Total number of connected bipartite graphs with given Betti numbers and their applications

蓮井, 太朗

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	蓮井　太朗
論　文　名	Total number of connected bipartite graphs with given Betti numbers and their applications (ベッチ数を指定した連結２部グラフの総数とその応用)
論文調査委員	主　査　　九州大学　　　　　　　教授　　白井　朋之 副　査　　九州大学　　　　　　　教授　　溝口　佳寛 副　査　　学習院大学　　　　　　教授　　樋口　雄介

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

Erdős–Rényi グラフ過程は、完全グラフの各辺に[0,1]上の一様乱数を独立に与えて、それらを各辺の発生時刻とみなして得られる増加するグラフ列からなる連続時間確率過程である。この確率過程は、1950 年代後半に P. Erdős と A. Rényi によって導入されたものであるが、確率論の種々の問題に関連してあらわれ、また複雑ネットワークやランダムトポロジーの問題などの観点からも、近年詳しく研究されているモデルの一つである。E.M.Wright は、この Erdős–Rényi グラフ過程の時間発展において、連結部分グラフがどのように成長していくかを詳しく研究している。その先行研究では、サイクルの個数（ベッチ数）を指定したときの完全グラフの連結部分グラフの数え上げとその頂点数を無限大にしたときの漸近挙動を調べ、連結部分グラフの成長過程の解析を行っている。本論文は、この先行研究における完全グラフを完全２部グラフに置き換えて、Erdős–Rényi 型のランダム２部グラフ過程における連結部分グラフの成長過程を解析することを念頭において、完全２部グラフ内のベッチ数を指定した連結部分グラフの個数の数え上げの問題を取り扱ったものである。また，この数え上げ問題は、いわゆるカッコーハッシングと呼ばれるハッシングの文脈では、そのハッシュ表の生成アルゴリズムにおいて、各キーの挿入場所を頂点、キーの移動先を辺とあらわすランダム２部グラフの中に、無限ループができない確率を評価するために応用される。

頂点数を指定した完全グラフの中にある全域木の個数は、A.Cayley の古典的な結果により頂点数による具体的な表示が知られている。また、その後 Rényi によって、ユニサイクル(１つだけサイクルをもつ連結グラフ)の個数の頂点数による具体的な表示が与えられて、漸近挙動も知られている。さらに、Wright によりこの結果はサイクルの個数（ベッチ数）を指定した場合の連結部分グラフの個数の数上げの問題に拡張されて、連結成分の成長過程の問題の解析へと応用された。完全２部グラフにおける同様の問題については、Cayley の結果の対応する結果としては、２部グラフの２つの独立頂点集合のそれぞれの頂点数をあらわす２変数による数列として具体的にあらわせることが H.I.Scoins によって知られている。また、Rényi の結果に対応する完全２部グラフ内のユニサイクルの研究は、比較的最近上述のカッコーハッシングの問題を背景に、データ探索アルゴリズム論的な興味から R.Kutzelnigg によって考察されている。ただ、その先の Wright の結果に対応する結果は得られていなかった。

本論文の提出者である蓮井太朗は、完全２部グラフの場合に、指定したベッチ数 k をもつ連結部分グラフの個数の数え上げ問題を取り上げて考察した。各独立集合のそれぞれの頂点数 r,s とベッチ数 k をパラメータとした連結部分グラフの個数 $f_k(r,s)$に対する関係式を組合せ的に導き、それに対応する二変数の指数型母関数 $F_k(x,y)$の偏微分方程式の系列を導出した。その方程式系を常微分方程式に帰着して具体的に解く方法を与えて、帰納的に二変数母関数の具体的な表示が与えられることを示し、実際いくつかの k についてそれを実行して表示式を求めた。この結果から、特にユニサイクルの個数についての Kutzelnigg の先行研究にある母関数の表示式には修正の必要があることを指摘した。また、上記の原理的に求められる二変数母関数についてさらに詳しく調べるために，連結２部グラフに対する基本グラフとよばれる概念を導入して，一般の連結２部グラフは縮約により、基本グラフの組合せで表現される標準形へ変形できることを注意した．木の個数に関する母関数を $T=F_0(x,y)$とし，その各変数に対するオイラー微分をそれぞれ T_x, T_y とすると，一般の $F_k(x,y)$は，各標準形に付随する T_x, T_y の有理関数の和として表現できることを示した．その得られた二変数母関数の表示の対角成分に着目することにより、頂点数を固定した完全２部グラフ内で、指定したベッチ数をもつ連結部分グラフの個数の漸近挙動の主要項が，完全グラフにおける同様の漸近挙動の主要項の 2 のべき乗倍の関係にあることを示した。

以上の結果は、組合せ的確率論およびグラフ理論の分野において価値ある業績と認められる。
よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。