

Reynolds数 $50 \sim 10^4$ における円柱後方の逆流域の測定

辰野, 正和

種子田, 定俊

<https://doi.org/10.15017/6769097>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 31, pp.29-44, 1969. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

Reynolds 数 $50 \sim 10^4$ における円柱後方の逆流域の測定

辰 野 正 和
種子田 定 俊

概 要

一様流中にある円柱において、Reynolds 数が40より大きい場合、円柱背後の流れは非定常となる。このように非定常となった流れを平均的速度場で見えた場合の逆流域を測定した。測定範囲は $50 < R < 10^4$ であるが、注目すべきことは、平均的逆流域の大きさは $R \approx 10^3$ の付近で極大値をとり、円柱の後端から円柱直径の約2.5倍にまで達することである。さらに Reynolds 数が大きくなると逆流域は逆に単調に縮小していく。

なお、水素気泡法により flow visualization を行ない、極端に長い露出時間で撮影された写真からも平均的逆流域の大体の大きさを知りうる事が判明した。

また、一様流中においた円柱の後方で、瞬間的に逆流を示す流れの範囲は、Reynolds 数とともに単調に大きくなる傾向を示し、 $R \approx 10^3$ の付近で円柱後端から円柱直径の約4.5倍、 $R \approx 10^4$ の付近では約7倍であった。

内 容

- I 緒 言
- II-1 平均的逆流域の計測
 - § 1 実験方法及び装置
 - § 2 実 験 結 果
- II-2 平均的逆流域の flow visualization
 - § 1 実験方法及び装置
 - § 2 実 験 結 果
- II-3 最大逆流域の計測
 - § 1 実験方法及び装置
 - § 2 実 験 結 果
- III 結 言

I 緒 言

一様な流れの中に、軸を流れに直角にして置かれた円柱のまわりの流れに関する研究は現在まで多くなされている。特に、Reynolds 数（以下、 R 数あるいは、 R と記す。）が40以下の流れに関しては、実験的にも理論的にも詳しい研究がなされている。Thom(1933)、Homann(1936) および Taneda(1956) 等による実験的研究によると、 $R \leq 40$ のとき、円柱背部に存在する一組の定常渦の長さ、つまり円柱後端から定常渦の後端 (wake stagnation point) までの距離は、 R 数にほとんど比例して増大し、 $R \approx 40$ では、円柱直径の2倍強にまで達することがわかっている。また、理論的には、Keller and Takami

(1966), Kawaguti and Jain (1966) 等が Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことによって実験と十分よく一致する解を得ている。 $R > 40$ の場合に関しては、種子田および本地 (1968) が、静止から一定速度で急に動きだした円柱の非定常後流渦の測定実験を行なっている。また、それに対応する数値解が Son and Hanratty (1969) によって報告されている。それらによると、円柱背部にできる非定常渦では、 $R \leq 40$ の定常渦の場合よりはるかに大きく引きのばされた双子渦が存在する。Grove and Acrivos 等 (1964) は、円柱の両側に壁を置き、あるいは円柱背後に splitter plate を置くことによって、乱れた流れの場を強制的に安定化し、高い R 数まで定常渦をつくって実験を行なっている。

しかし、実際には、 R 数が 40 を越えると円柱背部の流れは定常に存在しなくなる。 R 数が大きくなっていく場合の物体後方の wake に関しては、現在までに 2 つの異なった見解がある。すなわち、1 つは Helmholtz の不連続流モデルに対応する考え方である。それは、 $R \rightarrow \infty$ では、wake は 2 本の自由流線によって囲まれており、その内部の速度は零、圧力は一様流の圧力と等しいというものである。他の 1 つは、Batchelor 等が提唱しているもので、wake は $R \rightarrow \infty$ でもある一定の大きさをもった領域であり、その内部には渦度が存在するというものである。なお、Grove 等はその実験結果から、 R 数が非常に大きくなった場合でも、wake bubble は R 数に比例して大きくなるであろうということを示唆している。

ところで、我々は、広い範囲の R 数について、非定常になった円柱背部の流れの場を平均的速度場で見るという立場で実験を行なった。すなわち、 R 数が 40 を越えると Kármán 渦列を発生し、さらに R 数を上げると乱流となる円柱背部の流れの場も平均的に見るならば、 $R \leq 40$ のとき明瞭に観察されるところの双子渦に相当する領域が形成されており、その内部では逆流が存在する。しかしながらその逆流の大きさは、もはや定常の場合とまったく異なる。ところでこうした平均的速度場の流線を見つけることはきわめて困難であるので (Kovácszay は熱線流速計を使って $R = 56$ の実験を行なっている。ただし、逆流域の大きさは不明である。)、我々はその平均的逆流域の大きさ (円柱後端から平均的逆流域後端までの距離) のみに注目し、その計測を行なった。実験は $50 < R < 10^4$ の範囲の R 数について行なった。

なお、 $R > 40$ の円柱背部の流れに関する平均的 flow pattern の visualization はいままであまり明瞭なものが得られていない。我々は水素気泡法によって非定常な流れの場の flow visualization を試み、平均的逆流域を示す写真を撮影することに成功した。

また、 $R > 40$ の円柱背部の逆流域は常に変動しているが、瞬間的に逆流を示す流れの範囲 (以下、最大逆流域と呼ぶ) についても測定を行なったのでその計測結果を報告する。

II-1 平均的逆流域の計測

§ 1 実験方法及び装置

一様流中にある円柱の背部に逆流域が存在する場合、逆流域の後端つまり円柱背部の wake stagnation point の前後では流れは 180° 異なった方向を向いている。そこで、円柱の軸を含み主流方向に平行な面内で円柱背部の流れの方向を調べていって、その前後で流れの方向が 180° 異なる点を求めれば、

その点は逆流域の後端であるはずである。ところで、 R 数が十分大きい場合円柱背部の流れは乱れており、その逆流域も常に変動している。しかし、こうした場も平均的に見れば、 R 数によってきまった大きさの逆流域をもっている。そこで、円柱後方の各点で主流方向の流れおよび逆流の強さを長時間比較し、その強さが丁度等しい点を平均的速度場で見えた逆流域とした。

