

An embedding of a smooth quandle into a Lie group

米村, 拳太郎

<https://hdl.handle.net/2324/6787429>

出版情報 : Kyushu University, 2022, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	米村 拳太郎			
論 文 名	An embedding of a smooth quandle into a Lie group (或る多様体構造を持つカンドルのリー群への埋め込み)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	落合 啓之
	副 査	九州大学	教授	佐伯 修
	副 査	九州大学	教授	鍛冶 静雄
	副 査	大阪公立大学	教授	田丸 博士

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

カンドル(quandle)は、1982年に D. Joyce と S. V. Matveev によってそれぞれ独立に定義された代数系であり、結び目理論へ応用することを目的に研究が行われてきた。J.S.Carter-D. Jelsovsky-S. Kamada-L. Langford-M. Saito によるカンドルコサイクル不変量や、A. Inoue-S. Kabaya による結び目に対する複素体積のカンドルコサイクル不変量による構成など、結び目理論の研究者にとって興味深い研究対象である。カンドルの抽象的な理論は十分に発展していて、カンドルコサイクル不変量を調べる上で重要なカンドルコホモロジーの理論や、ガロア圏の話題と関連した Eisermann によるカンドル被覆の理論がある。

一方で、各点において点対称が定義される多様体を対称空間と呼ぶ。対称空間において、点対称を用いて演算を定義したものはカンドルになる。この事実は D. Joyce によって早い段階に指摘されており、カンドルは対称空間と関係の深い対象であることが認識されている。その後も、この認識はカンドルの研究者の間で共有されているものの、対称空間とカンドルの両者を具体的に関連付けた研究は少ない。離散的なカンドルのあるクラスに対しては Riemann 多様体の二点等質性の類似物としての研究が田丸博士らによって行われている。近年になって、石川勝巳は多様体構造と滑らかな演算を持つ smooth quandle というカンドルのクラスを定義した。Joyce が言及した対称空間上に定まるカンドルもこのクラスに含まれる。しばしば、カンドルのクラスは群のクラスと比較されるが、smooth quandle は群における Lie 群に相当するカンドルのクラスである。

このような状況のもとで、本論文では smooth quandle と Lie 群の共役カンドルの間の関係に着目し、以下のように予想した：代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle は、適当な Lie 群の共役カンドルに smooth quandle として、すなわち多様体構造と代数構造を同時に埋め込むことが出来るであろう。共役カンドルの中に扱いやすいカンドルの具体例を豊富に構成することが出来るが、そのように得られるカンドルがどのぐらいの広さを持っているかを 2 種類の連結性のもとで定式化したものである。一般のカンドルの中には共役カンドルに埋め込むことのできないものも知られているが、この予想は多様体の構造と 2 種類の連結性のもとでは常に埋め込まれることを主張するものである。この論文では、この予想を球面カンドルの場合に肯定的に解決している。球面カンドルは対称空間の一種であり、対称空間上に定まるカンドルの構造を共役カンドルを用いて代数的なアプローチだけでなく位相的な構造からもアプローチできる可能性があることをこの結果は示唆している。

本論文は、5 つの章によって構成されている。第 1 章では、本論文の研究の動機や背景が述べら

れ、将来的な展望も広く議論されている。第2章では、カンドルや smooth quandle に関する基本的な事項及び本論文で扱う具体例が述べられている。第3章では、本論文の主定理を導く際に重要なステップとなる、Lie 群の滑らかな作用の被覆を用いた持ち上げについて述べられている。それぞれは位相幾何学や微分幾何学・表現論で既知の事項ではあるものの、主定理で用いられる基本的テクニックが丁寧にまとめられている。第4章では、本論文の主定理である球面カンドルの Lie 群への埋め込みを構成している。球面でよくあるように次元によって状況が異なるため、1次元、偶数次元、そして奇数次元、の3つの場合に分けて議論をおこなっている。1次元の場合は2次直交群を用いて具体的な式で埋め込みが簡単に実現できる。本題は次元が2以上の場合であり、ピン群に埋め込むことができるが、次元の偶奇により埋め込み先の連結成分が異なる。位相幾何学では連結なものの被覆空間を考えることが多く、表現論でも連結成分に限定して議論するケースが多いが、ここではカンドル準同型が連結群の範囲を逸脱している。また、内部自己同型として球面を直交群に写像すると忠実にならない。そこで一旦射影空間に落とした上で再度球面に持ち上げることでピン群への埋め込みを構成している点が本論文の興味深いアイデアである。最後の5章では、主定理の応用と予想に対する見解について言及している。

以上の結果は、連続構造をもつカンドルの研究において一つの指針となる予想を提示し、その予想を肯定する基本的な事例を与えている。本論文の結果は、カンドルだけでなく対称空間などの文脈においても将来的に発展する可能性を持つものであり、位相幾何学の分野において価値ある業績と認められる。

以上のことから、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。