Total number of connected bipartite graphs with given Betti numbers and their applications

蓮井, 太朗

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学），課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：蓮井 太朗

論 文 名　：Total number of connected bipartite graphs with given Betti numbers and their applications
（ベッチ数を指定した連結 2 部グラフの総数とその応用）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

Erdős-Rényi ランダムグラフ過程において，Betti 数が特定の値に変化する連結成分が出現する回数の期待値およびその漸近挙動は計算されている．これらの導出には，辺と頂点を指定した場合の連結グラフの総数およびその漸近挙動が必要である．一方，Erdős-Rényi ランダム 2 部グラフ過程においては，同じような期待値やその漸近挙動は計算されていない．2 部連結グラフの総数およびその漸近挙動が知られていないからである．

そこで本論文では 2 部の Erdős-Rényi ランダムグラフ過程の連結グラフの総数の期待値問題を解くため，辺と頂点の数を指定し，Betti 数を与えた場合の連結 2 部グラフの総数を数え上げる．

以下，頂点集合$V=(V_1,V_2)$，辺集合Eとする単純な 2 部グラフを$BG(V_1,V_2,E)$とする．また$|V_1|=r, |V_2|=s,\ |E|=r+s-1+k$となるような連結な 2 部グラフの総数を記号$f(r,s,r+s-1+k)$で表すとする．このとき$F_k$に関する 1 階の線型偏微分方程式,

$$\left(D_x+D_y+k\right)F_{k+1}=\left(D_xD_y-D_x-D_y+1-k\right)F_k+\sum_{l=0}^{k+1}D_xF_l\cdot D_yF_{k+1-l}$$

を得ることができる．ただし，D_x, D_yはそれぞれx, yの Euler 微分演算子である．

本論文ではこうして得た 1 階線形偏微分方程式を帰納的に解き，指数型母関数の明示的な形を求め，その係数の漸近的挙動まで計算した．なお$r+s=n,\ k=1,2$の場合を主に論じている．このとき 0 以上の整数kは Betti 数に相当し，fの指数型母関数$F_k(x,y)$において，$k=1$のとき，

$$F_1(x,y)=-\frac{1}{2}\left(\log\left(1-T_xT_y\right)+T_xT_y\right)$$

となることを示した．ただし，T_xは$T\coloneqq F_0$のxでの Euler 微分，T_yは$T\coloneqq F_0$のyでの Euler 微分である．ここで，$\langle x^n\rangle F_1(x,x)$は$n$個の頂点を持つ Betti 数 1 の連結な 2 部グラフの総数を表す．この漸近挙動を以下のように示した．

$$\langle x^n\rangle F_1(x,x)=n^{n-1}\sum_{2\le k\le n/2}\frac{n!}{(n-2k)!\,n^{2k}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-1/2}\quad(n\to\infty)$$

同じく$k=2$の場合，指数型母関数$F_2(x,y)$について，$W\coloneqq T_xT_y,\ Z\coloneqq T_x+T_y$とすると，

$$F_2(x,y)=F_2(Z,W)=\frac{W^2}{24(1-W)^3}\{(2+3W)Z+2W(6-W)\}$$

となることを示し，さらにn個の頂点を持つ Betti 数 2 の連結な 2 部グラフの総数$\langle x^n\rangle F_2(x,x)$の漸近挙動を，

$$\langle x^n \rangle F_2(x,x) \sim \frac{5}{48} n^{n+1} \quad (n \to \infty)$$

と示した．先行研究によって$T = F_0$は知られている．よって$k \geq 2$のとき，$F_k = f_k(Z,W)$と書くとすると，帰納的な計算でこのf_kは，

$$f_k(z,w) = \frac{w^2}{(1-w)^{3(k-1)}} \sum_{j=0}^{k-1} q_{k,j}(w) z^j$$

となる予想を得た．$q_{k,j}$はwの多項式である．さらにその漸近挙動は，

$$\langle x^n \rangle F_k(x,x) \sim \frac{1}{2^{k-1}} \rho_{k-1} n^{n+(3(k-1)-1)/2} \quad (n \to \infty)$$

となる予想を立てた．なお，ρ_kは既知の定数である．

また，連結な単純 2 部グラフに対応する基本グラフを導入し，ラベル付き 2 部根付き木の本数に対する有理関数の基本グラフ上での和として，F_kの別の表現を与えた．基本グラフとは，連結で単純な 2 部グラフにおいて「葉および葉に隣接する辺を削除する」という操作を葉がなくなるまで繰り返し，次数 2 以下のサイクル構造を構成する頂点およびその頂点に隣接する辺を潰して得られるグラフである．基本グラフは元となった 2 部グラフのサイクルに関する情報を全て保存する．さて，このときF_kは以下のように表示できる．

$$F_k(x,y) = \sum_{\mathcal{B} \in BG_k} J_{\mathcal{B}}(x,y)$$

ただし，

$$J_{\mathcal{B}}(x,y) = \frac{T_x^{r_{\mathrm{sp}}+a_1+2a_2+b_2+c_2} T_y^{s_{\mathrm{sp}}+2a_1+a_2+b_1+c_2}}{g_{\mathcal{B}} \left(1 - T_x T_y\right)^{a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2}}$$

である．BG_kは基本グラフ全体の集合，$g_{\mathcal{B}}, r_{\mathrm{sp}}, s_{\mathrm{sp}}, a_i, b_j, c_k (i,j,k = 1,2)$は基本グラフ$\mathcal{B}$に関する情報である．

論文の最後では，データ探索アルゴリズム論およびランダムグラフ理論への主結果の応用を記述した．データ探索アルゴリズム論での応用については，2004 年に導入された Cuckoo hashing との関連を述べている．Cuckoo hashing が最適な形で動作するには，2 つのハッシュ表において，キーの挿入が無限ループしてはならない．ハッシュ表における各キーの挿入位置を頂点，キーの移動経路を辺と見なすと，キーの移動がユニサイクル構造を持つ連結な単純 2 部グラフの形になる場合に無限ループが発生する．これは本論文主結果の$k = 1$の場合に該当する．

ランダムグラフ理論での応用については，Erdős-Rényi ランダム 2 部グラフ過程において，特定の Betti 数を持つ連結成分の内部に辺を加えて完成するような連結成分の出現回数の期待値を考える際，本論文におけるF_kの漸近挙動が必要になる．また，1 個の連結成分のみに注目するのではなく，与えられた Betti 数を持つ 2 つの連結成分の間に辺を 1 本加え，Betti 数を 1 増加させたより大きな連結成分が出現するような回数の期待値を求める際にも，F_kの漸近挙動が必要になる．