実験は写真1に示す水槽を使用し、静水中を一定速度で円柱を動かして計測を行なった。計測には、方向を敏感に感じるようにした熱線流速計を使用した。第1図に示すように、熱線として直径 100μ の2本の白金線を平行に極く接近させて並べた熱線流速計を作製し、2本の熱線が円柱の軸に平行になるように置いて使用した。また、これら2本の熱線は第2図に示すように平衡型のブリッジ回路に組んでいる。その加熱電流は約 $0.3 \text{ A} \sim 1.3 \text{ A}$ で電源は直流定電圧電源を使用している。このようにしておく

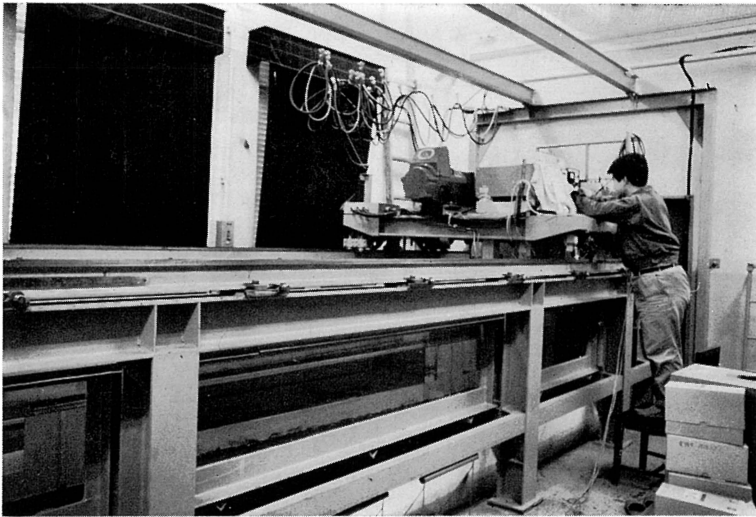
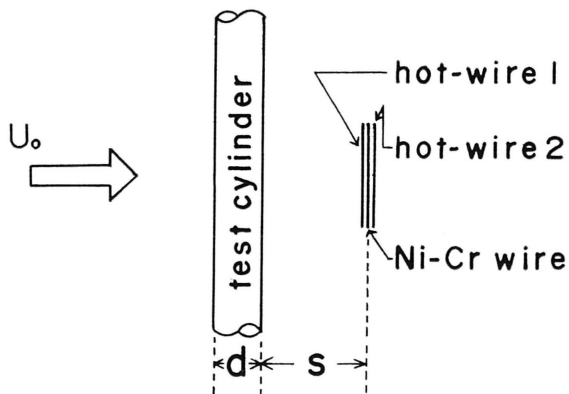


写真1 実験水槽



第1図 熱線の配置

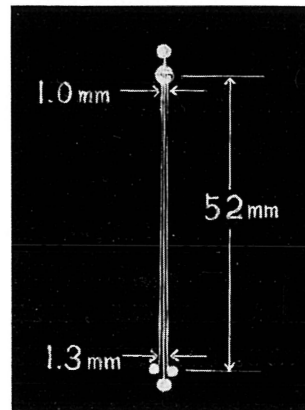
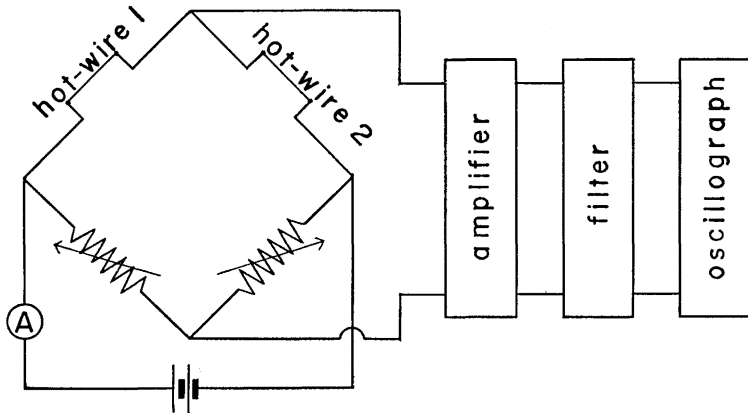


写真2 熱線流速計

hot-wire 1, hot-wire 2 の流れによる冷やされ方の違いによってブリッジ回路の平衡がくずれ、流れの方向およびその強さが容易に知りうる。ブリッジ回路に流れる電流は弱いものであるから、増幅器を通した後、オシログラフに記録する。なお、probe の感度を高めるため、2本の熱線の中央にニクロム線を張り熱源とした。このニクロム線の直径は 230μ である。その加熱電流は $0.6\text{A}\sim 3.0\text{A}$ で電源は熱線の電源とは独立に直流定電圧電源を使用している。ただし、同一R数の計測中は、熱線の加熱電流、ニクロム線の加熱電流および増幅器の増幅率を一定に保つ。



第 2 図 計 測 装 置 図

probe の写真を写真 2 に示す。2本の白金線およびニクロム線はすべて同一面内にあつて、しかも互いに平行でなければならないが、手作りのため完全に平行になっていないで、一番狭いところで 1.0mm 、一番開いたところで 1.3mm の幅をもっている。しかし、probe の長さが 52mm なのでその差は全く問題にならない。なお、長さを十分大きくとつたのは、平均的な速度場は円柱の長さ方向には一様であること、長いほど感度が高いこと、および probe の支柱による影響をできるだけ小さくすることの理由による。熱線以外での電流変化をできるだけ押えるため、熱線およびニクロム線の支柱は熱線等に比べて十分大きく直径約 2mm の鉄棒を、また途中のリード線は AC コードを使用した。また、あまり小さな信号は解析に不要なのでフィルターを適宜使用した。

写真 3 は円柱と probe の配置を示すものである。円柱はその軸が水平になるように置いてあるので、円柱の下方に水槽の底、上方に水の自由表面がある。円柱および probe はその上方にある電車で固定されているが、円柱の軸と 2本の熱線およびニクロム線は平行であり、しかもそれらすべては、主流の方向に平行な一平面内になければならない。

使用した水槽は幅 45.5cm 、長さ約 6m であり、水深は約 37.5cm であった。計測可能な走行距離は約 4m である。各計測の計測時間はまちまちであるが、大部分の計測が数分間、一番短いのは $R=6091$ の場合の 28 秒間であった。円柱は、直径 $15\text{mm}\sim 55\text{mm}$ までの 4 種類の円柱を使用した。なお、それらの長さは約 45cm である。

