九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

The p-adic valuations of the critical values of L-functions associated to elliptic curves

野本, 慶一郎

https://hdl.handle.net/2324/6787428

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：野本 慶一郎

論 文 名　：The p-adic valuations of the critical values of L-functions associated to elliptic curves
(楕円曲線に付随する L 関数の臨界値の p 進付値)

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

ζ 関数や L 関数の特殊値は整数論において最も魅力的な対象の一つである。例えば、Dirichlet L 関数に対する類数公式は、Dirichlet L 関数の $s=1$ における特殊値と二次体の類数の間の関係を記述するものである。同様に、楕円曲線に付随する L 関数の中心値にも数論的不変量が現れると考えられている。E を代数体上定義された楕円曲線とする。このとき E の Hasse-Weil L 関数に関して、その $s=1$ における特殊値は、代数的数倍の違いを除いて E の周期に等しいと予想されている。さらに、強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想は、その代数的数が Tate-Shafarevich 群や玉河数といった楕円曲線の不変量で表されるということを予想している。したがって各素数 p に対して、その代数的部分の p 進付値を調べることは重要な課題となっている。本論文では、この中心値の代数的部分の p 進付値に関連した二つの話題を扱う。

第一部では、虚数乗法をもつ楕円曲線に付随する L 関数の臨界値の 2 進付値の振る舞いを調べる。1997 年に Zhao は、Gauss 数体上定義された楕円曲線 $E_{-D}: y^2=x^3+Dx$ に付随する Hecke L 関数の臨界値の代数的部分の 2 進付値の下界を与えた。ただし、Gauss 整数 D には適当な条件が課されている。その手法は、パラメータ D に含まれる異なる素因子の個数に基づく数学的帰納法を上手く利用したものであり、しばしば Zhao’s method と呼ばれる。現在に至るまで、Zhao’s method は様々な楕円曲線の族に対して適用され、さらには L 関数の臨界値の非消滅性を示す応用も考案されており、今後の発展が期待される手法の一つである。しかし技術的な理由により、パラメータ D に含まれる素因子の指数が全て等しいという限られた条件下でしかZhao’s methodが適用できないという問題点があった。第一部では、楕円曲線 E_{-D} についてその問題点を克服し、素因子の指数に関する条件を外す。その証明においては、Zhao’s method を多重に使用することが本質的である。本手法を用いることで、虚二次体上定義された CM 楕円曲線に付随する Hecke L 関数の臨界値の 2 進付値が全て評価可能となることが期待される。

第二部では、有理数体上定義された楕円曲線 A_p: $x^3+y^3=p$ と $E_{-p}: y^2=x^3+px$ を考える。Rodriguez-Villegas と Zagier により、楕円曲線 A_p の階数が 2 であることの必要十分条件が、ある簡単な漸化式から定まる多項式列の定数項を用いて与えられた。彼らの結果は「素数 p が有理数の 3 乗の和で表せるかどうか」という、古典的な Diophantine 問題に対する判定法を与えている。第二部における研究成果は二つの部分から構成されている。一つは，彼らの与えた漸化式よりも計算効率の良い漸化式を与えたことである。もう一つは、別の楕円曲線 E_{-p} に対して、階数が 2 であることの必要十分条件を、似たような漸化式を用いて与えたことである。証明の要の一つは、楕

円曲線 A_p, E_{-p}の Hasse-Weil L 関数の臨界値の代数的部分と、素数に依存しない楕円曲線 A_1, E_{-1}に付随する Hecke L 関数の中心値の代数的部分との間に、素数 p を法とした合同関係式を導くところにある。本結果を用いることで、これら楕円曲線の階数の計算が多項式の初等的な計算に帰着され、計算機を用いて容易に実装することが可能となる。