous spectrum of Schrödinger operators<br>(シュレディンガー作用素の特異連続スペクトル) |
| 論文調査委員 | 主　査　　九州大学　　　　　　　　教授　　廣島　文生<br>副　査　　九州大学　　　　　　　　教授　　勝田　篤<br>副　査　　九州大学　　　　　　　　教授　　松井　卓<br>副　査　　九州大学　　　　　　　　教授　　原　隆 |

## 論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

この博士論文では、離散シュレディンガー作用素と連続シュレディンガー作用素の特異連続スペクトルが考察されている。複素数体上のヒルベルト空間に定義された自己共役作用素のスペクトルは、絶対連続スペクトル、特異連続スペクトル、点スペクトルに分類される。絶対連続スペクトルは量子の散乱状態に、点スペクトルは固有状態に対応している。直感的には、絶対連続スペクトルは $V(x)=-1/|x|$ のような平坦なポテンシャルによって与えられ、点スペクトルは、$V(x)=|x|^2$ のような束縛的なポテンシャルで与えられる。

特異連続スペクトルをもつシュレディンガー作用素の典型例として、スパースポテンシャルをもつシュレディンガー作用素が知られている。スパースポテンシャルは、ほとんど平坦なのだが、非常に大きな間隔をあけて無限の彼方まで束縛が起きるようなポテンシャルであり、平坦なポテンシャルと束縛的なポテンシャルの性質を合わせもっている。特異連続スペクトルは非常に奇妙な対象であり、その研究が現在まで十分にされてきたとは言い難く、過去の特異連続スペクトルの研究はその「非存在性」を示すことが主だった。この博士論文では、スパースポテンシャルをもつ離散シュレディンガー作用素と連続シュレディンガー作用素の特異連続スペクトルの性質が考察されている。

(離散シュレディンガー作用素)　一般にグラフが与えられると、それに付随するグラフラプラシアンが定義できる。グラフラプラシアンに付随するスペクトル測度のハウスドルフ次元を厳密に求めるのがこの博士論文の主題の一つである。

博士論文で考察した離散シュレディンガー作用素$H_d$は、$\Gamma$-スパースツリーと呼ばれるグラフ上のグラフラプラシアンで定義される。ここで、$0<\Gamma<1$を仮定する。一般に、グラフラプラシアンは自己共役作用素なので、それに付随するスペクトル測度が一意的に存在する。一般に測度$\mu$に対して上ハウスドルフ次元 $\dim^*\mu$ と下ハウスドルフ次元 $\dim_*\mu$ が定まる。このとき

$$\dim_*\mu=\alpha=\dim^*\mu$$

が成立するとき、$\mu$は「$\alpha$-exact ハウスドルフ次元をもつ」という。博士論文では$H_d$に付随するスペクトル測度が、区間(0,4)に制限すると$\Gamma$-exact ハウスドルフ次元であることが証明されている。これは以下のようにして示される：$H_d$には絶対連続スペクトルが存在せず、さらに、区間(0,4)では点スペクトルも存在しないことが知られている。この系として区間(0,4)に含まれる$H_d$のスペクトルは特異連続スペクトルであることが分かる。$H_d$のスペクトル測度を区間(0,4)に制限したものを$E$と表す。Breuer によって

$$\Gamma \leqq \dim_* E \leqq \dim^* E \leqq 2\,\Gamma/(1+\Gamma)$$

が示されている。博士論文では intermittency function $\beta(p)$を利用して、$E$の上ハウスドルフ次元を評価した。ここで$\beta(p)$は粒子の時間平均的な拡散を表す指標とみなすこともでき、$p>0$に対して$\dim^* E \leqq \beta(p)$が成立する。$p>0$に対して

$$\beta(p) = (\Gamma p + \Gamma)/(\Gamma p + 1)$$

が示され、その結果、$p \to 0$として、

$$\Gamma \leqq \dim_* E \leqq \dim^* E \leqq \Gamma$$

がわかり、$E$は$\Gamma$-exact ハウスドルフ次元をもつことが示される。

(連続シュレディンガー作用素)半区間$(0,\infty)$上の 1 次元シュレディンガー作用素

$$H_c = -\Delta + V$$

を考える。ここで、$V$はスパースポテンシャルである。$H_c$は$x=0$で正則境界点かつ無限遠点で極限点である。よって、$H_c$の自己共役拡大$H_\theta$はパラメータ$\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$で特徴づけられる。先行研究により、任意の$\theta$で$H_\theta$の絶対連続スペクトルは存在せず、さらに、半区間$(0,\infty)$に点スペクトルも存在しないことが示されている。この系として、半区間$(0,\infty)$に含まれる$H_\theta$のスペクトルは特異連続スペクトルであることが分る。博士論文では、半区間$(0,\infty)$の端点である$\{0\}$が点スペクトルであるかどうかを考察し、最終的に、$H_\theta$が特異連続スペクトルへの埋蔵固有値 0 をもたないための十分条件を与えている。また、具体例として、任意の$\theta$に対して、$H_\theta$が埋蔵固有値 0 をもたないようなスパースポテンシャル$V$を構成している。その結果、次を得た。

$$0 \le \theta \le \pi/2$$

のとき、$H_\theta$の絶対連続スペクトルと点スペクトルはともに存在せず、半区間$[0,\infty)$が特異連続スペクトルであり、

$$-\pi/2 < \theta < \arctan((-1+\sqrt{3})/2)$$

のとき、$H_\theta$の絶対連続スペクトルは存在せず、ただ一つの負の点スペクトルが存在し、かつ、半区間$[0,\infty)$が特異連続スペクトルである。

以上の結果は、解析学およびシュレディンガー作用素のスペクトル解析の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。