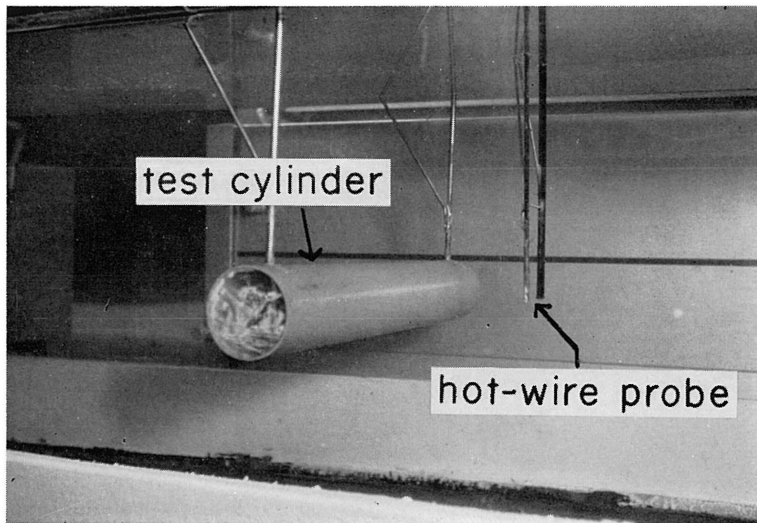


写真 3 円柱と probe の配置

以上述べた要領で実験を行なったわけであるが、1例として、 $R=106$ の場合の計測で、オシログラフに記録された熱線流速計からの信号の一部を写真4に示す。図で、(+)とあるのは実際に円柱で計測するために電車を進める方向を示しており、(-)とあるのはその逆方向に電車を動かしたことを意味している。写真上の細い直線は、速度0に対応する level を表わす。図の(a), (b)は、円柱のない状態で、電車の進行速度と probe の加熱電流とを一定にして、(+)方向および(-)方向に電車を進めたときのそれぞれの信号である。(c)以下は実際に円柱についての計測の記録である。その場合、電車は常に(+)方向に進めている。また、2本の熱線は平衡型のブリッジ回路に組まれているのであるから、(a), (b)の記録から明らかなように、probe が主流方向の流れに感じた場合、その信号は0 level よりも下側に、probe が逆流に感じた場合、その信号は0 level よりも上側に記録される。円柱の直径を d 、円柱後端から probe の中央までの距離を s とする。図の(c), (d)は、probe からの信号が0 level よりも上側にあり、これらの点では逆流が強いことを示している。(f)は、逆に主流方向の流れが強いことを示している。ところが、(e)の記録では、0 level を境として主流方向流れに対する信号と逆流に対する信号とが同程度であることが一目してわかる。このことから、 $s/d=1.9$ の点では主流方向流れの強さおよび逆流の強さが平均的に同程度であり、この点が大体平均的逆流域の点であることがわかる。なお、この場合、(c)~(f)の記録に現われた波形は Kármán 渦の周期と一致している。

R 数が大きな場合の信号は複雑な波形を描き、その識別は上に述べた例のようには容易でない。そのような場合には、0 level を境として上側および下側にある波形のそれぞれの面積の総和を求め、主流方向および逆流方向流れの強さを比較した。

ところで、速度は等しく、方向が 180° 違う2方向の流れに対する probe の感度の違いは全計測を通じてたかだか7~8%であった。われわれの計測は、速度の絶対値計測ではなく、主流方向および逆流方

