Studies on discrete differential geometry and non-steady state nucleation in terms of the elliptic theta functions

重富, 尚太

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：重富　尚太

論 文 名　：Studies on discrete differential geometry and non-steady state nucleation in terms of the elliptic theta functions
（楕円テータ函数による離散微分幾何学と非定常核形成に関する研究）

区　　分　：甲

論 文 内 容 の 要 旨

楕円テータ函数は様々な数学的性質を持つということが知られている．例えば，楕円テータ函数は数多くの恒等式を満たすが，これらは可積分な方程式の解を構成するときに非常に役に立つ．より具体的には，可積分な微分方程式の従属変数に対して適切な変換を行い，元の方程式を広田型双線型方程式に書き換え，その広田型双線型方程式の解を，楕円テータ函数の満たす恒等式から構成するという流れである．また，可積分な方程式は，解の性質を保ったまま離散化することが可能であるということも知られている．一方で，可積分系と関連した幾何学的対象の研究も活発に行われており，特に，微分幾何学においては，広田型双線型方程式の解を利用して，曲線の等周変形を表す明示公式を構成するという研究が興味深い．また，可積分性を利用した曲線や曲面の離散化も研究されており，特に，振率一定曲線の離散化である振率角一定離散曲線は，カライドサイクルと呼ばれる様々な特異的性質を持つリンク機構とのつながりが指摘されており，工学への応用という意味でも興味深い．一方で，楕円テータ函数は流体力学や統計力学といった物理学の分野にも登場することが知られているが，本論文では，非定常核形成と呼ばれる現象に着目する．非定常核形成とは，炭酸水の泡立ちの最初期段階に見られるような現象であり，日常的に観察できるものである．この現象を特徴付ける量である，非定常核形成速度が楕円テータ函数を用いて表されることは既に指摘されていたが，その数学的性質を活用した研究はこれまでになかった．

本論文では,楕円テータ函数を軸として,離散微分幾何学および非定常核形成について研究する．まず第一章で全体を概観し，第二章では，オイラーの弾性曲線およびその離散的類似物の等周変形を表す明示公式を楕円テータ函数で構成する．オイラーの弾性曲線とは，ピアノ線などの細い１次元弾性体を曲げた時に見られる平面曲線で,弾性エネルギーを極小にする形状として知られている．この曲線の曲率は，ある非線形常微分方程式を満たすことが知られているが，その方程式の解は，有名な可積分方程式である modified Korteweg-de Vires（mKdV）方程式の進行波解と対応している．一方で，mKdV 方程式はユークリッド平面上の曲線の等周変形を表す方程式としても有名であり，この方程式によって表される曲線の等周変形の明示公式を，広田型双線型方程式の解を用いて構成するという研究結果は既に知られているが，楕円テータ函数による進行波解に対応する曲線の明示公式は得られていなかった．第二章の一つ目の結果は，オイラーの弾性曲線の等周変形を表す明示公式を，楕円テータ函数を用いて構成したことである．また，離散弾性曲線とは，弾性曲線の可積分性を利用して構成される離散曲線であり，弾性曲線と類似の性質を持ち，離散曲率に対する差分方程式を用いて定義される．第二章の二つ目の結果として，半離散ポテンシャル mKdV 方程式によって表される，平面離散曲線のなめらかな等周変形を表す明示公式を，楕円テータ函数を用い

て構成し，各時刻において，この曲線の離散曲率が，離散弾性曲線を定義する差分方程式を満たしていることを証明した．さらに，第二章の三つ目の結果として，離散ポテンシャル mKdV 方程式によって表される，平面離散曲線の離散的な等周変形を表す明示公式を，楕円テータ函数を用いて構成し，各時刻において，この曲線の離散曲率が，離散弾性曲線を定義する差分方程式を満たしていることを証明した．

また，可積分性を利用して明示公式を構成する研究は，平面曲線だけではなく，空間曲線に対しても行われてきた．本論文の第三章では，広田型双線型方程式の解を用いて，空間曲線および空間離散曲線の明示公式を与えるという先行研究の結果を活用し，捩率が一定の空間曲線の明示公式と，その離散的類似物である捩率角一定の空間離散曲線の明示公式を，楕円テータ函数を用いて構成した．曲線が閉じるための条件も明示的に導出した．

第四章では，前章の結果の一部をさらに発展させ，捩率角一定で，閉じた空間離散曲線の，セグメント長と捩率角を保存する変形の明示公式を楕円テータ函数で構成する．この明示公式は，カライドサイクルの明示公式になっていると考えられる．カライドサイクルとは，合同な四面体を環状に繋げて構成される閉リンク機構であり，紙やプラスチック，金属などといった様々な素材で作ることができる．この機構はクルクルと変形する点が面白く，古くからおもちゃなどにも利用されてきた．古典的なカライドサイクルは６つの四面体から構成されるが，７つ以上の四面体を用いたカライドサイクルを考えることもできる．特に，メビウスカライドサイクルと呼ばれるものは，変形の自由度が 1 であることが数値的に確認されており，制御性に優れており，数学的・物理学的・工学的に興味深い対象であり，特許にもなっている．この機構を捩率角一定の閉離散曲線としてモデル化し，曲線の変形が半離散ポテンシャル mKdV 方程式または半離散 sine-Gordon 方程式で表現されるということを指摘した研究が知られているが，曲線の明示公式そのものは得られていなかった．第四章では，楕円テータ函数を用いてこのモデルに対する一つの明示公式を与える．また，この結果に付随して，曲線の持つポテンシャル函数が，先行研究では指摘されていなかった，別種の半離散ポテンシャル mKdV 方程式も満たしているということも判明した．半離散ポテンシャル mKdV 方程式や半離散 sine-Gordon 方程式の解はいくつも作られているが，両方を同時に満たす解はあまり見られない．例えば，半離散 sine-Gordon 方程式の 2, 3-ソリトン解を半離散ポテンシャル mKdV 方程式に代入すると，解にならないことが確認できる．一方で，メビウスカライドサイクルの変形の自由度が 1 しかないという予想が正しいとすると，合同変換の差を除けば，この機構に対する変形方程式は全て一致するはずであるという結論が導かれる．また，ポテンシャル函数は合同変換の影響を受けない量であるから，それに対する微分差分方程式が複数あれば，同時に成立しなければならないということを意味する．第四章で構成された曲線の持つポテンシャル函数は，２種類の半離散ポテンシャル mKdV 方程式と，半離散 sine-Gordon 方程式の解になっており，この予想と整合する．

第五章では，非定常核形成と呼ばれる現象を特徴付ける量である，非定常核形成速度が満たす非自明な関係式を導出し，実験研究における応用を考察する．この結果を活用することで，わずかな観測データから過去や未来における非定常核形成の様子を精密に推定することが可能になると期待できる．これらの関係式の導出には，楕円テータ函数に満たす様々な恒等式を活用する．