The singular continuous spectrum of Schrödinger operators

宇治野, 広大

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：宇治野 広大

論 文 名　：The singular continuous spectrum of Schrödinger operators
（シュレディンガー作用素の特異連続スペクトル）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では、特異連続スペクトルをもつシュレディンガー作用素について取り扱う。ヒルベルト空間上に定義された自己共役作用素はスペクトルが定まる。スペクトルは絶対連続スペクトル、特異連続スペクトル、点スペクトルに分類される。特異連続スペクトルをもつシュレディンガー作用素としてランダムシュレディンガー作用素などが知られているが、これはポテンシャルが具体的に分からない場合が多い。具体的に分かる例としてスパースポテンシャルと呼ばれるものがある。本論文ではスパースポテンシャルの性質を有するシュレディンガー作用素を取り扱う。本論文では二つのモデルについて取り扱う。

一つ目のモデルは、Γ-スパースツリーと呼ばれるグラフに定まるグラフラプラシアンである。ここで、Γは実数かつ$0 < \Gamma < 1$を満たすとする。一般にグラフが与えられると、それに付随するグラフラプラシアンが与えられる。グラフラプラシアンは自己共役作用素なので、それに付随するスペクトル測度が得られる。一般に測度μに対して上側ハウスドルフ次元 $\dim^* \mu$ と下側ハウスドルフ次元 $\dim_* \mu$ が定まる。このとき$\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$が成り立つならば、$\mu$は$\alpha$-exact Hasudorff dimension をもつという。グラフラプラシアンに付随するスペクトル測度のハウスドルフ次元を計算するのが研究の主題である。結果として、Γ-スパースツリーに定まるグラフラプラシアンに付随するスペクトル測度は、区間(0,4)に制限するとΓ-exact Hausdorff dimension をもつことが分かった。

Γ-スパースツリーのグラフラプラシアンH_dは絶対連続スペクトルをもたず、区間(0,4)で点スペクトルをもたないことが分かる。この系として区間(0,4)が特異連続スペクトルであること分かる。H_dのスペクトル測度を区間(0,4)に制限したものをEとする。先行研究では、Breuer によって$\Gamma \leqq \dim_* E \leqq \dim^* E \leqq 2\Gamma/(1+\Gamma)$であることが分かっている。この結果は subordinate solution と呼ばれるものを利用している。本研究では intermittency function $\beta(p)$と呼ばれるものを利用して、Eの上側ハウスドルフ次元を評価した。$\beta(p)$は粒子の時間平均的な拡散を表すための指標である。$p > 0$に対して$\dim^* E \leqq \beta(p)$が成り立つ。結果として、$p > 0$に対して$\beta(p) = (\Gamma p + \Gamma)/(\Gamma p + 1)$であることが分かった。このとき $p \to 0$とすると、$\Gamma \leqq \dim_* E \leqq \dim^* E \leqq \Gamma$であることが分かる。以上より$E$は$\Gamma$-exact Hausdorff dimension をもつことが示せた。一般に測度が exact Hausdorff dimension をもつとは限らない。今回のモデルは exact Hausdorff dimension をもつスペクトル測度を付随するグラフラプラシアンの例となっている。

二つ目のモデルは半直線上のシュレディンガー作用素$H_c = -\Delta + V$である。ここで、Vはスパースポテンシャルである。H_cは$x = 0$で正則境界点かつ無限遠点で極限点である。よってH_cの自己共役拡張H_θはパラメータ$\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$で特徴づけられる。先行研究により、任意の$\theta$で$H_\theta$は絶対連続スペクトルをもたず、区間$(0,\infty)$で点スペクトルをもたない。この系として、区間$(0,\infty)$は$H_\theta$の特異連続ス

ペクトルとなることが分かっている。ここでの研究の動機としては、スパースポテンシャルをもつシュレディンガー作用素は、ある区間が特異連続スペクトルとなる場合が多い。一方で、その区間の補集合に含まれるようなスペクトルについて言及されることが少ない。スパースポテンシャルをもつシュレディンガー作用素に対して、特異連続スペクトルとなるような区間に含まれないスペクトルを調べるのが研究の主題である。

本研究では、区間$(0,\infty)$の端点である$E=0$が点スペクトルになるかどうかを考察した。結果としてH_θが埋蔵固有値を持たないスパースポテンシャルの十分条件を与えることができた。また具体例として任意のθに対してH_θが埋蔵固有値を持たないようなスパースポテンシャルVを構成した。このときθを$0\le\theta\le\pi/2$とするとH_θのスペクトルは、絶対連続スペクトルと点スペクトルは存在せず、区間$[0,\infty)$が特異連続スペクトルである。またθを$-\pi/2<\theta<\arctan((-1+\sqrt{3})/2)$とすると$H_\theta$のスペクトルは、絶対連続スペクトルは存在せず、ただ一つの負の点スペクトルが存在し、区間$[0,\infty)$が特異連続スペクトルである