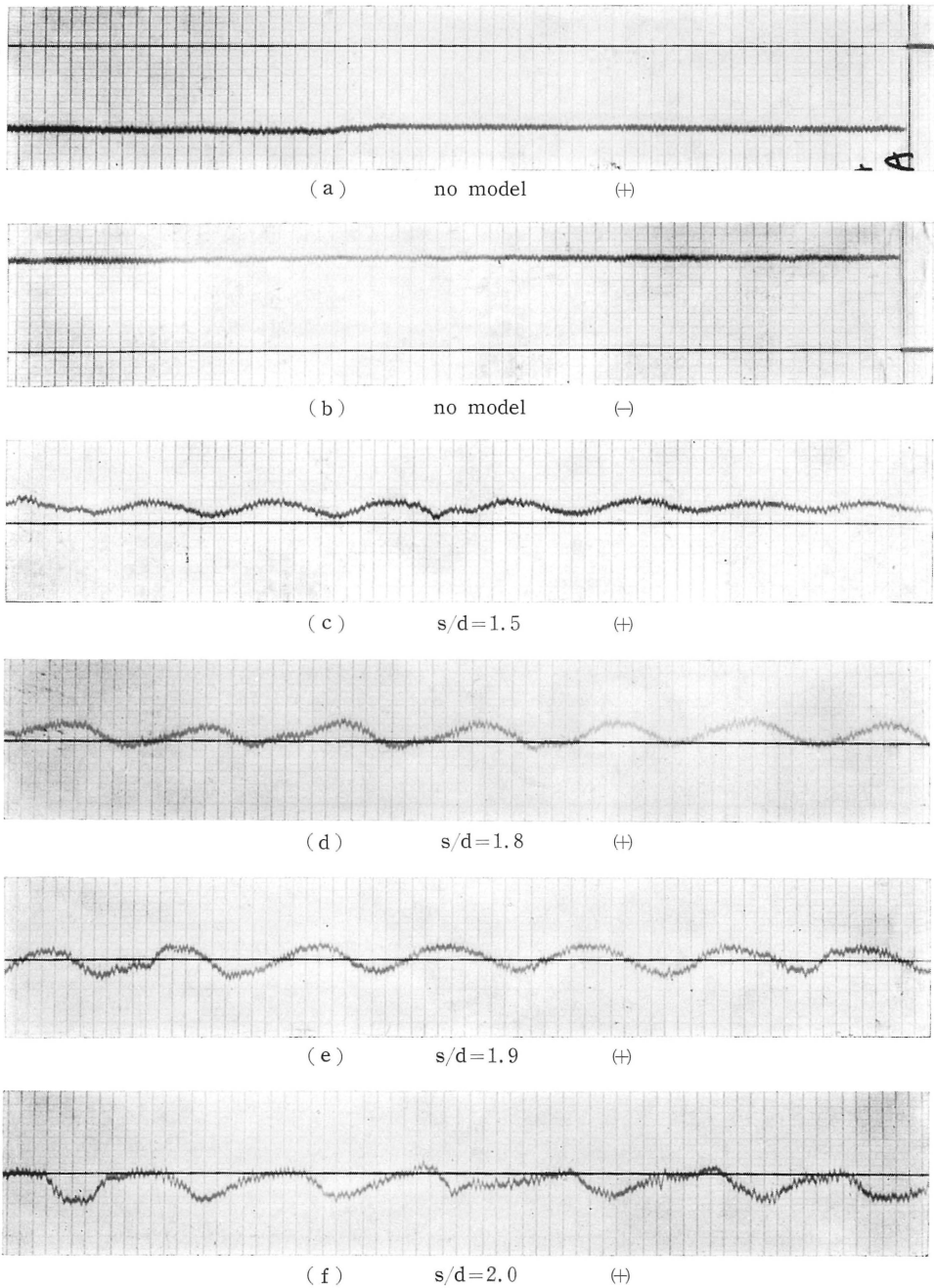


写真4 熱線流速計による信号の記録例

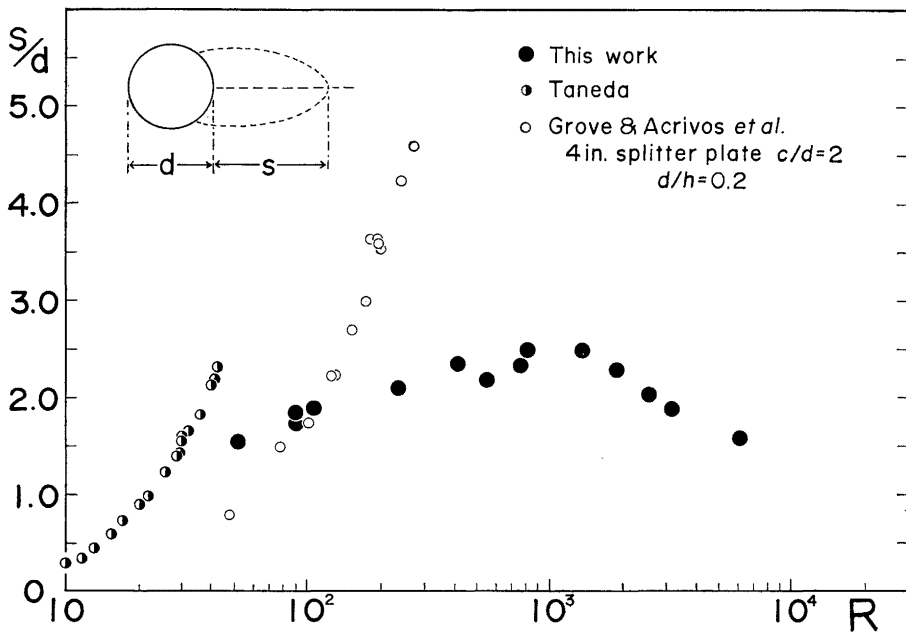
$$R=106 \quad U_0=0.87\text{cm/sec} \quad d=15.2\text{mm}$$

d は円柱の直径, s は円柱後端から probe までの距離, 細い直線は速度 0 に対応する level を表わす。グリッドラインは 1 秒間隔を表わす。約 4 分間ずつ計測した記録の 1 部。

向の流れの長時間にわたる相対的な強さの比較を行ない、0 level を探すことであるから、上に述べた程度の probe の感度の差はほとんど影響はなく、計測結果に不都合は起こらない。

§ 2 実験結果

前節に述べた要領により、 $50 < R < 10^4$ の範囲の R 数について平均的逆流域の計測を行なったが、その結果を第 3 図に●で示す。図から明らかなように、平均的逆流域の大きさは R 数が大きくなるにつれて単調に増大し、 $R=10^3$ の付近で円柱直径の約 2.5 倍にまで達する。さらに R 数が大きくなると、逆に単調に縮小し、 $R=6 \times 10^3$ の付近では円柱直径の約 1.6 倍になる。すなわち、注目すべきは、平均的逆流域の大きさは、 $R=10^3$ の付近で極大値を持つということである。



第 3 図 平均的逆流域の計測結果

●で示したのが本実験。◐, ○で示したのは定常実験である。
Grove 等の実験で、 c は splitter plate の先端と円柱の中心との距離、 h は両側壁間の距離である。

第 3 図の◐で示したのは、Taneda による実験であり、 $R \leq 40$ の範囲では、円柱背部の定常な双子渦はほとんど R 数に比例して大きくなることを示している。また図に○で示したのは、Grove 等による実験データである。この実験は、R 数が 40 を越えた範囲でも双子渦を安定に存在させるために、円柱の両側の壁の影響および splitter plate の安定化の効果を利用している。彼等の R 数約 300 までの実験結果によると、wake bubble の大きさは R 数に大体比例して増大し、その内部には渦が存在する。彼等はその実験結果により、さらに大きな R 数についても、円柱背部の定常な wake bubble は R 数に比例し

て増大し、その内部には渦が存在するであろうということを示唆している。しかし、我々の実験結果によると、後流が非定常運動を行なう場合の円柱の平均的逆流域の大きさは、 $R=10^3$ の付近で極大値をもち、さらにR数が大きくなると、逆に縮小していくことが明らかにされた。ただし、R数が 10^4 より大きい領域については不明である。

II-2 平均的逆流域の flow visualization

§ 1 実験方法及び装置

この実験の目的は、一様流中に円柱を置いて、そのR数が40より大きい非定常な流れの場の平均的 flow pattern を visualize することである。実験方法は、円柱前方より水素気泡を発生させ、水素気泡が可視化した円柱背部の流れの場を極端に長い露出時間で写真撮影する。

使用した装置は回流型の開水路である。その装置を写真5に示す。水路に水を送り込む head tank の水位は任意に取りえ、約 $\pm 1.0\text{cm}$ の誤差の範囲で一定の水位を保つことができる。水路の幅は40cm、長さは約10mである。水路の途中に計測部があるが、ここでの流れは、水路の底面近くおよび水面上を除いて十分に一様である。その水深は、約30.5~34.0cmであった。

