

Arithmetic Dijkgraaf–Witten Theory for Number Rings

平野, 光

<https://hdl.handle.net/2324/6787430>

出版情報 : Kyushu University, 2022, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 平野 光

論 文 名 : Arithmetic Dijkgraaf-Witten Theory for Number Rings
(代数体の整数環に対する数論的 Dijkgraaf-Witten 理論について)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本学位論文では、数論的位相幾何学における 3 次元多様体と代数体の整数環との類似、結び目と素イデアルとの類似に基き、(2+1)次元 Dijkgraaf-Witten 理論の数論類似を追究する。

Dijkgraaf-Witten 理論は有限ゲージ群に関する Chern-Simons ゲージ理論であり、Atiyah による TQFT (topological quantum field theory) の具体例である。TQFT とは、多様体の位相不変量を構成するための枠組みであり、Dijkgraaf-Witten TQFT から得られる不変量(分配関数)は Dijkgraaf-Witten 不変量と呼ばれる。

近年、数論的位相幾何学における種々の類似に基き、Minhyong Kim 氏は数論的 Chern-Simons 理論を創始し、ゲージ群が有限群や p 進 Lie 群の場合に、Chern-Simons 汎関数の数論類似を(総虚な)代数体の整数環に対して構成した。また、同氏と彼の共同研究者等は、数論的 Chern-Simons 不変量に関する decomposition formula を示し、それを用いて数論的 Chern-Simons 不変量の具体例を計算した。

本学位論文の概要は次の(1)~(4)の通りである。

- (1)ある 3 次元球面の分岐被覆に対して、 $\text{mod } 2$ Dijkgraaf-Witten 不変量を計算する公式を与えた結果を述べる。
- (2)(topological な) (2+1)次元 Dijkgraaf-Witten TQFT の構成を復習する。
- (3)(一般の)代数体の整数環に対して数論的 Dijkgraaf-Witten 不変量を定義し、(1)の数論類似として、ある実二次体の整数環に対して $\text{mod } 2$ 数論的 Dijkgraaf-Witten 不変量を計算する公式を与えた結果を述べる。
- (4)特別な設定の下で(2+1)次元 Dijkgraaf-Witten TQFT の数論類似を構成した結果を述べる。

また、各章の具体的な内容は次の通りである。

2 章では、閉 3 次元多様体に対して Chern-Simons 不変量、Dijkgraaf-Witten 不変量の定義を復習し、ある絡み目上分岐する 3 次元球面の二重分岐被覆に対して $\text{mod } 2$ Dijkgraaf-Witten 不変量を計算する公式を与える。

3 章では、Atiyah による TQFT の定義を復習し、(topological な) Dijkgraaf-Witten TQFT の構成について概説する。具体的には、各有向閉曲面に対して、Chern-Simons 1-cocycle と prequantization bundle を構成し、各有向コンパクト 3 次元多様体に対して、Chern-Simons 汎関数の定義を行い、それらを用いて quantum Hilbert space と分配関数を構成する。

4 章では、2 章の内容の数論類似を述べる。即ち、(一般の)代数体の整数環に対して Chern-Simons

不変量、Dijkgraaf-Witten 不変量の定義を与え、ある実 2 次体の整数環に対して、2 章で示した公式の類似を示す。

5 章では、3 章の内容に基き、特別な設定の下で数論的 Dijkgraaf-Witten 理論の構成を述べる。具体的には、代数体の有限素点の有限集合に対して、Chern-Simons 1-cocycle, prequantization bundle の数論類似を構成し、代数体の整数環から有限素点の有限集合を除いたものに対して、数論的 Chern-Simons 汎関数の定義を行い、それらを用いて quantum Hilbert space と分配関数の数論類似を構成する。さらに、M.Kim 氏らによる decomposition formula を用いて、数論的 quantum Hilbert space と分配関数らに関する gluing formula を示す。