The p-adic valuations of the critical values of L-functions associated to elliptic curves

野本, 慶一郎

https://hdl.handle.net/2324/6787428

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士

（様式６－２）

氏　　　名	野本　慶一郎
論　文　名	The *p*-adic valuations of the critical values of *L*-functions associated to elliptic curves （楕円曲線に付随する *L* 関数の臨界値の *p* 進付値）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　　　　　　教授　　　小林　真一 副　査　　九州大学　　　　　　　教授　　　落合　啓之 副　査　　九州大学　　　　　　　教授　　　縫田　光司 副　査　　東京電機大学未来科学部　准教授　千田 雅隆 副　査　　大阪大学理学研究科　　　准教授　太田 和惟

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

代数体上定義された代数多様体に付随する Hasse-Weil L-関数や保型 L-関数の特殊値は，数論的に重要な不変量と結びつくと考えられている．古典的には類数公式があり，楕円曲線に関する Birch and Swinnerton-Dyer 予想（BSD 予想）もまたそのような予想である．そして Beilinson-Bloch-Kato 予想は，楕円曲線のみならず，一般のモチーフに関する Hasse-Weil L-関数の特殊値に，どのような数論的量が現れるかを精密に予想するもので，現代整数論における最も中心的な課題の一つになっている．

本論文では，有理数体上の楕円曲線やガウス数体上の CM 楕円曲線の中心臨界点における特殊値の p 進的性質を考察した．まずその意義について述べる．有理数体上の楕円曲線 E の Hasse-Weil L-関数 L(E/Q, s)に関して，s=1 は関数等式の中心点であると同時に臨界点でもあり，BSD 予想と結びつけられる最も興味深い点である．実際，まず円周率の一般化である楕円周期Ωがあって，L(E/Q, 1)/ Ωは有理数になることが知られている．そして BSD 予想の特別な場合として，L(E/Q, 1)が 0 でないときは，E の有理数解は有限個しかなく，楕円曲線 E の数論で最も大切な不変量である Tate-Shafarevich 群の有限性が知られている．さらに強 BSD 予想によれば，特殊値の代数部分 L(E/Q, 1)/ Ωの分子には Tate-Shafarevich 群の位数の情報が現れると予想されている．よって L(E/Q, 1)/ Ωの p 進付値を計算する問題は，Tate-Shafarevich 群の p-Sylow 部分群の位数を求める問題ともいえ，極めて重要性の高いものである．実際，近年，強 BSD 予想に関して活発な研究が行われているが，それは岩澤理論などを用いて，特殊値の代数部分の p 進付値を評価することによってなされている．一般の代数体上の楕円曲線に対しても同様のことが期待されているが，特に虚二次体上の CM 楕円曲線に関しては，合同数問題や立方和問題への応用など，古典的な整数論の問題と深く関わっている．

本論文は Part 1 と Part 2 の二部分構成である．Part 1 は，ガウス数体上の j=1728 の CM 楕円曲線の２次ひねりに関して，s=1 での特殊値の代数部分の２進付値の下界を与えている．Part 2 では，j=0, 1728 となる CM 楕円曲線の２次ひねりが，いつ階数 2 をもつか決定する簡明な判定法を与えている．以下それぞれに関して説明する．

Part 1 では，ガウス整数 D に対して，y^2=x^3+Dx という方程式で定義される楕円曲線を扱う．これはガウス整数環に虚数乗法をもつ楕円曲線で，とくに D=-n^2 のときは，自然数 n が合同数かどうかを判定する曲線になっている．よって D を取り替えたときの特殊値の振る舞いを考察するこ

とは大変興味深い問題であるが，この曲線は楕円曲線 $y^2=x^3+x$ の２次ひねりであることから，特に素数２に関する２進的な振る舞いが面白く，また 2-Selmer 群の計算にも有効な形をしている．そこで先行研究においては，D が有理数の場合や D が特別な型のガウス素数である場合に，$s=1$ での特殊値の代数部分の２進的性質が考察され，2 進付値の下からの評価が与えられていた．特に Zhao 氏は，D がガウス整数で，D を割るすべての素因子の指数が等しい場合に，いわゆる Zhao の方法を開発した．Zhao の方法は他の楕円曲線にも応用できる汎用性の高いものであったが，D を割る素因子の指数が揃ってないときは，直接的には適用できないものであった．このような中，野本氏は Zhao の方法を反復適用する multiple Zhao's method を考案し，ガウス素数 D に関する条件をほぼ取り除くことに成功した．本論文では $j=1728$ の楕円曲線しか扱っていないが，野本氏の方法は Zhao's method の汎用性をさらに高めるもので，今後より様々な楕円曲線に対しても適用されていくと推測される．

Part 2 では，素数 p を固定し，有理数体上の楕円曲線 A_p: $x^3+y^3=p$ と E_p: $y^2=x^3+px$ の階数を考察する．一般に楕円曲線の Mordell-Weil 群の階数を決定することは，BSD 予想を仮定したとしても困難な問題である．例えば上記の楕円曲線の階数は，Tate-Shafarevich 群の有限性を認めると，どんな素数 p に対しても常に２以下であることが知られている．また階数の偶奇は簡単に決定できることも知られている．よって階数がいつ 0 でいつ 2 かを決定できればよいのだが，現代のコンピューターを持ってしても，標準装備されている降下法では判定できないというのが現状である．しかしながら３０年近く前に，Rodríguez-Villegas と Zagier は，楕円曲線 A_p の階数を判定する簡明な判定法をいくつか与えていた．そのうちの一つは，簡単な漸化式で定義される多項式の列を構成し，その$(p-1)/3$ 番目の多項式の定数項が p で割り切れるかで，階数が 2 か 0 かを判定できるというものである．ただ残念なことに，彼らの判定法の証明の詳細は与えられておらず，その後の発展も止まっていた．このような中，野本氏は彼らの証明の再現を試み，結果としては彼らよりも優れた漸化式を得ることができた．また証明の詳細を詰めたことにより，他の楕円曲線にも一般化が可能となり，本論文の中で，楕円曲線 E_p に対しても同様の判定法を得ることができた．この結果を用いて，これまでには階数判定できていなかった楕円曲線に対しても，E_p という型ならば容易に判定ができるようになった．A_p, E_p 以外の型の楕円曲線に対しても，この手法が有効な場合は多くあると思われ，野本氏の仕事は，今後この方向の研究の発展に大きく貢献すると思われる．

以上の結果は，L-関数の特殊値の整数的研究およびその応用において，価値ある業績と認められる．よって，本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．