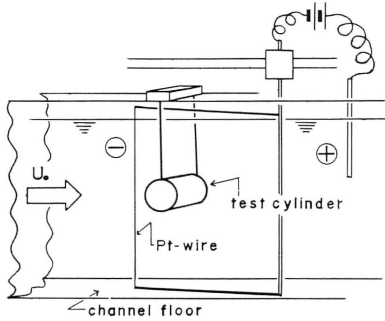


写真5 回流型開水路

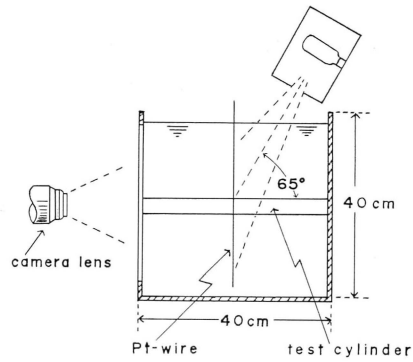
水路の長さは約10m、写真の中央部付近が計測場所、一番奥にあるのが head tank。

第4図に示すように、円柱の軸は主流に直角であり、また、水路の底から約20cmの位置に水平に固定されている。使用した円柱は、直径2.6mmから直径42.0mmまでの8種類の円柱であった。

円柱の前方、水路の中央部に水素気泡を発生させる白金線を円柱の軸および主流に垂直に固定する。白金線と円柱との距離は、円柱直径の約0.7~2.3倍であり、使用した白金線の直径は50 μ および100 μ であった。きれいな写真を得るために発生させる水素気泡の量は、円柱の直径および流速によって異な



第 4 図 実験方法



第 5 図 Flow visualization の方法

り、大きな円柱および速い流れに対してはかなり多くの水素気泡を必要とする。実験において、水素気泡の発生量が多すぎることはほとんど感じなかったが、水素気泡が少なすぎると長時間の撮影をしても良好な写真は得られない。我々の実験で、最大円柱、最大速度の $R = 1.24 \times 10^4$ の場合白金線には約 90 V の直流電圧をかけている。

なお、第 5 図に示すように、光源は被写面をはさんでカメラと反対側、カメラの軸と約 65° の斜方向から被写面を照射するようにしてある。

写真 6 は水素気泡法により瞬間的に見た円柱背部の流れの模様である。瞬間的に見た場合このように非常に乱れている。こうした非定常な流れの場を数十秒～数分間の露光によって撮影し、その平均的な流れの場を見ようとするのである。

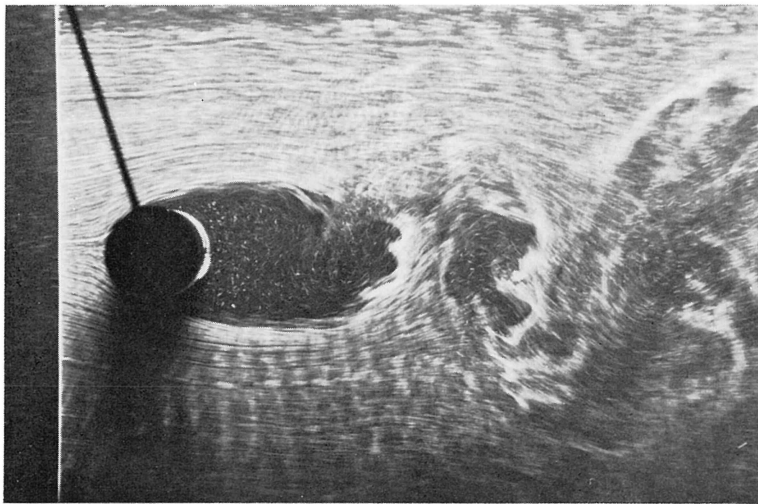


写真 6 円柱後方の瞬間的 flow pattern

$R = 11660$

§ 2 実験結果

前節に述べた方法により、 R 数 $113 \sim 1.24 \times 10^4$ の範囲の13種のいろいろな R 数について長時間露出撮影を行なった。写真7～写真12まで6例の写真を示すが、各写真で円柱前方の円柱に垂直な白く光って見える直線が白金線であり、白金線後方の白い部分は水素気泡の sheet である。一目して明らかなよ

