Mathematical analysis for the weighted interpolation inequalities and the rotating MHD equations

米田, 慧司

https://hdl.handle.net/2324/6787427

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	米田　慧司
論　文　名	Mathematical analysis for the weighted interpolation inequalities and the rotating MHD equations （重み付き補間不等式および回転磁気流体方程式の数学解析）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　　　　　　教授　　瀬片　純市 副　査　　九州大学　　　　　　　教授　　福本　康秀 副　査　　九州大学　　　　　　准教授　　ブレジナ　ヤン 副　査　　東京大学　　　　　　准教授　　高田　了

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

米田慧司氏の博士学位論文は，「Mathematical analysis for the weighted interpolation inequalities and the rotating MHD equations」（重み付き補間不等式および回転磁気流体方程式の数学解析）と題し，球対称関数に対する重み付き高階 Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式の改良，また Coriolis 力付き磁気流体力学方程式系の初期値問題に対する時間大域解の存在と一意性，および回転速度を無限大とした際の解の漸近挙動に関する研究からなる．

本論文の第一部では，球対称関数に対する重み付き高階補間不等式の改良が論じられている．本論文で研究対象としている積型の重み付き補間不等式は，Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1982, 1984) によって1階補間不等式として導入されたものである．またこの関数不等式の高階微分を含む形での一般化が Lin (1986) によって証明された．これらの補間不等式に対しては，その最良定数や極値関数の存在性，および非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性理論への応用などの研究成果が知られており，関数不等式としての研究のみならず，非線形偏微分方程式への応用の観点からも重要な研究対象となる．同不等式は，原点からの距離の冪を重み関数とする積型重み付き不等式であり，その冪の取り得る範囲（許容指数範囲）は，Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1984), Lin (1986) によって必要十分条件が与えられている．この重み冪の許容指数範囲の改良に関する研究が，De Nápoli-Drelichman-Durán (2012) によって考察された．そこでは Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1984) による1階補間不等式が取り扱われ，関数に球対称性を課した際には，不等式の成立する重み冪の許容指数範囲がより広い範囲へ拡張されることが証明された．したがって，このような球対称性による重み冪の許容指数範囲の改良が，Lin (1986) によって示された高階補間不等式に対しても成立するかどうかが，自然な問題として考えられる．米田氏はこの問題に取り組み，高階微分を含む重み付き補間不等式に対しても，関数の球対称性によって重み冪の許容指数範囲がより広い範囲へ拡張されることを証明した．これは先行研究である De Nápoli-Drelichman-Durán (2012) による1階補間不等式に対する改良の結果を含む一般化となっている．また先行研究においては，改良された許容指数範囲は関数の可積分性指数を用いた形で記述されていたが，米田氏は不等式が有するスケール不変性条件を用いることで，重み冪および補間指数のみを用いた同値な特徴付けを発見し，高階版への自然な拡張を与えた．証明において，米田氏は部分積分法を巧みに用いることで，補間指数が1の場合に，同問題を重み付きHardy-Littlewood-Sobolev 不等式に対する球対称改良の

問題へと帰着させた．更に補間理論を駆使することで，先行研究での証明手法を改良し，重み付き高階補間不等式に対して，球対称性による重み冪の許容指数範囲の拡張を与えることに成功した．

論文の第二部，第三部では，回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性磁気流体力学方程式系の初期値問題に対して，時間大域解の存在と一意性，および回転速度を無限大とした際の解の漸近挙動が論じられている．一般に非線形偏微分方程式の初期値問題に対する適切性を考察する際，その方程式に固有のスケール変換に関して不変な関数空間をスケール臨界空間といい，スケール臨界空間における適切性が重要な問題となる．本論文第二部では，3次元全空間において同方程式の初期値問題を考察し，スケール臨界な Sobolev 空間に属する初期速度場および初期磁場に対して，回転速度を十分大きく取った際の時間大域解の一意存在を証明している．同方程式に対する先行研究では， Ahn-Kim-Lee (2021) および Kim (2022) により，スケール劣臨界な Sobolev 空間に属する初期値に対する時間大域解の存在と一意性が示された．本論文では，速度場に対する線形解として，磁場による影響を考慮した修正線形解を導入し，Coriolis 力による分散性を用いてその線形解に対する非斉次時空間積分評価等を確立することで，スケール臨界空間における同方程式の時間大域的一意可解性を証明した．本結果はまた，Iwabuchi-Takada (2013) による Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する先行研究の磁場誘導方程式 (Maxwell方程式) を連立させた方程式系への一般化となっている．本論文第三部では，鉛直方向に周期境界条件を課した3次元層状領域において，同方程式の初期値問題を考察している．第二部と同様に，スケール臨界な Sobolev 空間に属する初期速度場および初期磁場に対して，回転速度を十分大きく取った際の時間大域解の一意存在を証明している．更に，回転速度を無限大とする極限における解の漸近挙動を考察し，同方程式の時間大域解である3次元の速度場および磁場が，2次元非圧縮性磁気流体力学方程式と3次元誘導方程式との連立系の時間大域的一意解に収束することを示し，回転による流れの異方化を磁気流体力学方程式系においても証明することに成功した．

以上のように米田氏は重み付き高階補間不等式および Coriolis 力付き磁気流体力学方程式に関して顕著な研究成果を挙げ，それらは関数不等式および非線形偏微分方程式の数学解析において価値ある業績であると認められる．よって，本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．