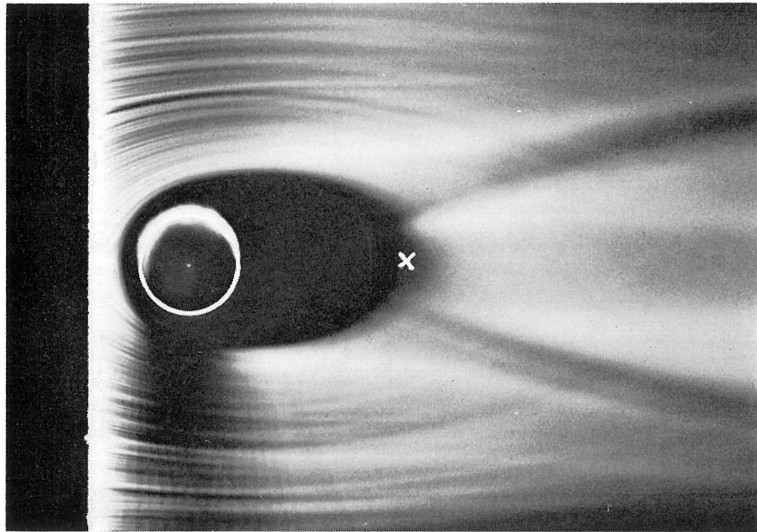


写真7 長時間撮影による円柱後方の flow pattern

$R=113$, $U_0=5.2\text{cm/sec}$, $d=2.6\text{mm}$, 露光90秒

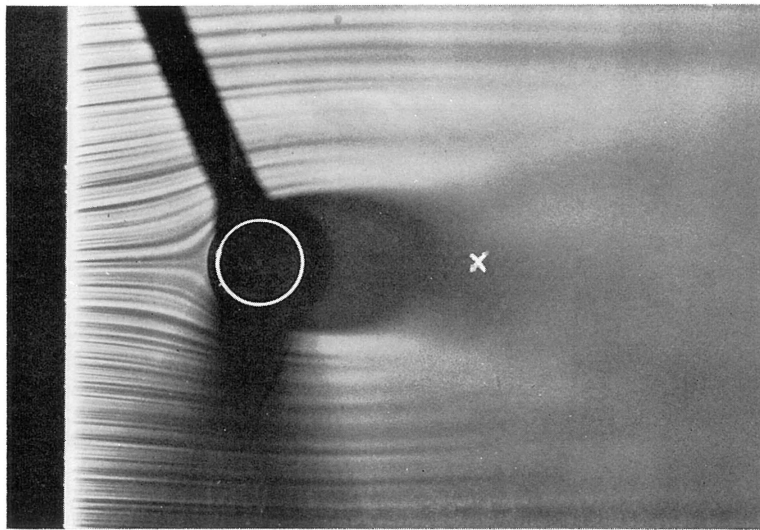


写真8 同じ

$R=451$, $U_0=5.23\text{cm/sec}$, $d=10.0\text{mm}$, 露光150秒

うに、円柱後方にはほとんど水素気泡の入り込まない閉じた領域が存在する*。写真からこの閉じた領域の大きさを読みとることはあいまいさを避けられないが、円柱後端とこの閉じた領域の後端との距離

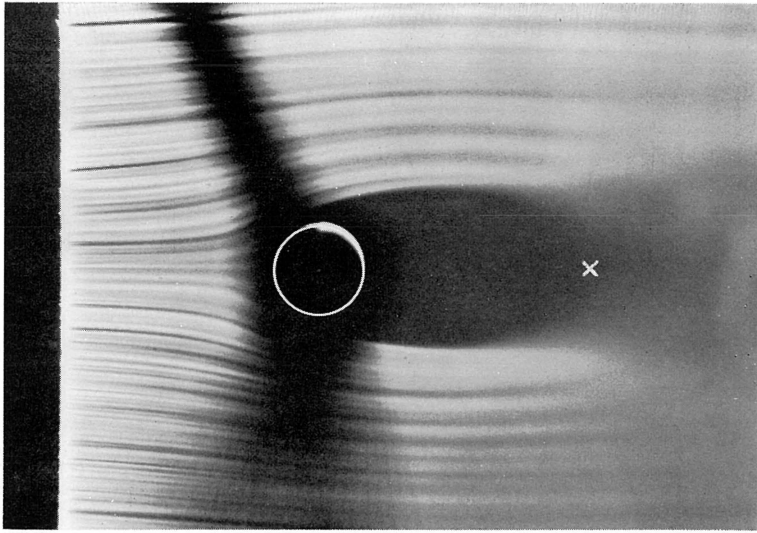


写真 9 同 じ

$R = 983$, $U_0 = 11.7 \text{ cm/sec}$, $d = 10.0 \text{ mm}$, 露光150秒

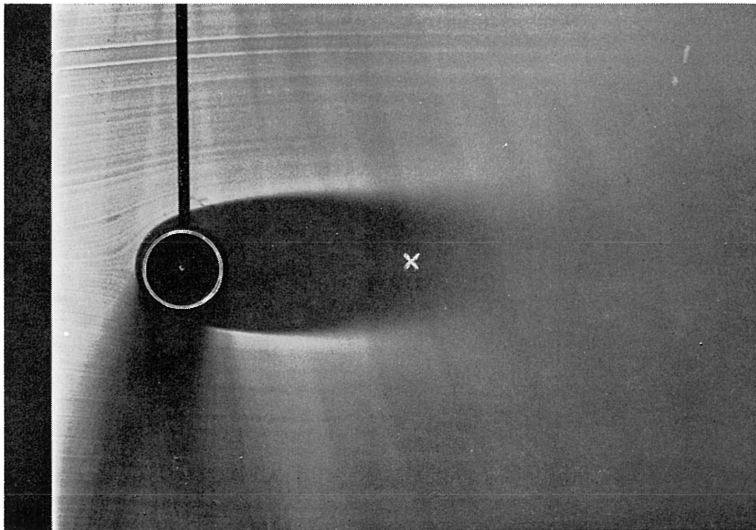


写真 10 同 じ

$R = 1093$, $U_0 = 5.25 \text{ cm/sec}$, $d = 25.2 \text{ mm}$, 露光180秒

* 瞬間的に見ると、この領域にも水素気泡は入ってくる。しかし、その量はきわめて少なく、またまもなく水に溶け込んでしまう。

は、大体の傾向として、 $R \approx 10^3$ の付近で極大となり、 R 数がさらに大きくなると徐々に縮小する傾向を示している。 U_0 は一様流の速度、 d は円柱直径を表わす。各写真上に書き入れた \times 印は、前章の熱線を使って求めた平均的逆流域のグラフ（第3図）より読み取った値に対応する点である。各写真につい

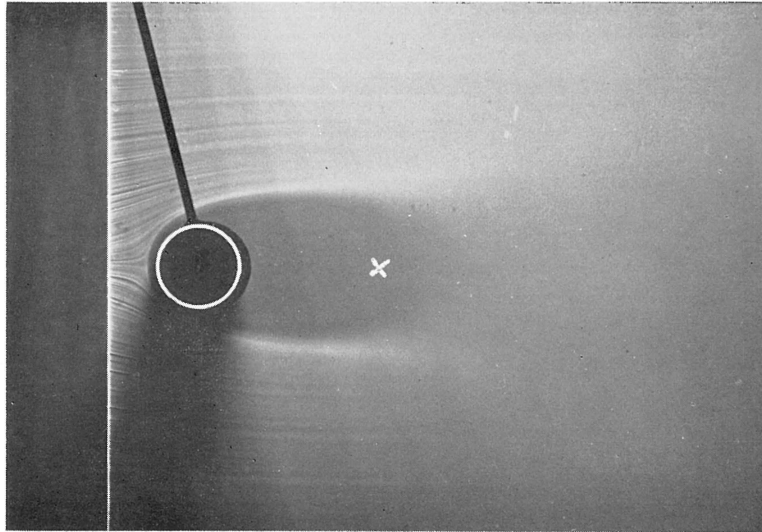


写真 11 同 じ

$R = 5374$, $U_0 = 18.4 \text{ cm/sec}$, $d = 34.1 \text{ mm}$, 露光180秒

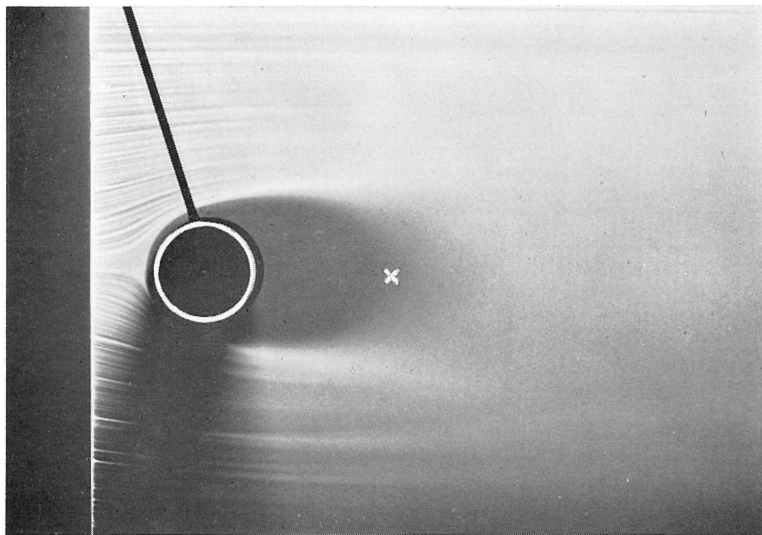


写真 12 同 じ

$R = 12350$, $U_0 = 34.4 \text{ cm/sec}$, $d = 42.0 \text{ mm}$, 露光120秒

て、その鮮明さの度合い等に応じて多少の差異はあるが、水素気泡法により得られた閉じた領域と、熱線流速計により得られた平均的逆流域とはかなりよく一致していることがわかる。

以上のことから、水素気泡法による flow visualization で平均的逆流域を検出しうる事が明らかとなった。

ところで、写真で明らかなように、円柱前方より一様速度で流れてきた水素気泡は、円柱近傍において、あたかも円柱を避けるかのように分布している。それゆえ、円柱を内に含む閉じた全領域がそのまま平均的逆流の場を示すことにはならない。

写真13は、円柱のごく近傍にきた水素気泡の様子をもっとはっきり見るためのものである。この場合 $R = 983$ であり、水素気泡を発生させるための白金線は円柱前方のみでなく、円柱後方にも置いてある。もちろん、これら2本の白金線を含む平面は主流に平行である。この写真で、円柱背部に接触している水素気泡の sheet は円柱後方に置いた白金線から出た水素気泡が逆流によって前方に運ばれたものである。この領域と円柱前方の白金線から出た水素気泡の分布している領域とは明瞭に区別され、その間にほとんど水素気泡の観察されない帯のような領域がある。この原因は何であるか、いまだくわしい検討をするに到っていないが、一つの予想としては、円柱近傍の強い shear が何らかの影響をもっているのではなかろうかと思われる。

なお、水素気泡法のほかにアルミ粉を用いた flow visualization も試みたが、アルミ粉の場合には平均的逆流域を示すような写真を得ることはできなかった。

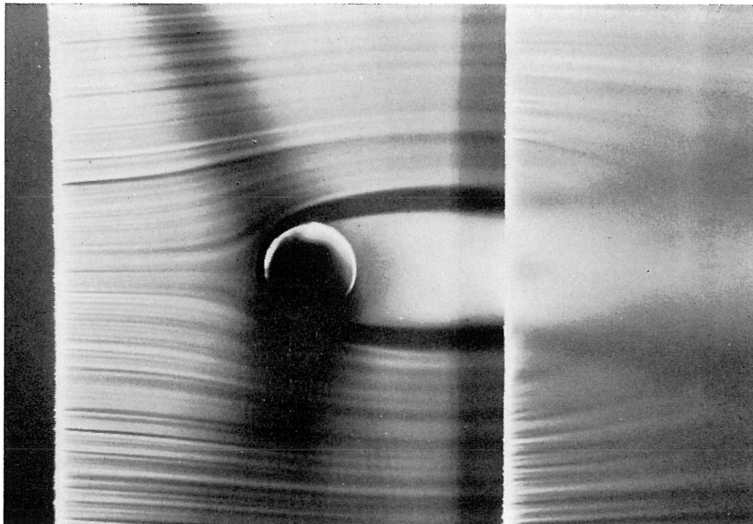


写真 13 同 じ

$R = 983$, 写真 9 と同じ条件

II-3 最大逆流域の計測

§1 実験方法及び装置

$R > 40$ の場合、円柱背後の流れは非定常であり、その逆流の領域は常に変動している。 R 数が大きくなるにつれ、この変動はきわめて不規則になる。しかし、こうした逆流もその存在しうる範囲に限界があるはずである。円柱背後において、たとえ瞬間的にせよ逆流を示す流れの場の範囲（最大逆流域）を計測するのがこの実験の目的である。

実験装置はII-2で述べた回流型の開水路を使用し、実験方法もII-2とほとんど同じである。今回は、水素気泡発生用の白金線は円柱の後方に、円柱の軸に垂直に置く。逆流があると白金線から出た水素気泡が上流に流れるのが観察される。

観察によると、常時逆流を示す場は、円柱背後たかだか円柱直径の1倍強程度の範囲である。それより後方にいくにつれて逆流が見られるのは断続的になり、また、きわめて不規則になる。さらに後方になると、数分間の観察時間中に一瞬弱い逆流が観察される。

実験は、こうした逆流を注意深く観察していった、もうこれ以上は長時間（最低5～6分間）の観察をしても逆流は現われないという範囲を求めた。ただし、逆流の強さについての定量的な測定はしていない。

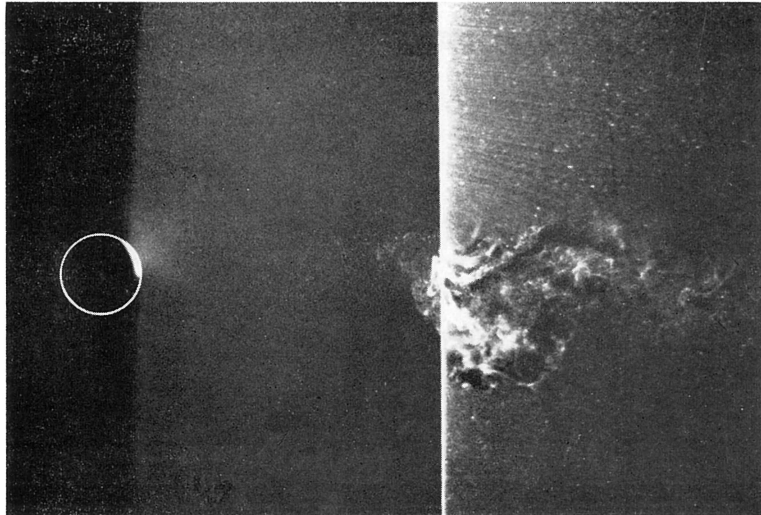


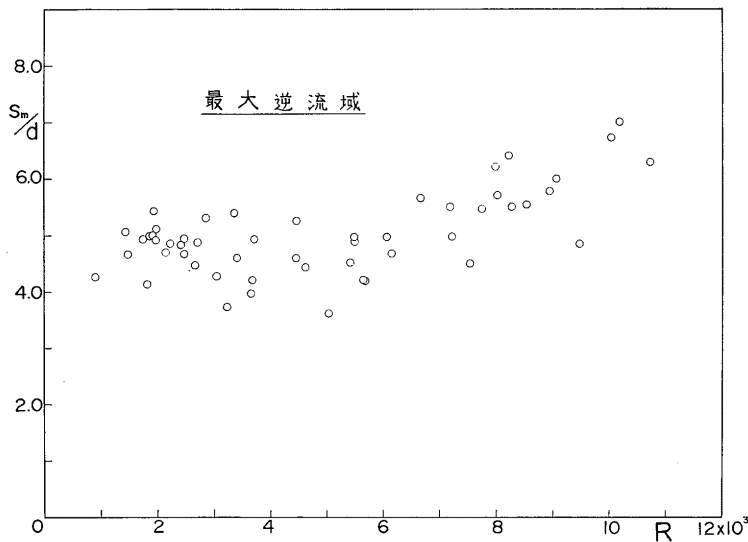
写真14 円柱後方での瞬間的逆流

$$R=3226, \quad s/d=3.7$$

§ 2 実験結果

写真14は円柱のかなり後方で一瞬現われた逆流を示すものである。白金線の位置は、円柱後端から円柱直径の3.7倍のところである。この場合、最大逆流域は円柱直径の3.73倍であったが、瞬間的な現象であったため撮影できなかった。

以上のようにして、 10^3 の order の R 数について求めた最大逆流域の大きさを示したのが第6図である。図の S_m は最大逆流域の円柱後端からの距離、 d は円柱の直径である。II-1で述べたように平均的逆流域は $R=10^3$ の付近で極大値をとるのであるが、最大逆流域の方は、 R 数が大きくなるにつれて単調に大きくなり、 $R=10^4$ の付近では円柱後端から円柱直径の約7倍程度後方でも一瞬逆流が観察される。



第6図 最大逆流域の計測結果

III 結 言

一様流中にある円柱について、その R 数が40より大きい場合の円柱背部にできる逆流域について実験を行なった。 $R > 40$ では、円柱背部の流れは定常であり得ない。そこで、平均的な速度場で見られた流れの場の、特に逆流域の大きさに着目して実験を行なった。つまり、II-1では、熱線流速計を使用した電氣的計測を行ない、II-2では、水素気泡法によってその flow pattern の visualization を試みた。結果は、 $50 < R < 10^4$ の範囲内では、平均的逆流域は $R=10^3$ の付近で最大となる。こうした平均的逆流域の R 数に対する依存性は水素気泡法によっても確認された。

II-3では、瞬間的に逆流を示す流れの範囲を求めた。平均的逆流域は $R=10^3$ の付近で極大値をと

り, $R > 10^3$ では逆に縮小するのに比べ, 最大逆流域はR数とともに単調に増大する。

終りに, 研究全般にわたってご協力いただいた応用力学研究所水文学部門の諸氏に対して深く感謝いたします。特に, 実験の協力者として全面的な援助をいただいた若林大三氏に対して心から感謝いたします。

なお, 本研究の一部をなす水素気泡法による flow pattern の撮影は, 機関研究「フロービジュアルゼーションの系統的研究」の一環をなすもので, 文部省科学研究費の援助を受けて行なわれた。

参 考 文 献

- 1) A. Thom: Proc. Roy. Soc. London, A, 141 (1933), 651-669.
- 2) F. Homann: Forsch. Ing.-Wes., 7 (1936), 1-10.
- 3) S. Taneda: J. Phys. Soc. Japan, 11 (1956), 302-307.
- 4) S. Taneda: J. Phys. Soc. Japan, 11 (1956), 1104-1108.
- 5) H. B. Keller and H. Takami: Wiley, (1966), 115-140.
- 6) M. Kawaguti: J. Phys. Soc. Japan, 8 (1953), 747-757.
- 7) M. Kawaguti and P. Jain: J. Phys. Soc. Japan, 21 (1966), 2055-2062.
- 8) C. J. Apelt: Aero. Res. Council, R. and M., (1961), No. 3175.
- 9) 種子田定俊, 本地弘之: 応用力学研究所所報, 第30号 (1968), 21~32.
- 10) J. S. Son and T. J. Hanratty: J. Fluid Mech., 35, Part 2 (1969), 369-386.
- 11) A. S. Grove, F. H. Shair, E. E. Petersen and A. Acrivos: J. Fluid Mech., 19 (1964), 60-80.
- 12) L. S. G. Kovásznay: Proc. Roy. Soc. London, A, 198 (1949), 174-190.
- 13) G. K. Batchelor: J. Fluid Mech., 1 (1956), 388-398.
- 14) D. J. Tritton: J. Fluid Mech., 6 (1959), 547-567.
- 15) T. Carmody: ASME Trans. (series D), (1964), 869-882.
- 16) R. Fail, J. A. Lawford and R. C. W. Eyre: R. and M., (1957), No. 3120.

(昭和44年5月14日 受理)